وزارة التربية والتعليم
مدرسة البدع للتعليم الأساسي والثانوي
الصف / الثاني عشر المتقدم

EOT (12-Advanced)
هيكل الرياضيات
الصف الثاني عشر المتقدم
الفصل الدراسي الثاني
2024 – 2025م

تجميع وإعداد الأستاذ /
محمد عبدالحميد الطحاوي

EXAMPLE 3.10 Finding Critical Numbers of a Rational Function

Find all the critical numbers of $f(x) = \dfrac{2x^2}{x+2}$.

Solution You should note that the domain of f consists of all real numbers other than $x = -2$. Here, we have

$$f'(x) = \frac{4x(x+2) - 2x^2(1)}{(x+2)^2} \quad \text{From the quotient rule.}$$

$$= \frac{2x(x+4)}{(x+2)^2}.$$

Notice that $f'(x) = 0$ for $x = 0, -4$ and $f'(x)$ is undefined for $x = -2$. However, -2 is not in the domain of f and consequently, the only critical numbers are $x = 0$ and $x = -4$. ■

مثال 3.10 إيجاد أعداد حرجة لدالة نسبية

جـد كل الأعداد الحرجة لـ $f(x) = \dfrac{2x^2}{x+2}$.

الحل يجب أن تلاحظ أن مجال f يتكون من كل الأعداد الحقيقية غير $x = -2$. لدينا هنا

$$f'(x) = \frac{4x(x+2) - 2x^2(1)}{(x+2)^2} \quad \text{من قاعدة ناتج القسمة.}$$

$$= \frac{2x(x+4)}{(x+2)^2}.$$

لاحظ أن $f'(x) = 0$ لـ $x = 0, -4$ و $f'(x)$ غير معرّفة عندما $x = -2$. ومع ذلك، فإن -2 ليست في مجال f وبالتالي فإن الأعداد الحرجة فقط هي $x = 0$ و $x = -4$. ■

في التمارين 34-25، جـد القيم القصوى المطلقة لدالة

In exercises 25–34, find the absolute extrema of the given function on each indicated interval.

25. $f(x) = x^3 - 3x + 1$ on (a) $[0, 2]$ and (b) $[-3, 2]$

26. $f(x) = x^4 - 8x^2 + 2$ on (a) $[-3, 1]$ and (b) $[-1, 3]$

27. $f(x) = x^{2/3}$ on (a) $[-4, -2]$ and (b) $[-1, 3]$

28. $f(x) = \sin x + \cos x$ on (a) $[0, 2\pi]$ and (b) $[\pi/2, \pi]$

29. $f(x) = e^{-x^2}$ on (a) $[0, 2]$ and (b) $[-3, 2]$

30. $f(x) = x^2 e^{-4x}$ on (a) $[-2, 0]$ and (b) $[0, 4]$

31. $f(x) = \dfrac{3x^2}{x-3}$ on (a) $[-2, 2]$ and (b) $[2, 8]$

32. $f(x) = \tan^{-1}(x^2)$ on (a) $[0, 1]$ and (b) $[-3, 4]$

33. $f(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$ on (a) $[0, 2]$ and (b) $[-3, 3]$

34. $f(x) = \dfrac{3x}{x^2+16}$ on (a) $[0, 2]$ and (b) $[0, 6]$

في التمارين 10-1، جــد (يدويًا) الفترات التي تكون فيها الدالة متزايدة والفترات التي تكون فيها متناقصة. استخدم هذه المعلومات في تحديد جميع القيم القصوى المحلية وارسم تمثيلا بيانيًا.

In exercises 1–10, find (by hand) the intervals where the function is increasing and decreasing. Use this information to determine all local extrema and sketch a graph.

1. $y = x^3 - 3x + 2$
2. $y = x^3 + 2x^2 + 1$
3. $y = x^4 - 8x^2 + 1$
4. $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 1$
5. $y = (x + 1)^{2/3}$
6. $y = (x - 1)^{1/3}$
7. $y = \sin x + \cos x$
8. $y = \sin^2 x$
9. $y = e^{x^2-1}$
10. $y = \ln(x^2 - 1)$

في التمارين 38-33، جـــد (يدويًا) كافة خطوط التقارب والقيم القصوى، وارسم تمثيلًا بيانيًا.

In exercises 33–38, find (by hand) all asymptotes and extrema, and sketch a graph.

33. $y = \dfrac{x}{x^2 - 1}$

34. $y = \dfrac{x^2}{x^2 - 1}$

35. $y = \dfrac{x^2}{x^2 - 4x + 3}$

36. $y = \dfrac{x}{1 - x^4}$

37. $y = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$

38. $y = \dfrac{x^2 + 2}{(x + 1)^2}$

في التمارين 20-11، جـد (يدويًا) جميع الأعداد الحرجة واستخدم اختبار المشتقة الأولى لتصنيف كل واحدة على أنها قيمة عظمى محلية أو قيمة صغرى محلية أو غير ذلك.

In exercises 11–20, find (by hand) all critical numbers and use the First Derivative Test to classify each as the location of a local maximum, local minimum or neither.

11. $y = x^4 + 4x^3 - 2$

12. $y = x^5 - 5x^2 + 1$

13. $y = xe^{-2x}$

14. $y = x^2e^{-x}$

15. $y = \tan^{-1}(x^2)$

16. $y = \sin^{-1}\left(1 - \frac{1}{x^2}\right)$

17. $y = \dfrac{x}{1 + x^3}$

18. $y = \dfrac{x}{1 + x^4}$

19. $y = \sqrt{x^3 + 3x^2}$

20. $y = x^{4/3} + 4x^{1/3}$

في التمارين 8–1، حدد الفترات التي يكون فيها التمثيل البياني لدالة معطاة مقعّرًا إلى الأعلى والفترات التي يكون فيها مقعّرًا إلى الأسفل، وحدد نقاط الانعطاف.

In exercises 1–8, determine the intervals where the graph of the given function is concave up and concave down, and identify inflection points.

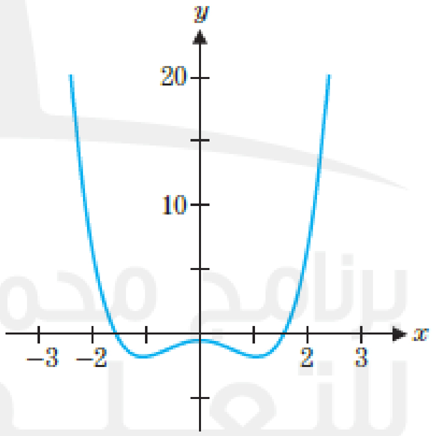
1. $f(x) = x^3 - 3x^2 + 4x - 1$
2. $f(x) = x^4 - 6x^2 + 2x + 3$
3. $f(x) = x + 1/x$
4. $f(x) = x + 3(1-x)^{1/3}$
5. $f(x) = \sin x - \cos x$
6. $f(x) = \tan^{-1}(x^2)$
7. $f(x) = x^{4/3} + 4x^{1/3}$
8. $f(x) = xe^{-4x}$

7	Determine the concavity of a function using the first and second derivatives تحديد فترات التقعر إلى أعلى وإلى أسفل لدالة معينة باستخدام المشتقتين الأولى والثانية	(45,46)	276

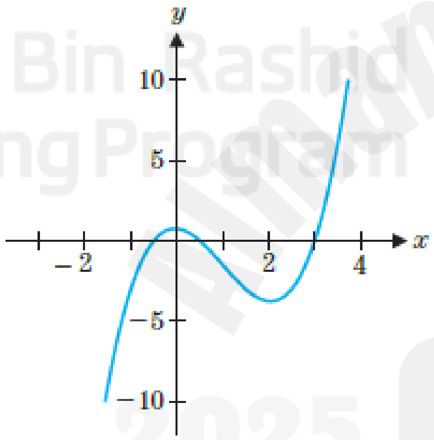
في التمرينين 45 و46، قدّر الفترات المتزايدة والمتناقصة، ومواقع القيم القصوى المحلية، وفترات التقعر، ومواقع نقاط الانعطاف.

In exercises 45 and 46, estimate the intervals of increase and decrease, the locations of local extrema, intervals of concavity and locations of inflection points.

45.



46.



8	Sketch the graph of a given function using its properties and its first and second derivative رسم منحنى الدالة اعتمادا على التمثيل البياني لمشتقتها	(49,52)	287

في التمارين 52–49، جـــد دالة يوجد بتمثيلها البياني خطوط التقارب المعطاة.

In exercises 49–52, find a function whose graph has the given asymptotes.

49. $x = 1$, $x = 2$ and $y = 3$

52. $x = 1$, $y = 2$ and $x = 3$

في التمارين (5-28) أوجد المشتقة العكسية

In exercises 5–28, find the general antiderivative.

5. $\int (3x^4 - 3x)\,dx$

6. $\int (x^3 - 2)\,dx$

7. $\int \left(3\sqrt{x} - \frac{1}{x^4}\right)dx$

8. $\int \left(2x^{-2} + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)dx$

9. $\int \frac{x^{1/3} - 3}{x^{2/3}}\,dx$

10. $\int \frac{x + 2x^{3/4}}{x^{5/4}}\,dx$

11. $\int (2\sin x + \cos x)\,dx$

12. $\int (3\cos x - \sin x)\,dx$

13. $\int 2\sec x \tan x\,dx$

14. $\int \frac{4}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$

15. $\int 5\sec^2 x\,dx$

16. $\int 4\frac{\cos x}{\sin^2 x}\,dx$

17. $\int (3e^x - 2)\,dx$

18. $\int (4x - 2e^x)\,dx$

19. $\int (3\cos x - 1/x)\,dx$

20. $\int (2x^{-1} + \sin x)\,dx$

21. $\int \frac{4x}{x^2 + 4}\,dx$

22. $\int \frac{3}{4x^2 + 4}\,dx$

23. $\int \frac{\cos x}{\sin x}\,dx$

24. $\int \left(2\cos x - \sqrt{e^{2x}}\right)dx$

25. $\int \frac{e^x}{e^x + 3}\,dx$

26. $\int \frac{e^x + 3}{e^x}\,dx$

27. $\int x^{1/4}(x^{5/4} - 4)\,dx$

28. $\int x^{2/3}(x^{-4/3} - 3)\,dx$

في التمارين (35-40) أوجد الدالة $f(x)$ التي تحقق الشروط المعطاة

In exercises 35–40, find the function $f(x)$ satisfying the given conditions.

35. $f'(x) = 3e^x + x, f(0) = 4$

36. $f'(x) = 4\cos x, f(0) = 3$

37. $f''(x) = 12x^2 + 2e^x, f'(0) = 2, f(0) = 3$

38. $f''(x) = 20x^3 + 2e^{2x}, f'(0) = -3, f(0) = 2$

39. $f''(t) = 2 + 2t, f(0) = 2, f(3) = 2$

40. $f''(t) = 4 + 6t, f(1) = 3, f(-1) = -2$

....

في التمارين (41-44) أوجد جميع الدوال $f(x)$ التي تحقق الشروط المعطاة

In exercises 41–44, find all functions satisfying the given conditions.

41. $f''(x) = 3\sin x + 4x^2$

42. $f''(x) = \sqrt{x} - 2\cos x$

43. $f'''(x) = 4 - 2/x^3$

44. $f'''(x) = \sin x - e^x$

....

45. Determine the position function if the velocity function is $v(t) = 3 - 12t$ and the initial position is $s(0) = 3$.

46. Determine the position function if the velocity function is $v(t) = 3e^{-t} - 2$ and the initial position is $s(0) = 0$.

47. Determine the position function if the acceleration function is $a(t) = 3\sin t + 1$, the initial velocity is $v(0) = 0$ and the initial position is $s(0) = 4$.

48. Determine the position function if the acceleration function is $a(t) = t^2 + 1$, the initial velocity is $v(0) = 4$ and the initial position is $s(0) = 0$.

45. حدد الدالة المكانية إذا كانت دالة السرعة المتجهة هي $v(t) = 3 - 12t$ والموقع الابتدائي هو $s(0) = 3$.

46. حدد الدالة المكانية إذا كانت دالة السرعة المتجهة هي $v(t) = 3e^{-t} - 2$ والموقع الابتدائي هو $s(0) = 0$.

47. حدد الدالة المكانية إذا كانت دالة التسارع هي $a(t) = 3\sin t + 1$، والسرعة المتجهة الابتدائية هي $v(0) = 0$ والموقع الابتدائي هو $s(0) = 4$.

48. حدد الدالة المكانية إذا كانت دالة التسارع هي $a(t) = t^2 + 1$، والسرعة المتجهة الابتدائية هي $v(0) = 4$ والموقع الابتدائي هو $s(0) = 0$.

49. ارسم التمثيل البياني لدالتين $f(x)$ مقابلتين للتمثيل البياني الموضح لـ $y = f'(x)$.

11	Use the sigma notation to compute basic summation استخدام رمز المجموع سيجما لإيجاد المجاميع البسيطة	(9-18)	337

في التمارين 8–5، اكتب كل الحدود واحسب المجموع.

In exercises 5–8, write out all terms and compute the sums.

5. $\sum_{i=1}^{6} 3i^2$

6. $\sum_{i=3}^{7} (i^2 + i)$

7. $\sum_{i=1}^{10} (4i + 2)$

8. $\sum_{i=6}^{8} (i^2 + 2)$

في التمارين م 9-18 استخدم قواعد المجموع لإيجاد المجموع

In exercises 9–18, use summation rules to compute the sum.

9. $\sum_{i=1}^{70} (3i - 1)$

10. $\sum_{i=1}^{45} (3i - 4)$

11. $\sum_{i=1}^{40} (4 - i^2)$

12. $\sum_{i=1}^{50} (8 - i)$

13. $\sum_{n=1}^{100} (n^2 - 3n + 2)$

14. $\sum_{n=1}^{140} (n^2 + 2n - 4)$

15. $\sum_{i=3}^{30} [(i - 3)^2 + i - 3]$

16. $\sum_{i=4}^{20} (i - 3)(i + 3)$

17. $\sum_{k=3}^{n} (k^2 - 3)$

18. $\sum_{k=0}^{n} (k^2 + 5)$

12	Estimate the area under a curve on a given interval using rectangles تقدير المساحة تحت المنحنى لدالة في فترة محددة باستخدام المستطيلات	(5-10)	344

في التمارين 10–5، قرّب المساحة تحت المنحنى على الفترة المعطاة باستخدام n مستطيلًا وقواعد القيم (a) نقطة النهاية اليسرى (b) نقطة المنتصف (c) نقطة النهاية اليمنى.

In exercises 5–10, approximate the area under the curve on the given interval using n rectangles and the evaluation rules (a) left endpoint (b) midpoint (c) right endpoint.

5. $y = x^2 + 1$ on $[0, 1]$, $n = 16$

6. $y = x^2 + 1$ on $[0, 2]$, $n = 16$

7. $y = \sqrt{x + 2}$ on $[1, 4]$, $n = 16$

8. $y = e^{-2x}$ on $[-1, 1]$, $n = 16$

9. $y = \cos x$ on $[0, \pi/2]$, $n = 50$

10. $y = x^3 - 1$ on $[-1, 1]$, $n = 100$

13	التعرف على خصائص التكامل المحدود Learn the properties of definite integrals	(23,24)	356

في التمرينين 23 و24، احسب $\int_0^4 f(x)\,dx$.

In exercises 23 and 24, compute $\int_0^4 f(x)\,dx$.

23. $f(x) = \begin{cases} 2x & \text{if } x < 1 \\ 4 & \text{if } x \geq 1 \end{cases}$

24. $f(x) = \begin{cases} 2 & \text{if } x \leq 2 \\ 3x & \text{if } x > 2 \end{cases}$

14	Apply the Integral Mean Value Theorem تطبيق نظرية القيمة المتوسطة في التكامل	(55-58)	367

في التمارين 55–58، جـد القيمة المتوسطة للدالة على الفترة المعطاة.

In exercises 55–58, find the average value of the function on the given interval.

55. $f(x) = x^2 - 1$, $[1, 3]$

56. $f(x) = 2x - 2x^2$, $[0, 1]$

57. $f(x) = \cos x$, $[0, \pi/2]$

58. $f(x) = e^x$, $[0, 2]$

في التمارين من 5 إلى 30، جـــد قيمة التكامل غير المحدود.

In exercises 5–30, evaluate the indicated integral.

5. $\int x^3\sqrt{x^4+3}\,dx$

6. $\int \sqrt{1+10x}\,dx$

7. $\int \frac{\sin x}{\sqrt{\cos x}}\,dx$

8. $\int \sin^3 x\cos x\,dx$

9. $\int t^2\cos t^3\,dt$

10. $\int \sin t(\cos t+3)^{3/4}\,dt$

11. $\int xe^{x^2+1}\,dx$

12. $\int e^x\sqrt{e^x+4}\,dx$

13. $\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx$

14. $\int \frac{\cos(1/x)}{x^2}\,dx$

15. $\int \frac{\sqrt{\ln x}}{x}\,dx$

16. $\int \sec^2 x\sqrt{\tan x}\,dx$

EXAMPLE 9.1 Analyzing the Marginal Cost of Producing a Commercial Product

Suppose that

$$C(x) = 0.02x^2 + 2x + 4000$$

is the total cost (in AED) for a company to produce x units of a certain product. Compute the marginal cost at $x = 100$ and compare this to the actual cost of producing the 100th unit.

Solution The marginal cost function is the derivative of the cost function:

$$C'(x) = 0.04x + 2$$

and so, the marginal cost at $x = 100$ is $C'(100) = 4 + 2 = 6$ AED per unit. On the other hand, the actual cost of producing item number 100 would be $C(100) - C(99)$. (Why?) We have

$$\begin{aligned} C(100) - C(99) &= 200 + 200 + 4000 - (196.02 + 198 + 4000) \\ &= 4400 - 4394.02 = 5.98 \text{ AED}. \end{aligned}$$

Note that this is very close to the marginal cost of AED 6. Also notice that the marginal cost is easier to compute. ■

Another quantity that businesses use to analyze production is **average cost**. You can easily remember the formula for average cost by thinking of an example. If it costs a total of AED 120 to produce 12 items, then the average cost would be AED 10 $\left(\text{AED}\frac{120}{12}\right)$ per item. In general, the total cost is given by $C(x)$ and the number of items by x, so average cost is defined by

$$\overline{C}(x) = \frac{C(x)}{x}.$$

Business managers want to know the level of production that minimizes average cost.

مثال 9.1 تحليل التكلفة الحدية لمنتجات تجارية

على فرض أن

$$C(x) = 0.02x^2 + 2x + 4000$$

هو إجمالي التكلفة (بالدرهم) معينة تنتج x وحدة من منتجات معينة. اوجد قيمة التكلفة الحدية عند $x = 100$ وقارنها بالتكلفة الفعلية لإنتاج 100 وحدة.

الحل دالة التكلفة الحدية هي مشتقة دالة التكلفة:

$$C'(x) = 0.04x + 2$$

وبالتالي، التكلفة الحدية لـ $x = 100$ هي $C'(100) = 4 + 2 = 6$ دراهم لكل وحدة. ومن ناحية أخرى، فإن التكلفة الفعلية للمنتج عدد 100 ستكون $C(100) - C(99)$. (لماذا؟) لدينا

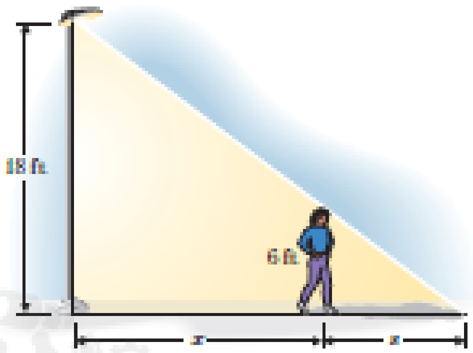
$$\begin{aligned} C(100) - C(99) &= 200 + 200 + 4000 - (196.02 + 198 + 4000) \\ &= 4400 - 4394.02 = 5.98 \text{ دراهم} \end{aligned}$$

لاحظ أن هذا قريب جدًا من التكلفة الحدية البالغة AED 6. لاحظ أيضًا أن التكلفة الحدية سهلة في حسابها. ■

الكمية الاخرى التي تستخدمها الشركات لتحليل الإنتاج هو **متوسط التكلفة**. يمكنك تذكر صيغة متوسط التكلفة بسهولة من خلال التفكير في أي مثال. إذا بلغ إجمالي تكلفة إنتاج 12 منتجًا AED 120. فيكون متوسط التكلفة فأن $\left(\frac{120}{12}\right)$ AED لكل منتجًا. وبشكل عام، يحدد إجمالي التكلفة من خلال $C(x)$ و عدد العناصر من خلال x. وبالتالي يحدد متوسط التكلفة من خلال

$$\overline{C}(x) = \frac{C(x)}{x}$$

يرغب مديرو الشركات في معرفة مستوى الإنتاج الذي يخفض متوسط التكلفة.



Exercise 19

20. Boyle's law for a gas at constant temperature is $PV = c$, where P is pressure, V is volume and c is a constant. Assume that both P and V are functions of time. (a) Show that $P'(t)/V'(t) = -c/V^2$. (b) Solve for P as a function of V. Treating V as an independent variable, compute $P'(V)$. Compare $P'(V)$ and $P'(t)/V'(t)$ from parts (a) and (b).

21. A dock is 6 ft above water. Suppose you stand on the edge of the dock and pull a rope attached to a boat at the constant rate of 2 ft/sec. Assume that the boat remains at water level. At what speed is the boat approaching the dock when it is 20 feet from the dock? 10 feet from the dock? Isn't it surprising that the boat's speed is not constant?

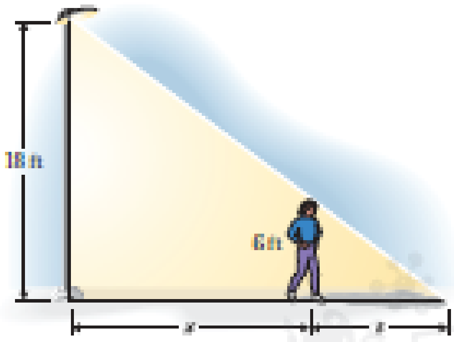
22. Sand is poured into a conical pile with the height of the pile equalling the diameter of the pile. If the sand is poured at a constant rate of 5 m^3/s, at what rate is the height of the pile increasing when the height is 2 meters?

23. The frequency at which a guitar string vibrates (which determines the pitch of the note we hear) is related to the tension T to which the string is tightened, the density ρ of the string and the effective length L of the string by the equation $f = \frac{1}{2L}\sqrt{\frac{T}{\rho}}$. By running his finger along a string, a guitarist can change L by changing the distance between the bridge and his finger. Suppose that $L = \frac{1}{2}$ ft and $\sqrt{\frac{T}{\rho}} = 220$ ft/s so that the units of f are Hertz (cycles per second). If the guitarist's hand slides so that $L'(t) = -4$, find $f'(t)$. At this rate, how long will it take to raise the pitch one octave (that is, double f)?

24. Suppose that you are blowing up a balloon by adding air at the rate of 1 ft^3/s. If the balloon maintains a spherical shape, the volume and radius are related by $V = \frac{4}{3}\pi r^3$. Compare the rate at which the radius is changing when $r = 0.01$ ft versus when $r = 0.1$ ft. Discuss how this matches the experience of a person blowing up a balloon.

25. Water is being pumped into a spherical tank of radius 60 feet at the constant rate of 10 ft^3/sec. (a) Find the rate at which the radius of the top level of water in the tank changes when the tank is half full. (b) Find the height at which the height of the water in the tank changes at the same rate as the radius.

26. Sand is dumped such that the shape of the sandpile remains a cone with height equal to twice the radius. (a) If the sand is dumped at the constant rate of 20 ft^3/sec, find the rate at which the radius is increasing when the height reaches 6 feet.



التمرين 19

20. قانون بويل للغاز في درجة حرارة ثابتة هو $PV = c$ حيث إن P هو ضغط الغاز، و V هو حجم الغاز و c هو ثابت الغازات. على فرض أن كل من P و V هي دوال بالزمن. (a) بيّن أن $P'(t)/V'(t) = -c/V^2$. (b) جــد حلاً لــ P كدالة بالمتغير V. اعتبر أن V متغير مستقل، فاحسب $P'(V)$. قارن بين $P'(V)$ و $P'(t)/V'(t)$ من الجزئين (a) و(b).

21. يرتفع حوض مائي 6 ft من منسوب المياه. على فرض أنك تقف على حافة الحوض وتسحب حبلاً متصلاً بمركب بمعدل ثابت 2 ft/s وان المركب لا تزال على مستوى المياه. فما هي سرعة اقتراب المركب من الحوض عندما يبعد 20 ft من الحوض؟ 10 ft من الحوض؟ أليس من المستغرب أن تكون سرعة المركب ليست ثابتة؟

22. ينسكب الرمل في كومة مخروطية الشكل وارتفاعها يعادل قطرها. إذا انسكب الرمل بمعدل ثابت 5 m^3/s. فما معدل تزايد ارتفاع الكومة عندما يكون الارتفاع مترين؟

23. يرتبط تردد اهتزاز أوتار الجيتار (الذي يحدد طبقة صوت النغمة التي نسمعها) بالتوتر T الذي يشد به الوتر، الكثافة ρ للوتر والطول الفعال ℓ للوتر من خلال المعادلة عند تمرير عازف الجيتار إصبعه على الوتر. $f = \frac{1}{2L}\sqrt{\frac{T}{\rho}}$ فيمكنه تغيير L من خلال تغيير المسافة بين مشط الجيتار وإصبعه على فرض أن $L = \frac{1}{2}$ ft و $\sqrt{\frac{T}{\rho}} = 220$ ft/s ولذلك فإن وحدات f هي الهرتز (دورة في الثانية). إذا انزلقت يد عازف الجيتار حتى أصبحت $L'(t) = -4$. فجــد $f'(t)$ وبهذا المعدل. فما هو الزمن المستغرق لرفع طبقة الصوت أوكتاف واحداً(وهو ضعف f)؟

24. على فرض أنك تملأ بالونة بالهواء بمعدل 1 ft^3/s إذا بقي البالون في شكل كروي، فيرتبط حجمه ونصف قطره بـ $V = \frac{4}{3}\pi r^3$ قارن معدل تغير نصف قطره عندما يكون $r = 0.01$ ft في مقابل عندما يكون $r = 0.1$ ft. ناقش طريقة ارتباط ذلك بخبرة الشخص الذي يملأ البالون.

25. ضُخت مياه إلى خزان كروي نصف قطره 60 ft بمعدل ثابت 10 ft^3/s (a) جــد معدل تغيير نصف قطر أعلى مستوى للمياه في الخزان عندما يمتلئ الخزان إلى النصف. (b) جــد الارتفاع الذي تتغير فيه المياه في الخزان بنفس معدل نصف قطره.

26. افرغ الرمل وشكّل كومة مخروطية بارتفاع يساوي مثلي نصف قطره. (a) إذا افرغ الرمل بمعدل ثابت 20 ft^3/s فجــد المعدل الذي يتزايد به نصف القطر عندما يصل الارتفاع إلى 6 ft

(b) كرر العملية عندما تشكل كومة الرمل زاوية قياسها ثانية 45 في المستوى الأفقي

18	Learn the properties of definite integrals التعرف على خصائص التكامل المحدود	(37-38)	356

في التمرينين 37 و38، فرضاً أنّ $\int_1^3 f(x)\,dx = 3$ و $\int_1^3 g(x)\,dx = -2$ اوجد

In exercises 37 and 38, assume that $\int_1^3 f(x)\,dx = 3$ and $\int_1^3 g(x)\,dx = -2$ and find

37. (a) $\int_1^3 [f(x) + g(x)]\,dx$ (b) $\int_1^3 [2f(x) - g(x)]\,dx$

38. (a) $\int_1^3 [f(x) - g(x)]\,dx$ (b) $\int_1^3 [4g(x) - 3f(x)]\,dx$

19	Learn the Fundamental Theorem of Calculus (Part I) and use it to compute various definite integrals التعرف على النظرية الأساسية الأولى للتفاضل والتكامل وتطبيقها على دوال متنوعة لإيجاد تكاملات محدود	(39-42)	366-367

في التمارين 39–42، جـــد معادلة المماس عند قيمة معطاة لـ x.

In exercises 39–42, find an equation of the tangent line at the given value of x.

39. $y = \int_0^x \sin\sqrt{t^2 + \pi^2}\,dt, x = 0$

40. $y = \int_{-1}^x \ln(t^2 + 2t + 2)\,dt, x = -1$

41. $y = \int_2^x \cos(\pi t^3)\,dt, x = 2$

42. $y = \int_0^x e^{-t^2+1}\,dt, x = 0$

في التمارين من 5 إلى 30، جــد قيمة التكامل غير المحدود.

In exercises 5–30, evaluate the indicated integral.

5. $\int x^3\sqrt{x^4+3}\,dx$

6. $\int \sqrt{1+10x}\,dx$

7. $\int \frac{\sin x}{\sqrt{\cos x}}\,dx$

8. $\int \sin^3 x\cos x\,dx$

9. $\int t^2\cos t^3\,dt$

10. $\int \sin t(\cos t+3)^{3/4}\,dt$

11. $\int xe^{x^2+1}\,dx$

12. $\int e^x\sqrt{e^x+4}\,dx$

13. $\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx$

14. $\int \frac{\cos(1/x)}{x^2}\,dx$

15. $\int \frac{\sqrt{\ln x}}{x}\,dx$

16. $\int \sec^2 x\sqrt{\tan x}\,dx$

17. $\int \frac{1}{\sqrt{u}\,(\sqrt{u}+1)}\,du$

18. $\int \frac{v}{v^2+4}\,dv$

19. $\int \frac{4}{x(\ln x+1)^2}\,dx$

20. $\int \tan 2x\,dx$

21. $\int \frac{(\sin^{-1}x)^3}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$

22. $\int x^2\sec^2 x^3\,dx$

23. (a) $\int \frac{x}{\sqrt{1-x^4}}\,dx$ (b) $\int \frac{x^3}{\sqrt{1-x^4}}\,dx$

24. (a) $\int \frac{x^2}{1+x^6}\,dx$ (b) $\int \frac{x^5}{1+x^6}\,dx$

25. (a) $\int \frac{1+x}{1+x^2}\,dx$ (b) $\int \frac{1+x}{1-x^2}\,dx$

26. (a) $\int \frac{3\sqrt{x}}{1+x^3}\,dx$ (b) $\int \frac{x\sqrt{x}}{1+x^5}\,dx$

27. $\int \frac{2t+3}{t+7}\,dt$

28. $\int \frac{t^2}{\sqrt[3]{t+3}}\,dt$

29. $\int \frac{1}{\sqrt{1+\sqrt{x}}}\,dx$

30. $\int \frac{1}{x\sqrt{x^4-1}}\,dx$

في التمارين من 31 إلى 40، جـــد قيمة التكامل المحدود.

In exercises 31–40, evaluate the definite integral.

31. $\int_0^2 x\sqrt{x^2+1}\,dx$

32. $\int_1^3 x\sin(\pi x^2)\,dx$

33. $\int_{-1}^1 \frac{t}{(t^2+1)^2}\,dt$

34. $\int_0^2 t^2 e^{t^3}\,dt$

35. $\int_0^2 \frac{e^x}{1+e^{2x}}\,dx$

36. $\int_0^2 \frac{e^x}{1+e^x}\,dx$

37. $\int_{\pi/4}^{\pi/2} \cot x\,dx$

38. $\int_1^e \frac{\ln x}{x}\,dx$

39. $\int_1^4 \frac{x-1}{\sqrt{x}}\,dx$

40. $\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\,dx$