تم تحميل هذا الملف من موقع المناهج الإماراتية

ملزمة الوحدة الرابعة تطبيقات التفاضل والتكامل of Application differentiation

تاريخ إضافة الملف على موقع المناهج: 2025-01-24 15:25:31

المزيد من مادة رياضيات:	ملفات ا كتب للمعلم ا كتب للطالب ا اختبارات الكترونية ا اختبارات ا حلول ا عروض بوربوينت ا أوراق عمل منهج انجليزي ا ملخصات وتقارير ا مذكرات وبنوك ا الامتحان النهائي ا للمدرس

التواصل الاجتماعي بحسب الصف الثاني عشر المتقدم

صفحة المناهج الإماراتية على فيسبوك					
المواد على تلغرام	التربية الاسلامية	اللغة العربية	اللغة الانجليزية	الرياضيات	

المزيد من الملفات بحسب الصف الثاني عشر المتقدم والمادة رياضيات في الفصل الثاني

1	ملزمة الوحدة الرابعة تطبيقات التفاضل
2	أوراق عمل وشرح الدرس الرابع الدوال المتزايدة والمتناقصة من الوحدة الرابعة تطبيقات التفاضل
3	أوراق عمل الدرس الثالث القيم العظمى والصغرى من الوحدة الرابعة تطبيقات التفاضل
4	شرح كامل لدرس الأعداد الحرجة مع تدريبات
5	تذكير بأهم قواعد الفصل الأول

Imad Odeh

الرياضيات

MATHEMATICS

2024-2025

Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh

الصف الثاني عشر متقدم

12 Advanced

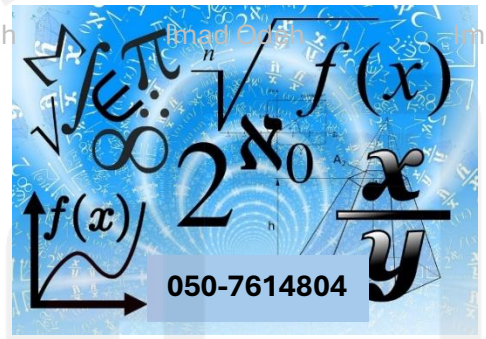
ملخص دروس الفصل الثاني

Teacher الاستاذ

عماد عودة

IMAD ODEH

Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh



اسم الطالب: -

عزيزي الطالب وضعت هذه الملزمة لتساعدك في دراستك علما بان الكتاب المدرسي هو المرجع الرئيسي لنا جميعا

Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh

اطيب التمنيات للجميع

Imad Odeh

Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh

CHAPTER 4

Applications of Differentiation

تطبيقات التفاضل والتكامل

4-3	MAXIMUM AND MINIMUM VALUES	القيم العظمى و القيم الصغرى	4-3
4-4	INCREASING AND DECREASING FUNCTIONS	الدوال المتزايدة والدوال المتناقصة	4-4
4-5	CONCAVITY AND THE SECOND DERIVATIVE TEST	التقعر واختبار المشتقة الثانية	4-5
4-6	OVERVIEW OF CURVE SKETCHING	نظرة عامة على رسم المنحنيات	4-6
4-7	OPTIMIZATION	القيم المثلى	4-7
4-8	RELATED RATES	المعدلات المرتبطة	4-8
4-9	RATES OF CHANGE IN ECONOMICS AND THE SCIENCES	معدلات التغير في الاقتصاد والعلوم	4-9

Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh

Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh

Imad Odeh

Differentiation Rules | قواعد الاشتقاق

Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh

Function $f(x)$	Derivative $f'(x)$	Examples	
		Function $f(x)$	Derivative $f'(x)$
$f(x) = c\,, constant$	$f'(x) = 0$	$f(x) = 3$	$f'(x) = 0$
$f(x) = x^n$	$f'(x) = nx^{n-1}$	$f(x) = x^5$	$f'(x) = 5x^4$
$y = f(x).g(x)$	$\frac{dy}{dx} = f'(x)g(x) + f(x).g'(x)$	$y = (x^2+5)(3x+1)$	$\frac{dy}{dx} = 2x(3x+1) + (x^2+5)(3)$
$y = \frac{f(x)}{g(x)}$	$\frac{dy}{dx} = \frac{f'(x)g(x) - f(x).g'(x)}{(g(x))^2}$	$y = \frac{x^3+1}{5x-2}$	$\frac{dy}{dx} = \frac{3x^2(5x-2) - (x^3+1)(5)}{(5x-2)^2}$
$y = \frac{c}{f(x)}$	$\frac{dy}{dx} = -\frac{cf'(x)}{(f(x))^2}$	$y = \frac{3}{x^2+2}$	$\frac{dy}{dx} = -\frac{3(2x)}{(x^2+2)^2}$
$y = \sqrt{f(x)}$	$\frac{dy}{dx} = \frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}$	$y = \sqrt{5x^2+1}$	$\frac{dy}{dx} = \frac{10x}{2\sqrt{5x^2+1}}$
$y = (f(g(x))$	$\frac{dy}{dx} = f'(g(x)).g'(x)$	$y = (x^3+8)^5$	$\frac{dy}{dx} = 5(x^3+8)^4(3x^2)$

Imad Odeh

Function $f(x)$	Derivative $f'(x)$	Function $f(x)$	Derivative $f'(x)$
$g(x) = f^{-1}(x)$	$g'(x) = \frac{1}{f'(g(x))}$	$y = \cot x$	$\frac{dy}{dx} = -\csc^2 x$
$y = e^{f(x)}$	$\frac{dy}{dx} = f'(x).e^{f(x)}$	$y = \csc x$	$\frac{dy}{dx} = -\csc x \cot x$
$y = \ln\lvert f(x)\rvert$	$\frac{dy}{dx} = \frac{f'(x)}{f(x)}$	$y = \sin^{-1} x$	$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$y = a^{f(x)}$	$\frac{dy}{dx} = f'(x)a^{f(x)} \ln a$	$y = \cos^{-1} x$	$\frac{dy}{dx} = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$
$y = sin\, x$	$\frac{dy}{dx} = cos\, x$	$y = \tan^{-1} x$	$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{1+x^2}$
$y = \cos x$	$\frac{dy}{dx} = -\sin x$	$y = \cot^{-1} x$	$\frac{dy}{dx} = \frac{-1}{1+x^2}$
$y = \tan x$	$\frac{dy}{dx} = \sec^2 x$	$y = \sec^{-1} x$	$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\lvert x\rvert\sqrt{x^2-1}}$
$y = \sec x$	$\frac{dy}{dx} = \sec x \tan x$	$y = \csc^{-1} x$	$\frac{dy}{dx} = \frac{-1}{\lvert x\rvert\sqrt{x^2-1}}$

Imad Odeh

CHAPTER 4

Applications of Differentiation

تطبيقات الاشتقاق

Lesson 4-3

الدرس 4-3

Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh

القيم العظمى والقيم الصغرى
MAXIMUM AND MINIMUM VALUES

DEFINITION 3.1

For a function f defined on a set S of real numbers and a number $c \in S$,

(i) $f(c)$ is the **absolute maximum** of f on S if $f(c) \geq f(x)$ for all $x \in S$ and
(ii) $f(c)$ is the **absolute minimum** of f on S if $f(c) \leq f(x)$ for all $x \in S$.

An absolute maximum or an absolute minimum is referred to as an **absolute extremum.** (The plural form of extremum is **extrema.**)

تعريف 3-1

لاي دالة $f(x)$ معرفة على الفترة S من مجموعة الاعداد الحقيقة ولأي عدد $c \in S$

1) فان $f(c)$ هي قيمة مطلقة عظمى للدالة f على الفترة S إذا كان $f(c) \geq f(x)\ for\ all\ x \in S$

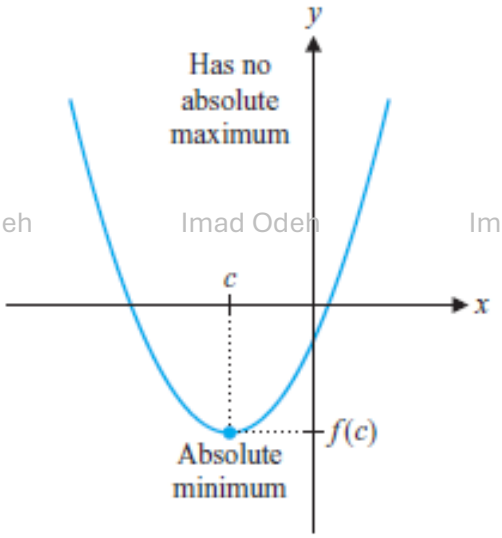
2) فان $f(c)$ هي قيمة مطلقة صغرى للدالة f على الفترة S إذا كان $f(c) \leq f(x)\ for\ all\ x \in S$

An absolute maximum or an absolute minimum is referred to as an absolute extremum. (The plural form of extremum is extrema.)

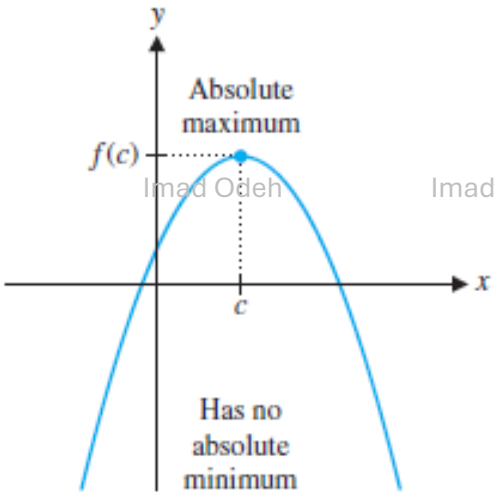
يُشار إلى القيمة العظمى المطلقة أو القيمة الصغرى المطلقة باسم القيم القصوى المطلقة.
(الجمع من extremum هو extrema).

Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh

Imad Odeh



$f(c)$ صغرى مطلقة
لا يوجد عظمى مطلقة



$f(c)$ عظمى مطلقة
لا يوجد صغرى مطلقة

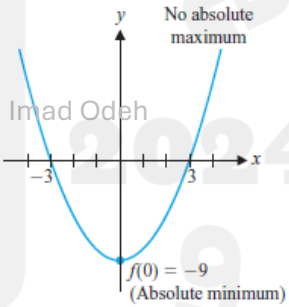
Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh

EXAMPLE 4.1 — مثال 4-1

(a) Locate any **absolute extrema** of — حدد أي قيمة قصوى مطلقة ل

$$f(x) = x^2 - 9 \text{ on the interval } (-\infty, \infty).$$

فترة مفتوحة يوجد قيمة صغرى مطلقة $f(0) = -9$
لا يوجد قيمة عظمى مطلقة

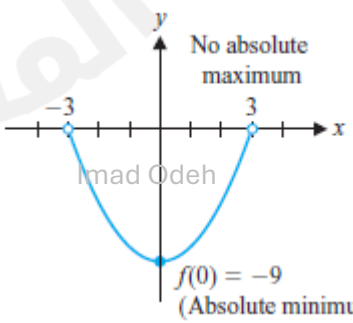


Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh

(b) Locate any **absolute extrema** of — حدد أي قيمة قصوى مطلقة ل

$$f(x) = x^2 - 9 \text{ on the interval } (-3, 3).$$

فترة مفتوحة يوجد قيمة صغرى مطلقة $f(0) = -9$
لا يوجد قيمة عظمى مطلقة

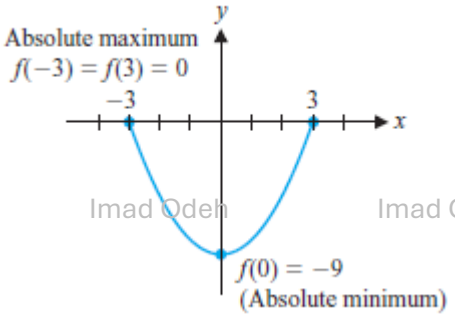


Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh

(c) Locate any **absolute extrema** of $f(x) = x^2 - 9$ on the interval $[-3, 3]$.

حدد أي قيمة قصوى مطلقة ل

فترة مغلقة يوجد
قيمة صغرى مطلقة $f(0) = -9$
قيمة عظمى مطلقة $f(-3) = f(3) = 0$



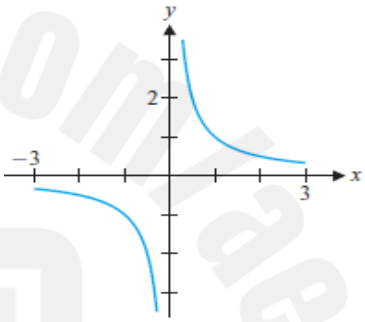
Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh

EXAMPLE 4.2 مثال 4-2

Locate any **absolute extrema** of $f(x) = \frac{1}{x}$ on $[-3, 0) \cup (0, 3]$.

حدد أي قيمة قصوى مطلقة ل

من الرسم يلاحظ ان الدالة غير متصلة ولا يوجد لها قيمة قصوى مطلقة
حيث يلاحظ انها تذهب الى سالب مالانهاية عندما تقترب الدالة من الصفر من اليسار والى ما لانهاية عندما تقترب من الصفر من اليمين



THEOREM 3.1 (Extreme Value Theorem)

A continuous function f defined on a *closed, bounded* interval $[a, b]$ attains both an absolute maximum and an absolute minimum on that interval.

نظرية 3.1

لاي دالة متصلة ومعرفة على فترة مغلقة [a , b] يوجد قيمة صغرى مطلقة وقيمة عظمى مطلقة

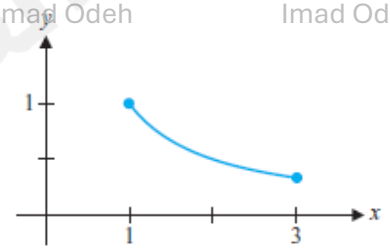
EXAMPLE 4.3 مثال 4-3

Locate any **absolute extrema** of $f(x) = \frac{1}{x}$ on the interval $[1, 3]$.

حدد أي قيمة قصوى مطلقة ل

Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh

دالة متصلة على دالة مغلقة يوجد
قيمة صغرى مطلقة $f(3) = \frac{1}{3}$
قيمة عظمى مطلقة $f(1) = 1$



Imad Odeh

DEFINITION 3.2

(i) $f(c)$ is a **local maximum** of f if $f(c) \geq f(x)$ for all x in some *open* interval containing c.

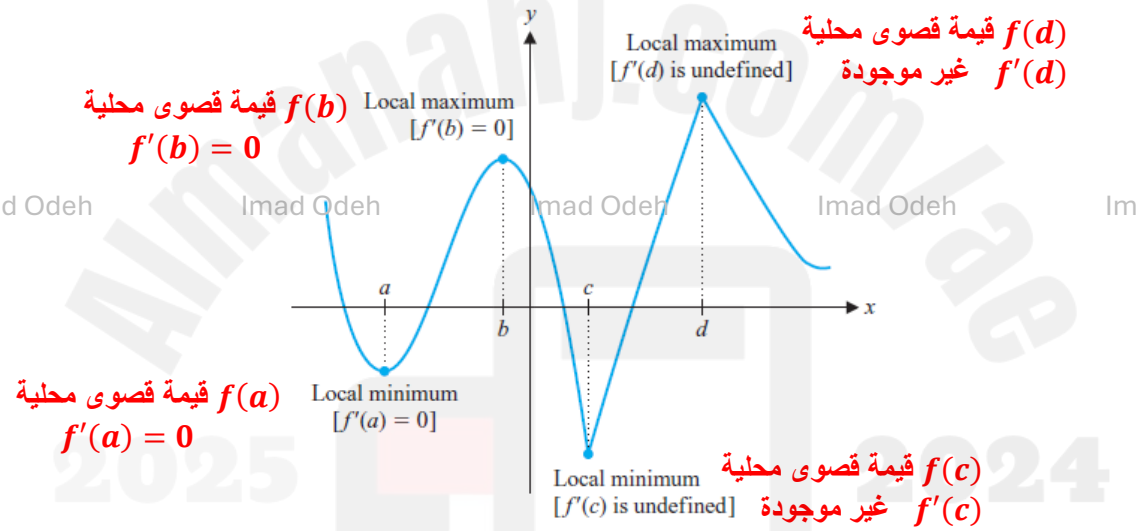
(ii) $f(c)$ is a **local minimum** of f if $f(c) \leq f(x)$ for all x in some *open* interval containing c.

In either case, we call $f(c)$ a **local extremum** of f.

تعريف 3.2

تكون $f(c)$ قيمة عظمى محلية إذا وجدت فترة مفتوحة تحتوي c بحيث يكون $f(c) \geq f(x)$ لجميع قيم x في هذه الفترة

وتكون $f(c)$ قيمة صغرى محلية إذا وجدت فترة مفتوحة تحتوي c بحيث يكون $f(c) \leq f(x)$ لجميع قيم x في هذه الفترة



REMARK 3.1

Local maxima and minima (the plural forms of maximum and minimum, respectively) are sometimes referred to as relative maxima and minima, respectively.

ملاحظة

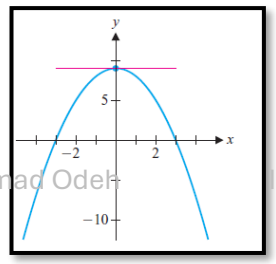
يُشار أحيانًا إلى القيم القصوى والدنيا المحلية باسم القيم القصوى والدنيا النسبية على التوالي.

EXAMPLE 4.4 **مثال 4-4**

Locate any **local extrema** for حدد أي قيمة قصوى محلية ل

$$f(x) = 9 - x^2$$

and describe the behavior of the derivative at the local extremum. صف سلوك المشتقة عند القيمة القصوى المحلية



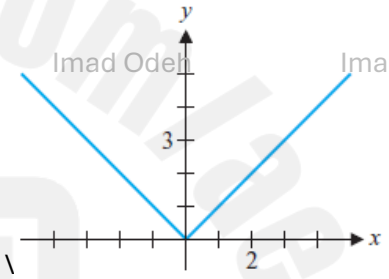
Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh

EXAMPLE 4.5 **مثال 4-5**

Locate any **local extrema** for حدد أي قيمة قصوى محلية ل

$$f(x) = |x|$$

and describe the behavior of the derivative at the local extremum. صف سلوك المشتقة عند القيمة القصوى المحلية



Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh

DEFINITION 3.3

A number c in the domain of a function f is called a **critical number** of f if $f'(c) = 0$ or $f'(c)$ is undefined.

Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh

تعريف 3.3

يكون العدد C في مجال الدالة $f(x)$ نقطة حرجة للدالة $f(x)$ إذا كان

$f'(c) = 0$ or $f'(c)$ غير موجودة

THEOREM 3.2 (Fermat's Theorem)

Suppose that $f(c)$ is a local extremum (local maximum or local minimum). Then c must be a critical number of f.

نظرية فيرمات

إذا كانت $f(c)$ هي قيمة قصوى محلية للدالة $f(x)$ فان c هي نقطة حرجة والعكس غير صحيح

Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh

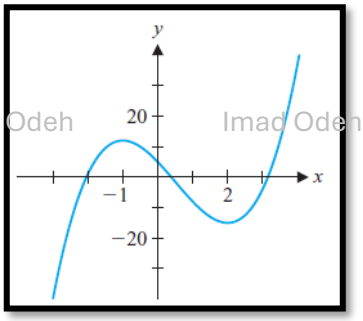
Imad Odeh

EXAMPLE 4.6 **مثال 4-6**

Find the critical numbers and local extrema of

اوجد النقاط الحرجة ل

$$f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 5.$$



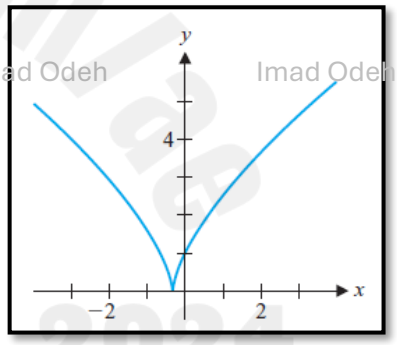
Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh

EXAMPLE 4.7 **مثال 4-7**

Find the critical numbers and local extrema of

اوجد النقاط الحرجة ل

$$f(x) = (3x + 1)^{\frac{2}{3}}.$$



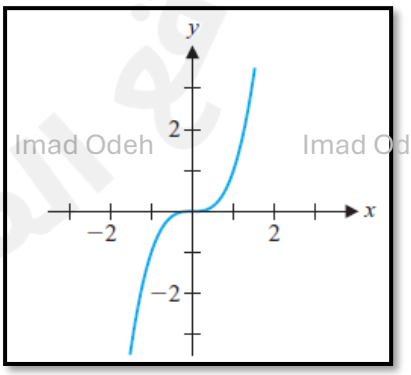
Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh

EXAMPLE 4.8 **مثال 4-8**

Find the critical numbers and local extrema of

اوجد النقاط الحرجة ل

$$f(x) = x^3.$$



Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh

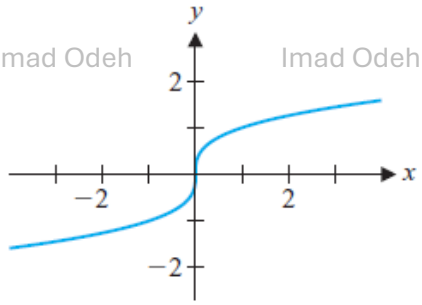
Imad Odeh

EXAMPLE 4.9 **مثال 4-9**

Find the critical numbers and local extrema of اوجد النقاط الحرجة ل

$$f(x) = x^{\frac{1}{3}}.$$

Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh



EXAMPLE 4.10 **مثال 4-10**

Find the critical numbers and local extrema of اوجد النقاط الحرجة ل

$$f(x) = \frac{2x^2}{x+2}$$

Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh

THEOREM 3.3

Suppose that f is continuous on the closed interval $[a, b]$. Then, each absolute extremum of f must occur at an endpoint (a or b) or at a critical number.

نظرية 3.3

إذا اكانت الدالة f متصلة على الفترة المغلقة $[a, b]$ فان القيم **القصوى المطلقة** يجب ان تقع عن **أطراف الفترة** او عند **النقاط الحرجة**

Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh

Imad Odeh

REMARK 3.4

Theorem 3.3 gives us a simple procedure for finding the absolute extrema of a continuous function on a closed, bounded interval:

1. Find all critical numbers in the interval and compute function values at these points.
2. Compute function values at the endpoints.
3. The largest of these function values is the absolute maximum and the smallest of these function values is the absolute minimum.

لإيجاد القيم القصوى المطلقة للدالة متصلة على فترة مغلقة

1) اوجد جميع الاعداد الحرجة
2) احسب قيمة الدالة عند الاعداد الحرجة وعند أطراف الفترة
3) أكبر قيمة تكون قيمة عظمى مطلقة وأصغر قيمة تكون صغرى مطلقة

EXAMPLE 4.11 **مثال 4-11**

Find the absolute extrema of اوجد القيم القصوى المطلقة

$$f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 5 \text{ on the interval } [-2, 4].$$

Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh
Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh
Imad Odeh

EXERCISES 3.3 تمارين

Find all critical numbers by hand. Determine whether the critical number represents a local maximum, local minimum or neither.

اوجد جميع النقاط الحرجة ثم حدد اين منها قيمة عظمى محلية واي منها قيمة صغرى محلية واي منها ليست عظمى او صغرى

$(3a)\ f\ (x)\ =\ x^2\ +5x\ -1$

$(3b)\ f\ (x)\ =\ -x^2\ +4x\ +2$

$(4a)\ f\ (x)\ =\ x^3\ -3x\ +1$

$(4b)\ f\ (x)\ =\ -x^3\ +3x^2\ +2$

$(5a)\ f\ (x)\ =\ x^3\ -\ 3x^2\ +\ 6x$

$(5b)\ f\ (x)\ =\ -\ x^3\ +\ 3x^2\ -\ 3x$

Imad Odeh
Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh
Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh
Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh

Find all critical numbers by hand. Determine whether the critical number represents a local maximum, local minimum or neither.

اوجد جميع النقاط الحرجة ثم حدد اين منها قيمة عظمى محلية واي منها قيمة صغرى محلية واي منها ليست عظمى او صغرى

$(6a) f(x) = x^4 - 2x^2 + 1$

$(6b) f(x) = x^4 - 3x^3 + 2$

$7. f(x) = x^4 - 3x^3 + 2$

$(8) f(x) = x^4 + 6x^2 - 2$

$11. f(x) = \sin x \cos x \ , [0 , \pi]$

$12. f(x) = \sqrt{3} \sin x + \cos x$

Imad Odeh

Find all critical numbers by hand. Determine whether the critical number represents a local maximum, local minimum or neither.

اوجد جميع النقاط الحرجة ثم حدد اين منها قيمة عظمى محلية واي منها قيمة صغرى محلية واي منها ليست عظمى او صغرى

19. $f\ (x) = 2x\sqrt{x+1}$

20. $f\ (x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$

16. $f\ (x) = xe^{-2x}$

21. $f\ (x) = |x^2 - 1|$

23. $f\ (x) = f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x - 1, & x < 0 \\ x^2 - 4x + 3, & x \geq 0 \end{cases}$

Imad Odeh
Imad Odeh
Imad Odeh
Imad Odeh
Imad Odeh
Almanahj.com/ae
2025
2024
منهج الإمارات

Find the absolute extrema of the given function on each indicated interval.

اوجد القيم القصوى المطلقة ل

25. $f(x) = x^3 - 3x + 1$

a) [0,2]

b) [-3,2]

26. $f(x) = x^4 - 8x^2 + 2$

a) $[-3,1]$

b) $[-1,3]$

27. $f(x) = x^{\frac{2}{3}}$

a) $[-4,-2]$

b) $[-1,3]$

Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh

Find the absolute extrema of the given function on each indicated interval.

اوجد القيم القصوى المطلقة ل

28. $f(x) = \sin x + \cos x$

a) $[0,2\pi]$

b) $[\frac{\pi}{2}, \pi]$

29. $f(x) = e^{-x^2}$

a) $[0,2]$

b) $[-3,2]$

30. $f(x) = x^2 e^{-4x}$

a) $[-2,0]$

b) $[0,4]$

Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh
Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh
Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh
Imad Odeh

Find the absolute extrema of the given function on each indicated interval.

اوجد القيم القصوى المطلقة ل

31. $f\ (x) = \frac{3x^2}{x-3}$

a) $[-2,2]$

b) $[2,8]$

32. $\boldsymbol{f\ (x) = \tan^{-1}(x^2)}$

a) $[0,1]$

b) $[-3,4]$

33. $f\ (x) = \frac{x}{x^2+1}$

a) $[0,2]$

b) $[-3,4]$

Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh

Find the absolute extrema of the given function on each indicated interval.

اوجد القيم القصوى المطلقة ل

34. $f\ (x) = \frac{3x}{x^2+16}$

a) [0,2]

b) [0,6]

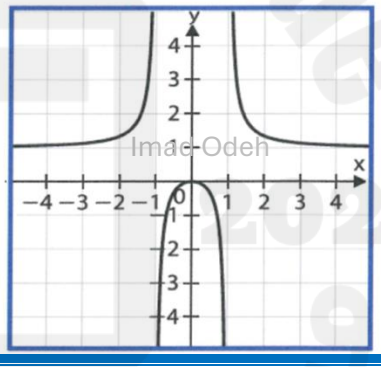
Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh

أسئلة سنوات سابقة

Q11 Find the local minimum of the function where $f(x)$ is graphically represented below.

س11 استخدم الرسم البياني لتحديد القيم المطلقة للدالة في الفترة المعطاة

$$f(x) = \frac{x^2}{x^2-1}\ , (-1, 1)$$



Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh

Q1 Find the x −coordinate of the local maximum of

س1 اوجد احداثيات x للقيمة العظمى المحلية ل

$$y = \frac{x}{1+x^3}$$

Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh

Imad Odeh

Q2 Find the x −coordinate of the local maximum of

س2 اوجد احداثيات x للقيمة العظمى المحلية ل

$$f(x) = x^2e^{-x}$$

Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh

Q3 Find the absolute extrema of

س3 اوجد القيم القصوى المطلقة ل

$$f(x) = x^3 - 12x + 10 \text{on the interval } [0,3]$$

Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh

Q4 Find the absolute extrema of

س4 اوجد القيم القصوى المطلقة ل

$$f(x) = e^{x^2} \text{ on the interval } [0,2]$$

Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh

Imad Odeh

Q5 Find the absolute extrema of the given function on the indicated interval.

س5 أوجد القيم القصوى المطلقة للدالة المعطاة على الفترة المشار إليها.

$$f(x) = \sqrt{x^3 - 3x^2 + 2x}\ , [-1,3\ ]$$

Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh

Q6 Find the absolute extrema of the given function on the indicated interval.

س6 أوجد القيم القصوى المطلقة للدالة المعطاة على الفترة المشار إليها.

$$f(x) = x^2 e^{-x}\ , [-1,4\ ]$$

Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh

Q7 Find all critical points of

س7 اوجد جميع الاعداد الحرجة ل

$$f(x) = x^4 + 3x^2 + 2$$

Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh

Q8 Find all critical points of

س8 اوجد جميع الاعداد الحرجة ل

$$f(x) = x^4 - 8x^2 + 7$$

Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh

Imad Odeh

Q9 Find all critical points of اوجد جميع الاعداد الحرجة ل 9س

$$f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 1$$

Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh

Q10 Find all critical points of اوجد جميع الاعداد الحرجة ل 10س

$$f(x) = x^3 - 3x + 1$$

Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh

Q11 Find all critical points of اوجد جميع الاعداد الحرجة ل 11س

$$f(x) = -9x^2 - 12x - 6$$

Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh

Imad Odeh

Q12 Find value of k such that the function $f(x)$ has a local extremum value at $x = 2$

س12 اوجد قيمة k والتي تجعل للدالة $f(x)$ قيمه قصوى محلية عند $x = 2$

$$f(x) = x^3 + kx + 5$$

Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh

Q13 Find value of a, b such that the function $f(x)$ has a local extremum value at $f(-1) = 7$

س13 اوجد قيمة a, b والتي تجعل للدالة $f(x)$ قيمه قصوى محلية هي $f(-1) = 7$

$$f(x) = ax^3 + bx + 3$$

Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh

Imad Odeh

Lesson 3.4 الدرس
تزايد وتناقص دالة
INCREASING AND DECREASING FUNCTIONS

DEFINITION 4.1

A function f is **increasing** on an interval I if for every $x_1, x_2 \in I$ with $x_1 < x_2$, $f(x_1) < f(x_2)$ [i.e., $f(x)$ gets larger as x gets larger].

A function f is **decreasing** on the interval I if for every $x_1, x_2 \in I$ with $x_1 < x_2$, $f(x_1) > f(x_2)$ [i.e., $f(x)$ gets smaller as x gets larger].

Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh

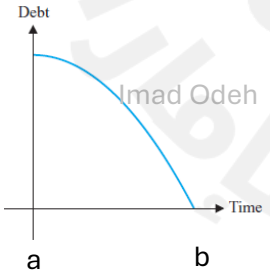
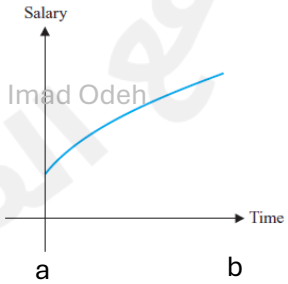
THEOREM 4.1

Suppose that f is differentiable on an interval I.

(i) If $f'(x) > 0$ for all $x \in I$, then f is increasing on I.
(ii) If $f'(x) < 0$ for all $x \in I$, then f is decreasing on I.

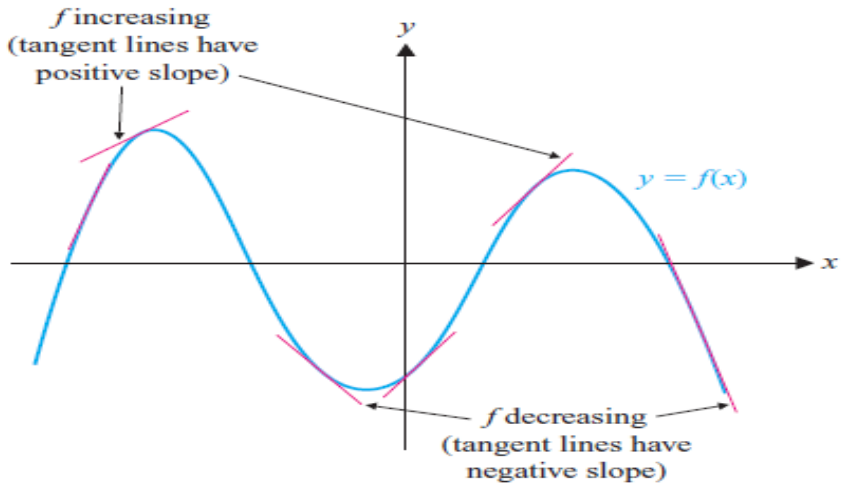
Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh

التزايد والتناقص واشارة المشتقة الأولى
Increasing and decreasing and first derivative

$f'(x) < 0, x \in (a,b)$	$f'(x) > 0, \in (a,b)$
$f(x)$ decreasing متناقصة على الفترة (a,b)	$f(x)$ increasing متزايدة على الفترة (a,b)
	

Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh

Imad Odeh



Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh

THEOREM 4.2 (First Derivative Test)

Suppose that f is continuous on the interval $[a, b]$ and $c \in (a, b)$ is a critical number.

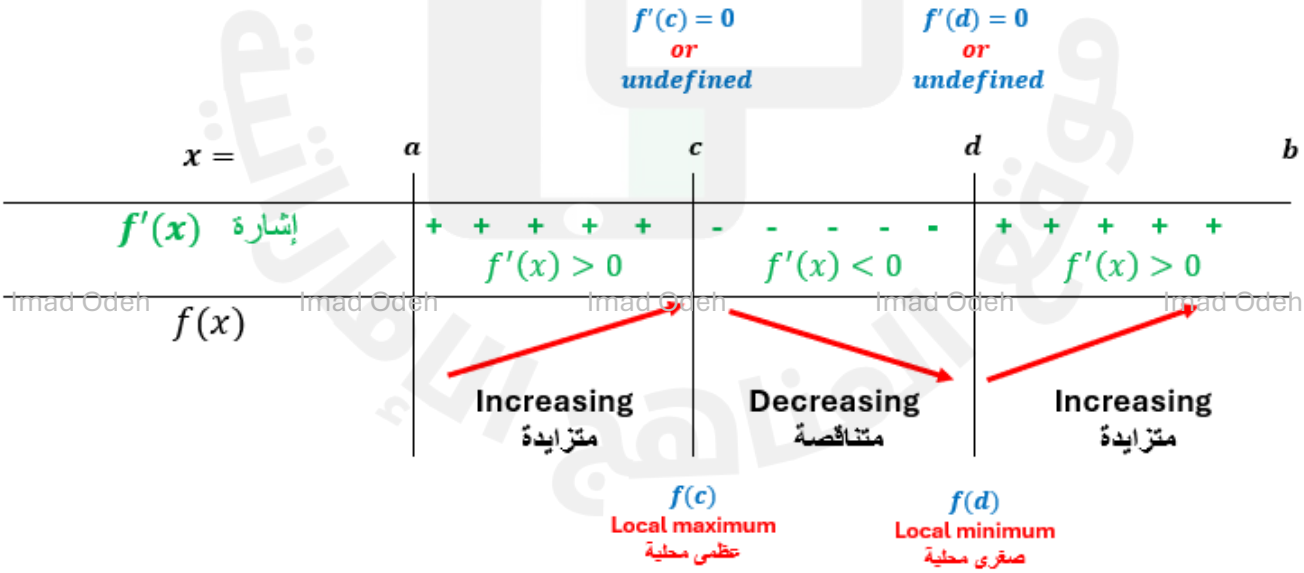
(i) If $f'(x) > 0$ for all $x \in (a, c)$ and $f'(x) < 0$ for all $x \in (c, b)$ (i.e., f changes from increasing to decreasing at c), then $f(c)$ is a local maximum.

(ii) If $f'(x) < 0$ for all $x \in (a, c)$ and $f'(x) > 0$ for all $x \in (c, b)$ (i.e., f changes from decreasing to increasing at c), then $f(c)$ is a local minimum.

(iii) If $f'(x)$ has the *same* sign on (a, c) and (c, b), then $f(c)$ is *not* a local extremum.

اختبار المشتقة الأولى
First derivative test

Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh



Increasing متزايدة for all $x \in (a, c) \cup (d, b)$

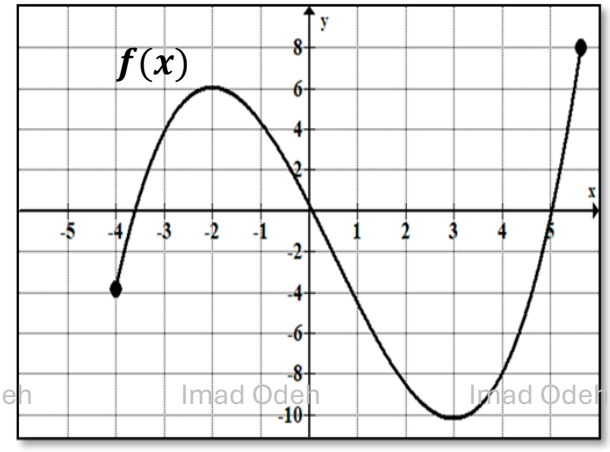
decreasing متناقصة for all $x \in (c, d)$

Imad Odeh

EXAMPLE مثال

Use the graph to answer اعتمد على الرسم التالي للإجابة عما يليه

1) Absolute maximum
القيمة العظمى المطلقة .....
2) Absolute minimum
القيمة الصغرى المطلقة.....
3) Local maximum
القيمة العظمى المحلية.....
4) Local minimum
القيمة الصغرى المحلية .....
5) Increasing interval(s)
فترات التزايد .....
6) Decreasing interval(s)
فترات التناقص .....



Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh

EXAMPLE 4.1 مثال 4-1

Find the intervals where the function is increasing and decreasing. Use this information to determine all local extrema

حدد فترات التزايد وفترات التناقص ثم حدد جميع القيم القصوى المحلية وبين نوعها

$$f\ (x)\ =\ 2x^3 + 9x^2 - 24x - 10$$

Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh

EXAMPLE 4.2 مثال 4-2

Find the intervals where the function is increasing and decreasing. Use this information to determine all local extrema

حدد فترات التزايد وفترات التناقص ثم حدد جميع القيم القصوى المحلية وبين نوعها

$$f\ (x)\ =\ 3x^4 + 40x^3 - 0.06x^2 - 1.2x$$

Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh

Imad Odeh

EXAMPLE 4.4
Find the intervals where the function is increasing and decreasing. Use this information to determine all local extrema

مثال 4-4
حدد فترات التزايد وفترات التناقص ثم حدد جميع القيم القصوى المحلية وبين نوعها

$$f(x) = x^{\frac{5}{3}} - 3x^{\frac{2}{3}}.$$

Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh

EXERCISES 4-4

Find the intervals where the function is increasing and decreasing. Use this information to determine all local extrema

حدد فترات التزايد وفترات التناقص ثم حدد جميع القيم القصوى المحلية وبين نوعها

Q1 $y = x^3 - 3x + 2$

Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh

Q2 $y = x^3 + 2x^2 + 1$

Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh

Imad Odeh

Find the intervals where the function is increasing and decreasing. Use this information to determine all local extrema

حدد فترات التزايد وفترات التناقص ثم حدد جميع القيم القصوى المحلية وبين نوعها

Q3 $y = x^4 - 8x^2 + 1$

Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh

Q4 $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 1$

Q5 $y = (x + 1)^{\frac{2}{3}}$

Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh

Imad Odeh

Find the intervals where the function is increasing and decreasing. Use this information to determine all local extrema

حدد فترات التزايد وفترات التناقص ثم حدد جميع القيم القصوى المحلية وبين نوعها

Q6

$$y = (x - 1)^{\frac{1}{3}}$$

Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh

Q7

$$y = \sin x + \cos x$$

Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh

Q8

$$y = \sin^2 x$$

Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh

Imad Odeh

Find the intervals where the function is increasing and decreasing. Use this information to determine all local extrema

حدد فترات التزايد وفترات التناقص ثم حدد جميع القيم القصوى المحلية وبين نوعها

Q9 $y = e^{x^2-1}$

Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh

Q10 $y = \ln(x^2 - 1)$

Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh

Find all critical numbers and use the First Derivative Test to classify each as the location of a local maximum, local minimum or neither.

اوجد جميع النقاط الحرجة ثم استخدم اختبار المشتقة الأولى لتحديد نوع كل منها

Q11 $y = x^4 + 4x^3 - 2$

Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh

Imad Odeh

Find all critical numbers and use the First Derivative Test to classify each as the location of a local maximum, local minimum or neither.

اوجد جميع النقاط الحرجة ثم استخدم اختبار المشتقة الأولى لتحديد نوع كل منها

Q12 $y = x^5 - 5x^2 + 1$

Q13 $y = xe^{-x^2}$

Q14 $y = x^2e^{-x}$

Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh

Find all critical numbers and use the First Derivative Test to classify each as the location of a local maximum, local minimum or neither.

اوجد جميع النقاط الحرجة ثم استخدم اختبار المشتقة الأولى لتحديد نوع كل منها

Q15 $$y = tan^{-1}(x^2)$$

Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh

Q16 $$y = sin^{-1}\left(1 - \frac{1}{x^2}\right)$$

Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh

Q17 $$y = \frac{x}{1 + x^3}$$

Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh

Imad Odeh

Find all critical numbers and use the First Derivative Test to classify each as the location of a local maximum, local minimum or neither.

اوجد جميع النقاط الحرجة ثم استخدم اختبار المشتقة الأولى لتحديد نوع كل منها

Q18

$$y = \frac{x}{1 + x^4}$$

Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh

Q19

$$y = \sqrt{x^3 + 3x^2}$$

Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh

Q20

$$y = x^{\frac{4}{3}} + 4x^{\frac{1}{3}}$$

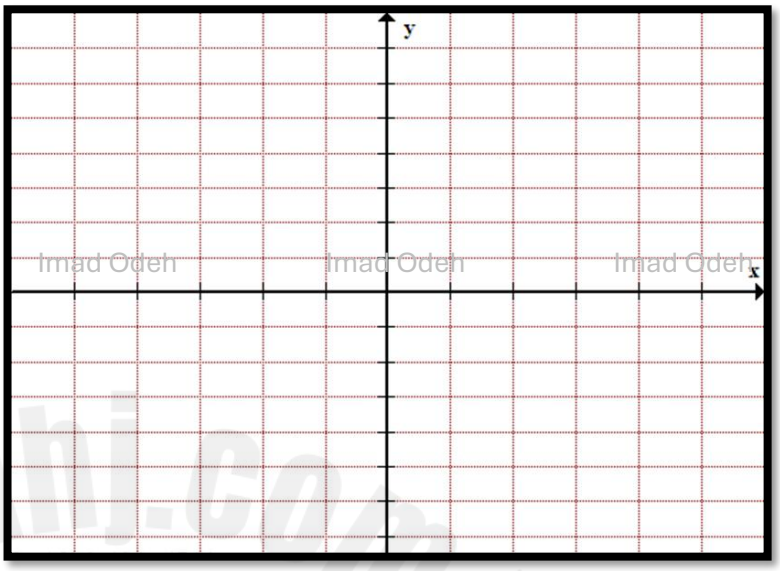
Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh

Imad Odeh

Q27 sketch a graph of a function with the given properties.

س27 ارسم بيان الدالة التي لها الخواص التالية

$$f(0) = 1, f(2) = 5, f'(x) < 0 \; for \; x < 0 \; and \; x > 2,$$
$$f'(x) > 0 \; for \; 0 < x < 2.$$

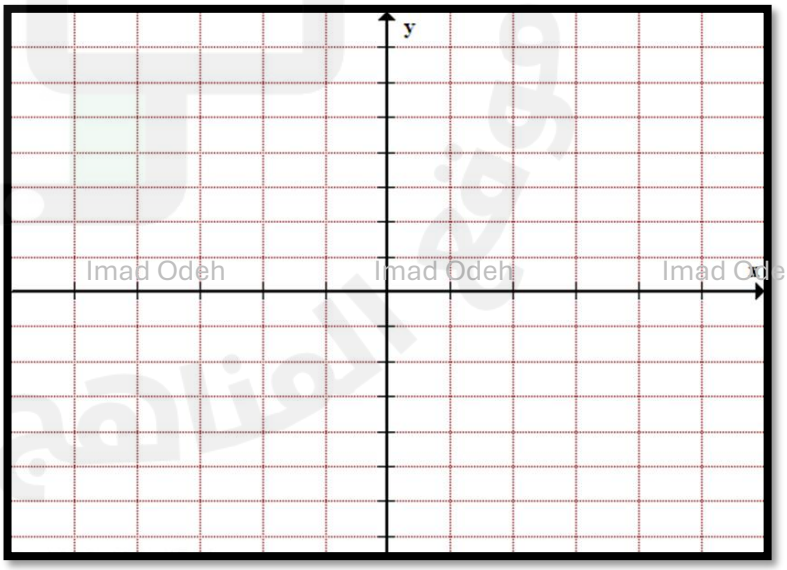


Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh

Q29 sketch a graph of a function with the given properties.

س27 ارسم بيان الدالة التي لها الخواص التالية

$$f\,(3) = 0, f'(x) < 0 \; for \; x < 0 \; and \; x > 3, f'(x) > 0 \; for$$
$$0 < x < 3, f'(3) = 0, f(0) \; and \; f'(0) \; do \; not \; exist.$$

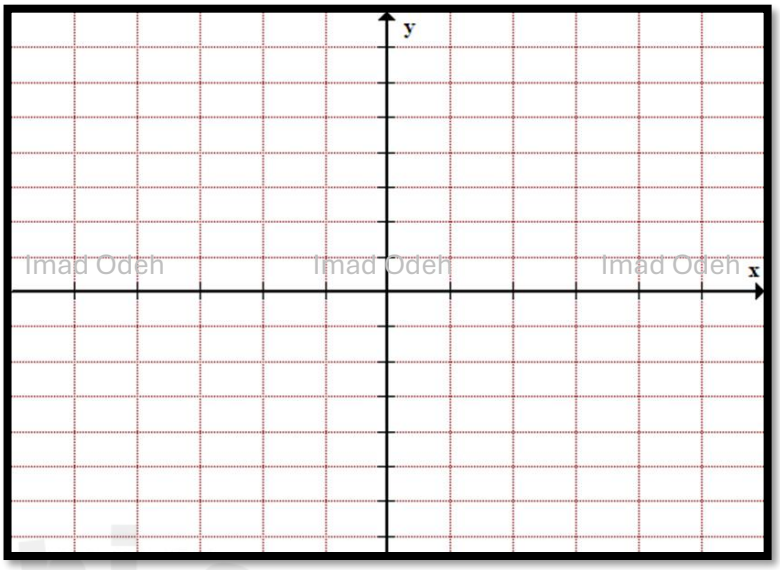


Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh

Imad Odeh

Q44 Assume that f is an increasing function with inverse function f^{-1}. Show that f^{-1} is also an increasing function.

س44 افرض ان الدالة f متزايدة ولها دالة معكوس هي f^{-1} بين ان الدالة f^{-1} هي دالة متزايدة أيضا



Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh

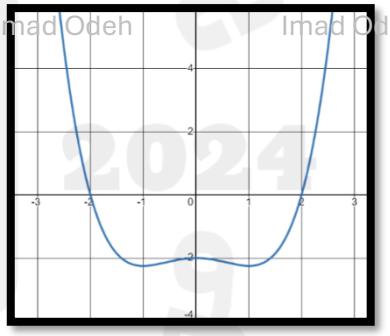
أسئلة سنوات سابقة واسئلة أخرى

Q1 Find the local minimum of the function where $f(x)$ is graphically represented below.

س1 اوجد القيم الصغرى المحلية الدالة $f(x)$ والموضحة بيانيا

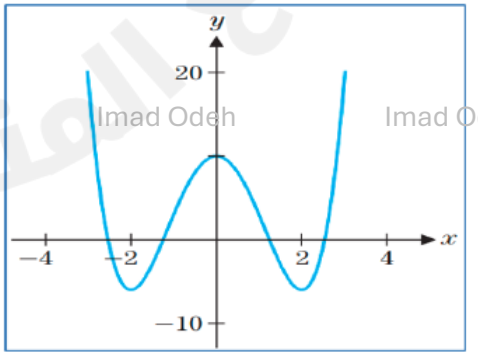
$$f(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{2}x^2 - 2$$

Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh



Q2 Find the intervals where the function $f(x)$ is increasing

س2 اوجد الفترات التي تكون فيها الدالة $f(x)$ متزايدة

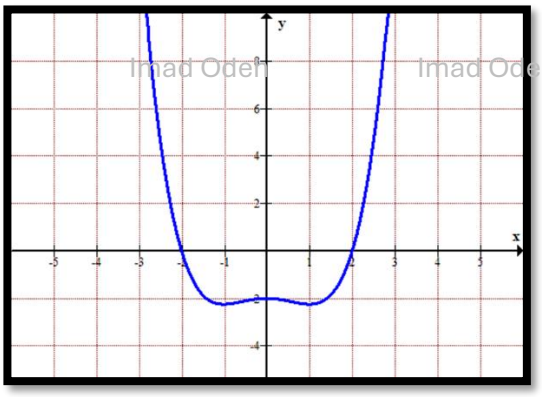


Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh

Q3 Find the intervals where the function $f(x)$ is increasing

س3 اوجد الفترات التي تكون فيها الدالة $f(x)$ متزايدة

$$f(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{2}x^2 - 2$$



Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh

Q4 Find the intervals where the function $g(x)$ is increasing

س4 اوجد الفترات التي تكون فيها الدالة $g(x)$ متزايدة

$$g(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 - 70x + 5\,,$$

Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh

Q5 Find the intervals where the function $f(x)$ is decreasing

س5 اوجد الفترات التي تكون فيها الدالة $f(x)$ متناقصة

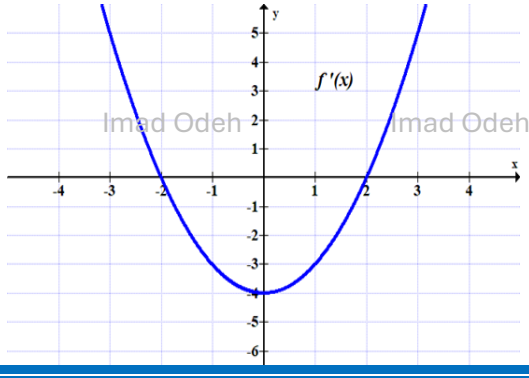
$$f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 1\,,$$

Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh

Imad Odeh

Q6 The graph represents $f'(x)$ determine where $f(x)$ is decreasing

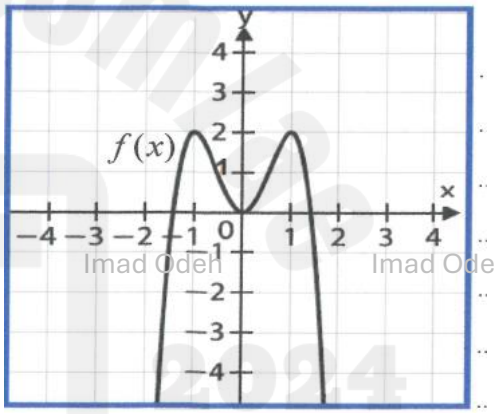
س6 **الرسم الموضح ادناه يمثل بيان $f'(x)$** حدد الفترات تكون عندها الدالة $f(x)$ متناقصة



Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh

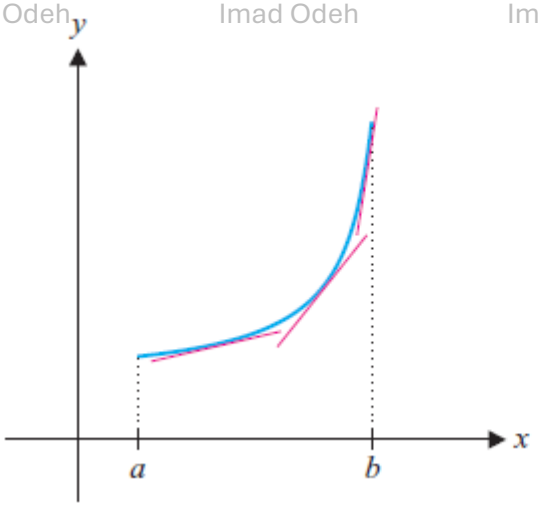
Q7 The graph represents $f'(x)$ determine where $f(x)$ is decreasing

س7 الرسم الموضح ادناه يمثل بيان $f(x)$ حدد الفترات تكون عندها الدالة $f(x)$ متناقصة والفترات التي تكون متزايدة

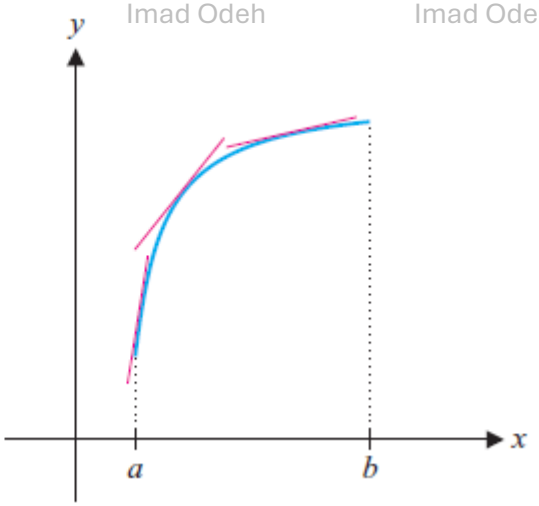


Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh
Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh
Imad Odeh

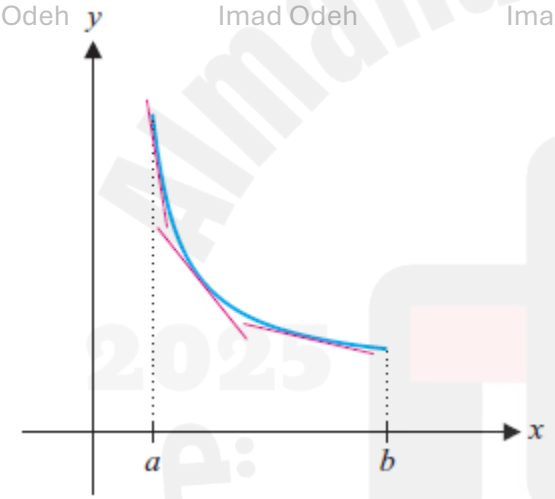
4.5 CONCAVITY AND THE SECOND DERIVATIVE TEST



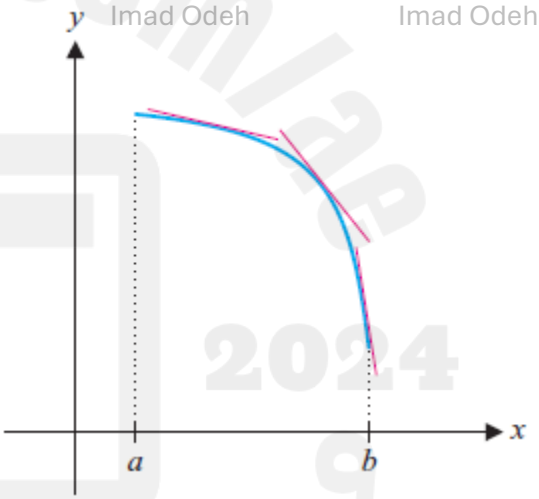
Concave up, increasnig
مقعر لاعلى , متزايدة



Concave down, increasing
مقعر لاسفل, متزايدة



Concave up, decreasnig
مقعر لاعلى , متناقصة



Concave down, decreasing
مقعر لاسفل, متناقصة

DEFINITION 5.1

For a function f that is differentiable on an interval I, the graph of f is

(i) **concave up** on I if f' is increasing on I or
(ii) **concave down** on I if f' is decreasing on I.

THEOREM 5.1

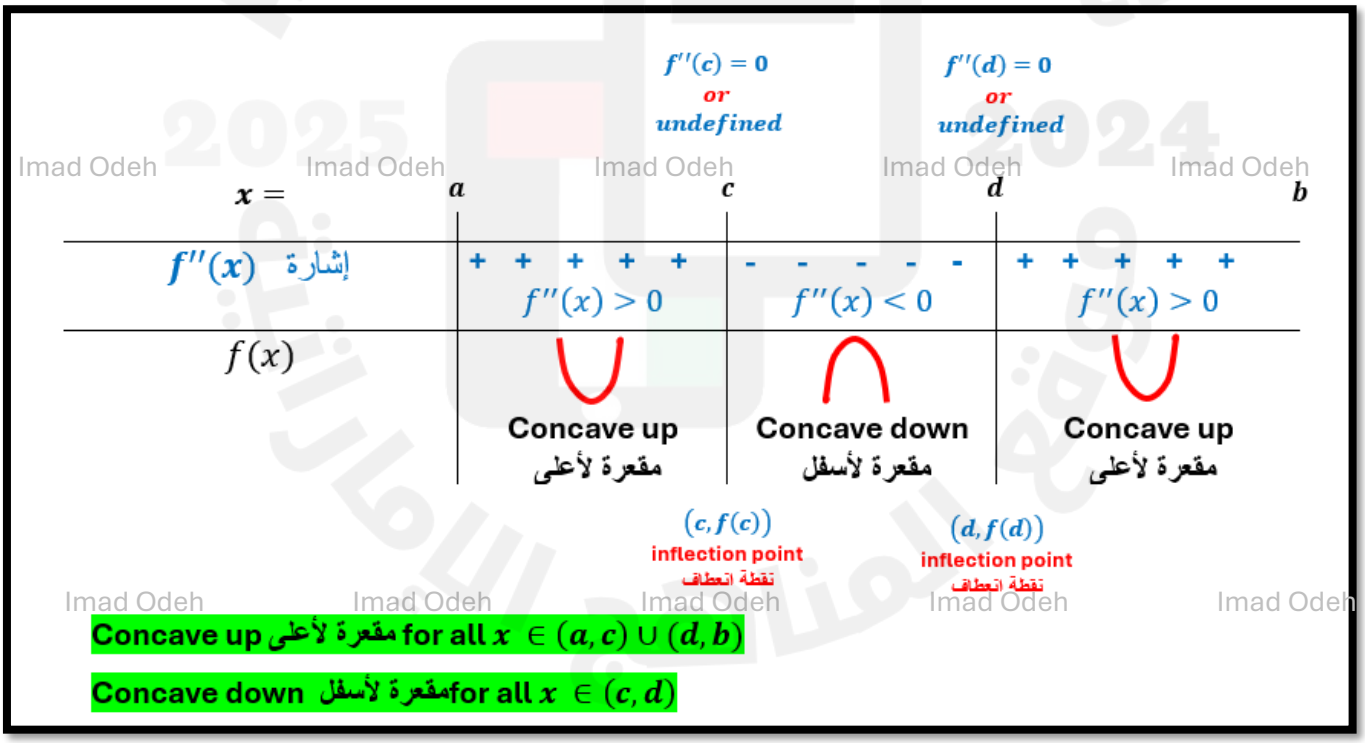
Suppose that f'' exists on an interval I.

(i) If $f''(x) > 0$ on I, then the graph of f is concave up on I.
(ii) If $f''(x) < 0$ on I, then the graph of f is concave down on I.

DEFINITION 5.2

Suppose that f is continuous on the interval (a, b) and that the graph changes concavity at a point $c \in (a, b)$ (i.e., the graph is concave down on one side of c and concave up on the other). Then, the point $(c, f(c))$ is called an **inflection point** of f.

لإيجاد فترات التقعر ونقاط الانعطاف نقوم بأنشاء ودراسة الجدول التالي

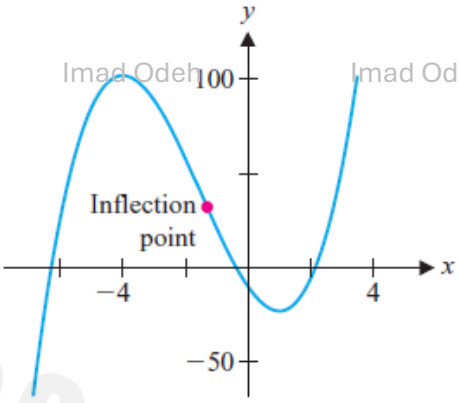


EXAMPLE 5.1 مثال 5-1

1- Determine where the graph of $f(x)$ is concave up and concave down
2- find any inflection points
3- draw a graph showing all significant features of the function.

1- حدد الفترات التي يكون عندها منحنى الدالة $f(x)$ مقعر لأعلى والفترات التي يكون عندها مقعر لأسفل
2- حدد نقاط الانعطاف ان وجدت
3- مثل المنحنى بيانيا

$$f(x) = 2x^3 + 9x^2 - 24x - 10$$



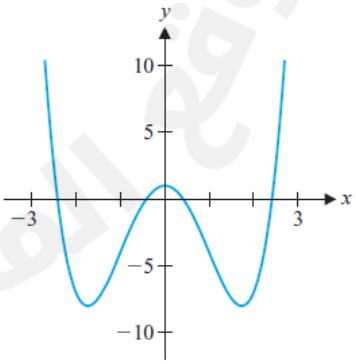
Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh
Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh

EXAMPLE 5.2 مثال 5-2

1- Determine where the graph of $f(x)$ is concave up and concave down
2- find any inflection points
3- draw a graph showing all significant features of the function.

1- حدد الفترات التي يكون عندها منحنى الدالة $f(x)$ مقعر لأعلى والفترات التي يكون عندها مقعر لأسفل
2- حدد نقاط الانعطاف ان وجدت
3- مثل المنحنى بيانيا

$$f(x) = x^4 - 6x^2 + 1$$



Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh
Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh

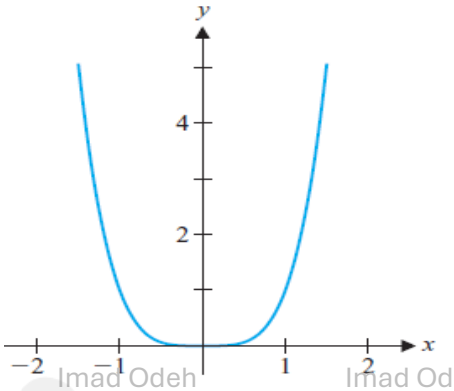
EXAMPLE 5.3 مثال 5-3

1- Determine where the graph of $f(x)$ is concave up and concave down
2- find any inflection points
3- draw a graph showing all significant features of the function.

1- حدد الفترات التي يكون عندها منحنى الدالة $f(x)$ مقعر لأعلى والفترات التي يكون عندها مقعر لأسفل
2- حدد نقاط الانعطاف ان وجدت
3- مثل المنحنى بيانيا

$$f(x) = x^4$$

Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh



Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh

THEOREM 5.2 (Second Derivative Test)

Suppose that f'' is continuous on the interval (a, b) and $f'(c) = 0$, for some number $c \in (a, b)$.

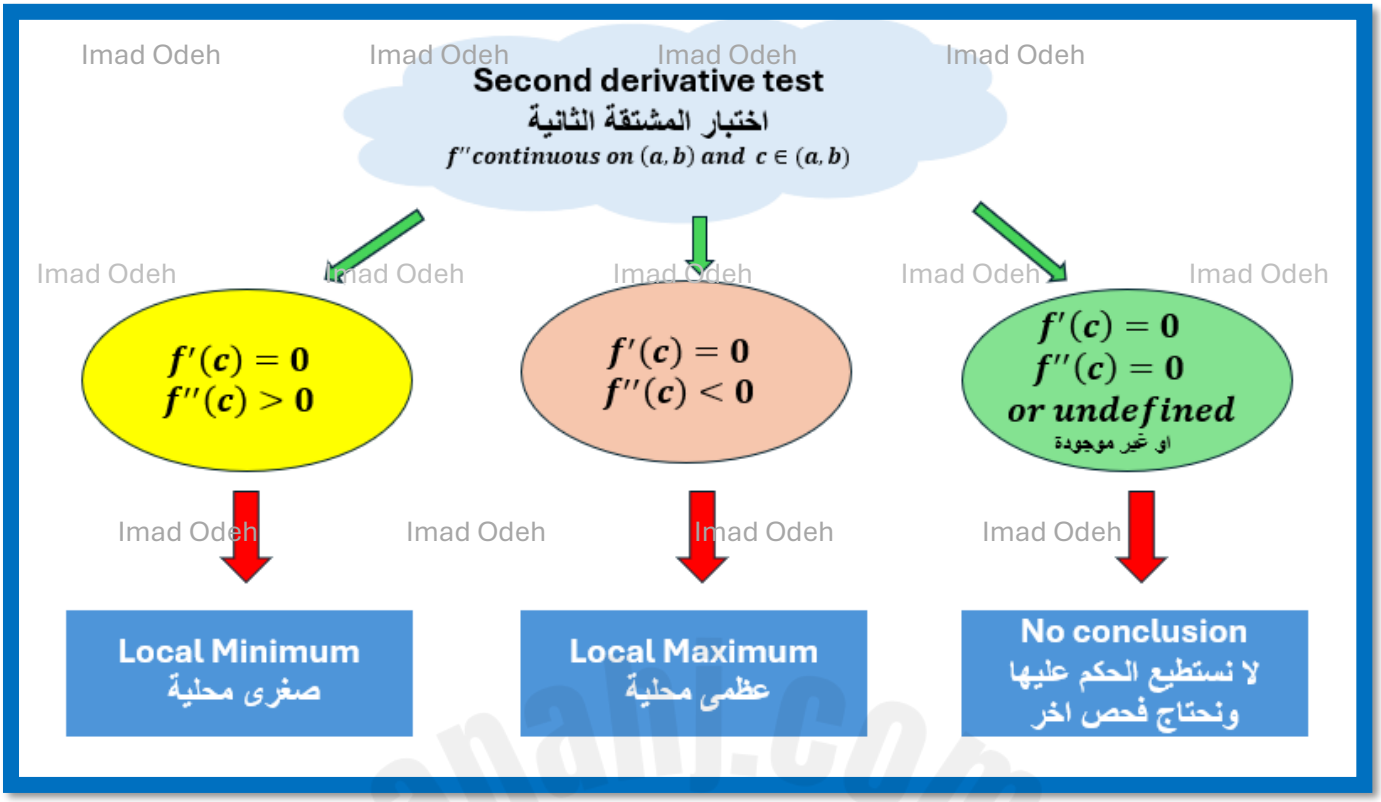
(i) If $f''(c) < 0$, then $f(c)$ is a local maximum.
(ii) If $f''(c) > 0$, then $f(c)$ is a local minimum.

REMARK 5.1

If $f''(c) = 0$ or $f''(c)$ is undefined, the Second Derivative Test yields no conclusion. That is, $f(c)$ may be a local maximum, a local minimum or neither. In this event, we must rely on other methods (such as the First Derivative Test) to determine whether $f(c)$ is a local extremum. We illustrate this with example 5.5.

Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh

Imad Odeh



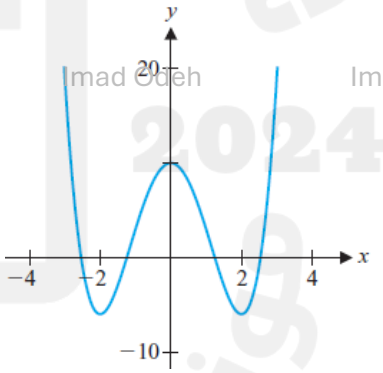
EXAMPLE 5.4

Use the Second Derivative Test to find the local extrema of

$$f(x) = x^4 - 8x^2 + 10.$$

مثال 5-4

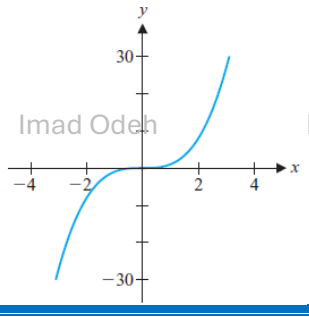
استخدم اختبار المشتقة الثانية لتحديد القيم القصوى المحلية



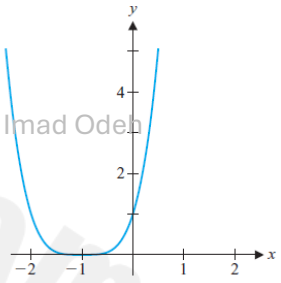
EXAMPLE 5.5
Use the Second Derivative Test to find the local extrema of

مثال 5-5
استخدم اختبار المشتقة الثانية لتحديد القيم القصوى المحلية

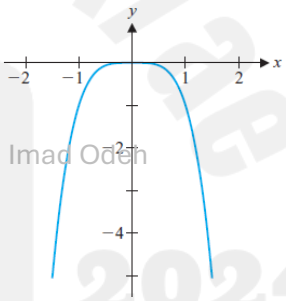
(a) $f(x) = x^3$



(b) $g(x) = (x+1)^4$



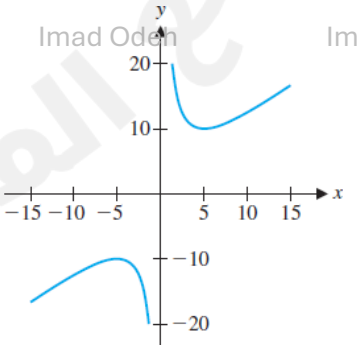
(c) $h(x) = -x^4$



EXAMPLE 5.6
Draw a graph of $f(x)$ showing all significant features.

مثال 5-6
ارسم بيان الدالة $f(x)$ مبيناً جميع خصائصها

$$f(x) = x + \frac{25}{x}$$



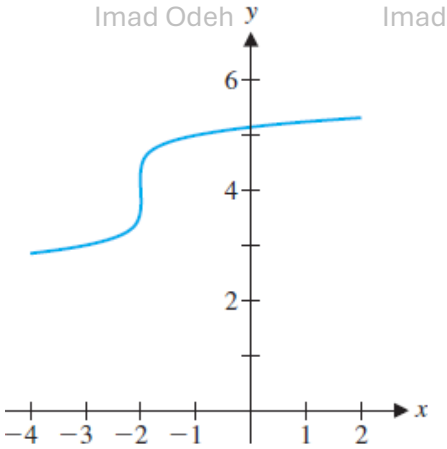
Imad Odeh
Imad Odeh
Imad Odeh
Imad Odeh
Imad Odeh
Imad Odeh
Imad Odeh
Imad Odeh
Imad Odeh
Imad Odeh
Imad Odeh
Imad Odeh
Imad Odeh

EXAMPLE 5.7
Draw a graph of $f(x)$ showing all significant features.

مثال 5-7
ارسم بيان الدالة $f(x)$ مبيناً جميع خصائصها

$$f(x) = (x+2)^{\frac{1}{5}} + 4$$

Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh



Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh

Imad Odeh

EXERCISES 4.5 تمارين

1- Determine where the graph of $f(x)$ is **concave up** and **concave down**
2- find any **inflection points**

1- حدد الفترات التي يكون عندها منحنى الدالة $f(x)$ مقعر لأعلى والفترات التي يكون عندها مقعر لأسفل
2- حدد نقاط الانعطاف ان وجدت

Q1 $f(x) = x^3 - 3x^2 + 4x - 1$

Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh

Q2 $f(x) = x^4 - 6x^2 + 2x + 3$

Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh

Q3 $f(x) = x + \frac{1}{x}$

Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh

Imad Odeh

1- Determine where the graph of $f(x)$ is concave up and concave down
2- find any inflection points

3- حدد الفترات التي يكون عندها منحنى الدالة $f(x)$ مقعر لأعلى والفترات التي يكون عندها مقعر لأسفل
4- حدد نقاط الانعطاف ان وجدت

Q4

$$f(x) = x + 3(1 - x)^{\frac{1}{3}}$$

Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh

Q5

$$f(x) = \sin x - \cos x$$

Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh

Q6

$$f(x) = \tan^{-1}(x^2)$$

Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh

Imad Odeh

1- Determine where the graph of $f(x)$ is concave up and concave down
2- find any inflection points

1- حدد الفترات التي يكون عندها منحنى الدالة $f(x)$ مقعر لأعلى والفترات التي يكون عندها مقعر لأسفل
2- حدد نقاط الانعطاف ان وجدت

Q7

$$f(x) = x^{\frac{4}{3}} + 4x^{\frac{1}{3}}$$

Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh

Q8

$$f(x) = xe^{-4x}$$

Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh

Find all critical numbers and use the second derivative Test to determine all local extrema.

اوجد جميع النقاط الحرجة ثم استخدم اختبار المشتقة الثانية لتحديد القيم القصوى المحلية ونوعها

Q9

$$f(x) = x^4 + 4x^3 - 1$$

Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh

Imad Odeh

Find all critical numbers and use the second derivative Test to determine all local extrema.

اوجد جميع النقاط الحرجة ثم استخدم اختبار المشتقة الثانية لتحديد القيم القصوى المحلية ونوعها

Q10 $f(x) = x^4 + 4x^2 + 1$

Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh

Q11 $f(x) = xe^{-x}$

Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh

Q12 $f(x) = e^{-x}$

Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh

Imad Odeh

Find all critical numbers and use the second derivative Test to determine all local extrema.

اوجد جميع النقاط الحرجة ثم استخدم اختبار المشتقة الثانية لتحديد القيم القصوى المحلية ونوعها

Q13

$$f(x) = \frac{x^2 - 5x + 4}{x}$$

Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh

Q14

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x}$$

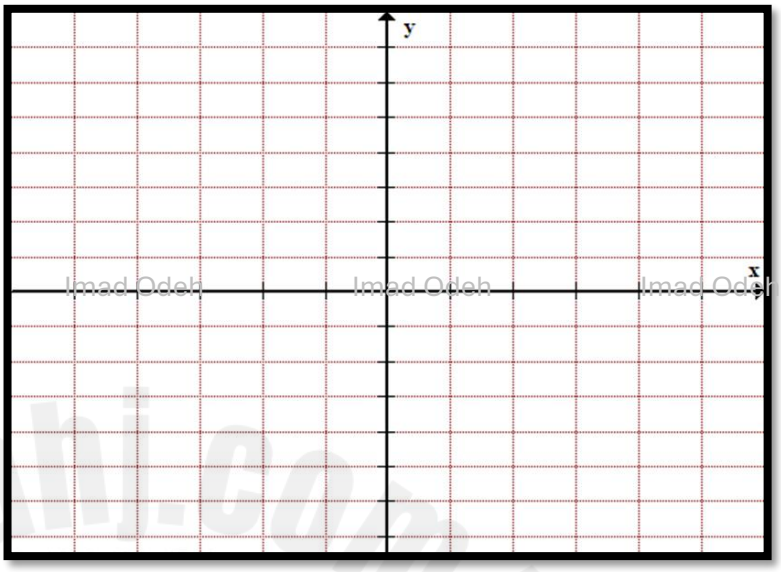
Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh

Imad Odeh

Q37 sketch a graph of a function with the given properties.

س ارسم بيان الدالة التي لها الخواص التالية

$f\ (0)\ =\ 0, f\ '(x)\ >\ 0\ for\ x\ <\ -1\ and\ -1\ <\ x\ <\ 1, f\ '(x) < 0$
$for\ x\ >\ 1, f''(x)\ >\ 0\ for\ x\ <\ -1, 0\ <\ x\ <\ 1\ and\ x\ >\ 1,$
$f\ ''(x)\ <\ 0\ for\ -1\ <\ x\ <\ 0$

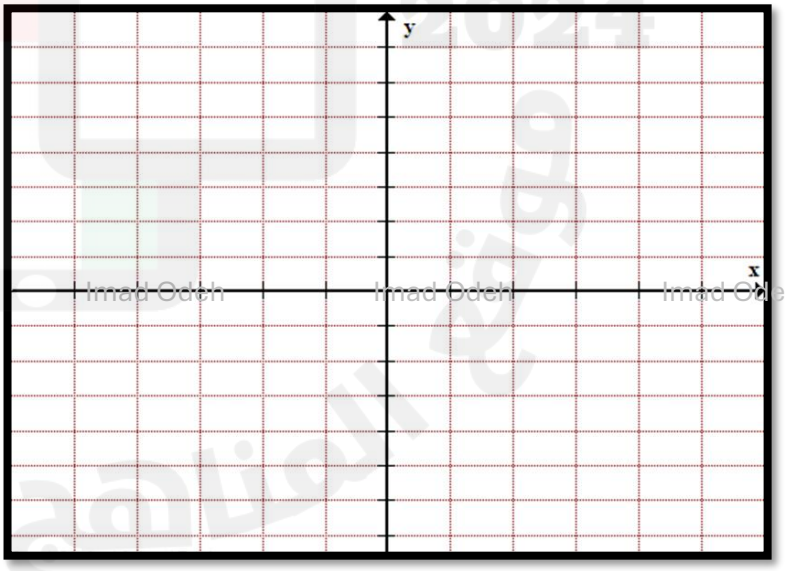


Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh

Q40 sketch a graph of a function with the given properties.

س ارسم بيان الدالة التي لها الخواص التالية

$f\ (1)\ =\ 0, f'(x)\ <\ 0\ for\ x\ <\ 1, f\ '(x)\ >\ 0\ for\ x\ >\ 1,$
$f\ ''(x)\ <\ 0\ for\ x\ <\ 1\ and\ x\ >\ 1$

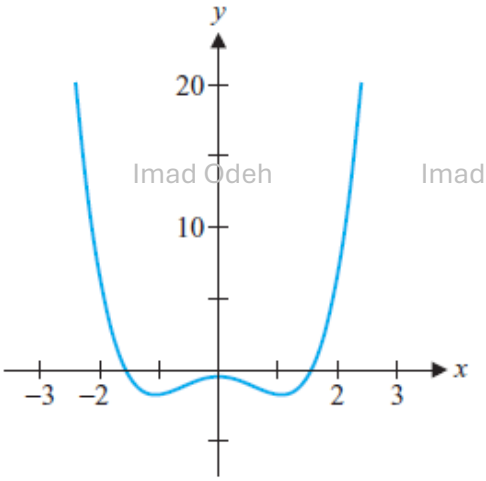


Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh

Imad Odeh

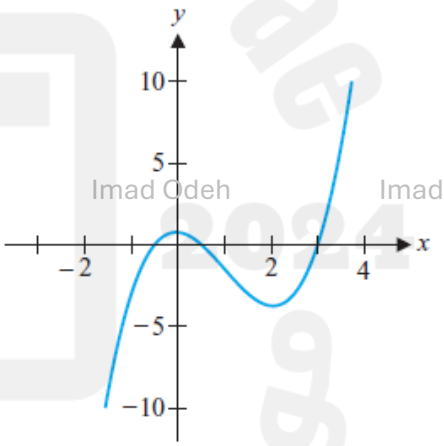
Q45 a) Estimate the intervals of increase and decrease,
b) the locations of local extrema,
c) intervals of concavity and locations of inflection points.

س قدر فترات التزايد وفترات التناقص
قيم x التي عندها قيم قصوى محلية
فترات التقعر لأعلى وفترات التقعر لأسفل
نقاط الانعطاف



Q46 a) Estimate the intervals of increase and decrease,
b) the locations of local extrema,
c) intervals of concavity and locations of inflection points.

س قدر فترات التزايد وفترات التناقص
قيم x التي عندها قيم قصوى محلية
فترات التقعر لأعلى وفترات التقعر لأسفل
نقاط الانعطاف



Imad Odeh
Imad Odeh
Imad Odeh
Imad Odeh
Imad Odeh
Imad Odeh
Imad Odeh
Imad Odeh
Imad Odeh
Imad Odeh
Imad Odeh
Imad Odeh
Imad Odeh
Imad Odeh
Imad Odeh
Imad Odeh
Imad Odeh
Imad Odeh
Imad Odeh
Imad Odeh

أسئلة سنوات سابقة وأخرى

Q1 Find the inflection point of **اوجد نقاط الانعطاف ل** س1

$$f(x) = x^4 + 12x^3 - x$$

Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh

Q2 Find the inflection point of **اوجد نقاط الانعطاف ل** س2

$$f(x) = x^4 - 6x^2 - 2x + 3$$

Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh

Q3 Find the inflection point of **اوجد نقاط الانعطاف ل** س3

$$f(x) = 2x^3 + 9x^2 - 24x - 10$$

Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh

Imad Odeh

Q4 Find the inflection point of **اوجد نقاط الانعطاف ل** س4

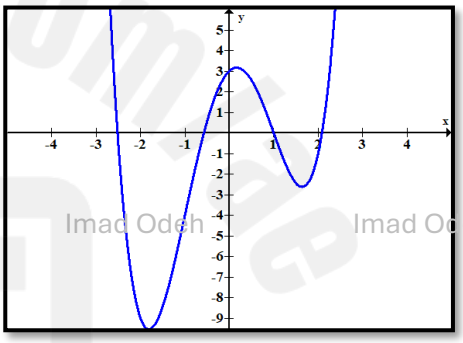
$$f(x) = tan^{-1}(x^2)$$

Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh

Q5 Determine where the graph of the function $f(x)$ is concave up

حدد اين يكون التمثيل البيان للدالة $f(x)$ مقعرا لأعلى س5

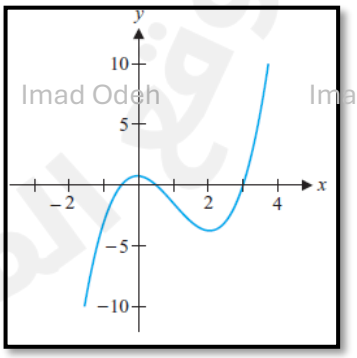
$$f(x) = x^4 - 6x^2 + 2x + 3$$



Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh

Q6 Determine where the graph of the function $f(x)$ is concave up

حدد اين يكون التمثيل البيان للدالة $f(x)$ مقعرا لأعلى س6

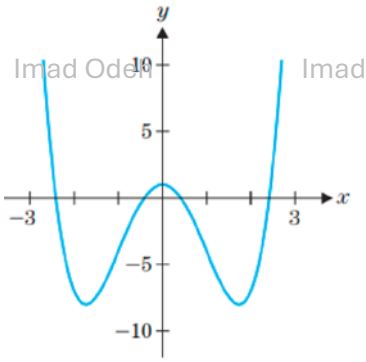


Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh

Imad Odeh

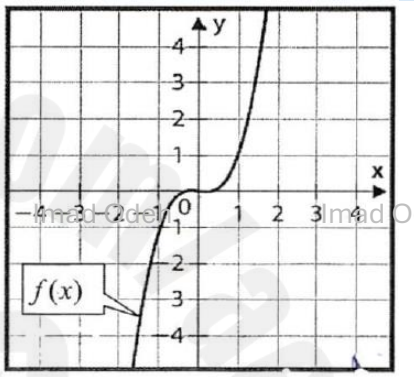
Q7 Determine where the graph of the function $f(x)$ is concave down

س7 حدد اين يكون التمثيل البيان للدالة $f(x)$ مقعرا للأسفل



Q8 Estimate the interval(s) where the curve of the $f(x)$ concave up and where concave down

س8 قدر الفترات التي يكون فيها التمثيل البياني للدالة $f(x)$ مقعرا لأعلى والفترات التي يكون فيها مقعرا لأسفل



Q9 Suppose f is a polynomial function such that

س9 لتكن f دالة حدودية بحيث

$$f'(-3) = 0\,, f''(-3) = -25$$

Imad Odeh
Almanahj.com
2023 2024

Q10 What is the coordinate of inflection point where the function change from concave down to concave upward

س10 اوجد احداثي نقطة الانعطاف التي يغير عندها منحنى الدالة من نقعره من تقعر الى الأسفل الى تقعر الى الأعلى

$$f(x) = \cos x - \sin x \quad for \ 0 \le x \le 2\pi$$

Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh

Q11 Find the interval where $f(x)$ will be concave upward If

س11 اوجد فترات التقعر للأعلى إذا علمت ان

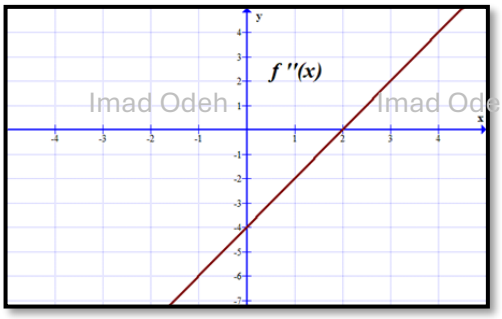
$$f'(x) = x^2 - 4x - 5\,,$$

Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh

Imad Odeh

Q12 The graph represents $f''(x)$
Find the interval where $f(x)$will be concave upward

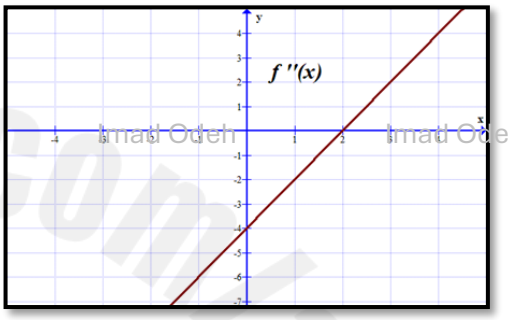
س12 اعتمد على الرسم البياني الذي يمثل $f''(x)$
اوجد فترات التقعر للأعلى



Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh

Q13 The graph represents $f''(x)$
Find the inflection point

س13 اعتمد على الرسم البياني الذي يمثل $f''(x)$ اوجد نقاط الانعطاف



Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh

Q14 If the graph of $f(x)$ has inflection point at $(1,-2)$ find the value of a and b

س14 إذا كان الرسم البياني للدالة $f(x)$ نقطة انعطاف عند $(1,-2)$ اوجد قيمة كل من a و b

$$f(x) = ax^3 - 6x^2 + bx - 7$$

Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh

Imad Odeh

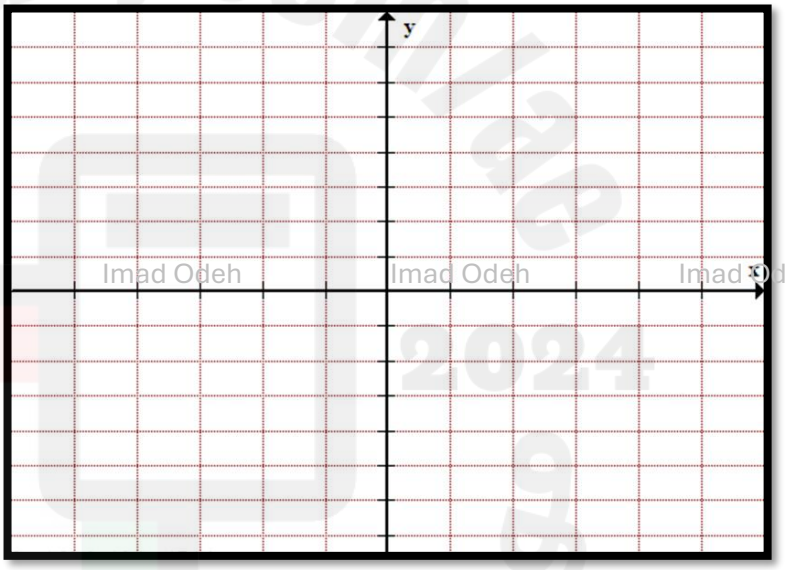
3.6 OVERVIEW OF CURVE SKETCHING

Steps that you should take when trying to draw a graph of $y = f(x)$.	الخطوات التي يجب اتباعها لرسم منحنى الدالة $y = f(x)$.
• Domain • Vertical Asymptotes • First Derivative Information • Vertical Tangent Lines • Second Derivative Information • Horizontal Asymptotes • Intercepts	• حدد المجال • اوجد المقاربات العمودية • اوجد المشتقة الأولى ونتائجها • اوجد الممسات العمودية • اوجد المشتقة الثانية ونتائجها • اوجد المقاربات الافقية • اوجد المقاطع مع المحاور

EXAMPLE 6.1
Draw a graph of $f(x)$ showing all significant features.

مثال 6-1
ارسم بيان الدالة $f(x)$ مبيناً جميع خصائصها

$$f(x) = x^4 + 6x^3 + 12x^2 + 8x + 1,$$

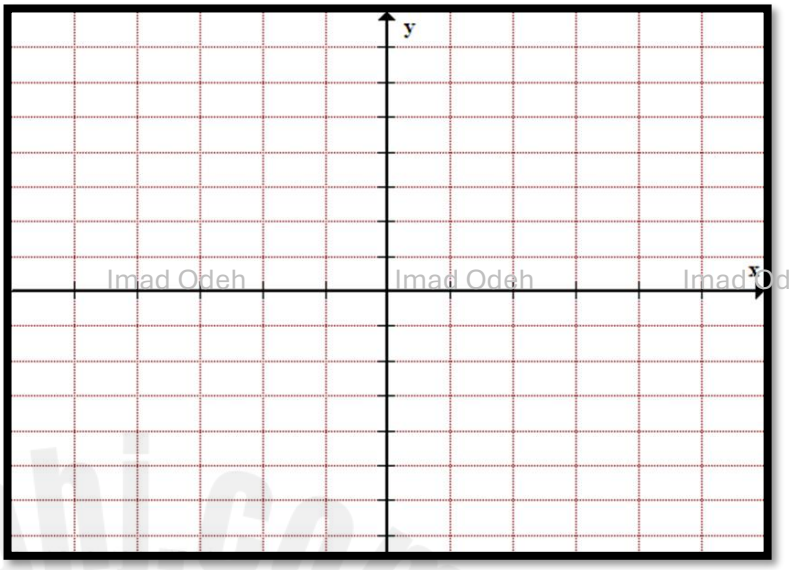


Imad Odeh

EXAMPLE 6.2
Draw a graph of $f(x)$ showing all significant features.

مثال 6-2
ارسم بيان الدالة $f(x)$ مبيناً جميع خصائصها

$$f(x) = \frac{x^2 - 3}{x^3}$$

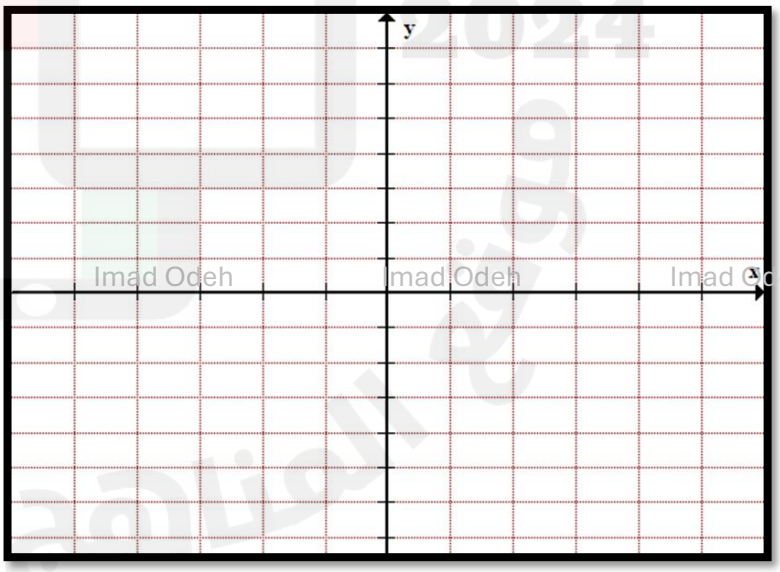


Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh

EXAMPLE 6.3
Draw a graph of $f(x)$ showing all significant features.

مثال 6-3
ارسم بيان الدالة $f(x)$ مبيناً جميع خصائصها

$$f(x) = \frac{x^2}{x^2 - 4}$$



Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh
Imad Odeh

أسئلة سنوات سابقة وأخرى

Q1	Find all vertical asymptotes of the function	اوجد جميع خطوط التقارب الراسية للدالة	س1

$$f(x)=\frac{2x}{x^2-1}$$

Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh

Q2	Find a function whose graph has the given asymptotes.	اوجد الدالة التي يكون لتمثيلها البياني خطوط التقارب	س2

$$y=8\,,x=3,x=-8$$

Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh

Q3	Find a function whose graph has the given asymptotes.	اوجد الدالة التي يكون لتمثيلها البياني خطوط التقارب	س3

$$y=3\,,x=1,x=2$$

Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh

Imad Odeh

Q4 Find a function whose graph has the given asymptotes. اوجد الدالة التي يكون لتمثيلها البياني خطوط التقارب **4س**

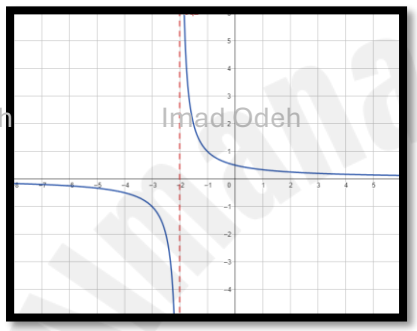
$$y = -2, y = 2, x = 1-, x = 1$$

Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh

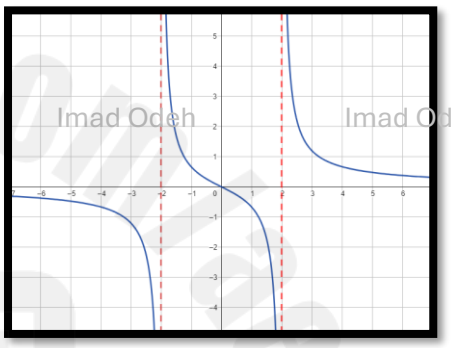
Q5 Determine the graph of the function **حدد التمثيل البياني للدالة** **5س**

$$f(x) = \frac{2x}{x^2 - 1}$$

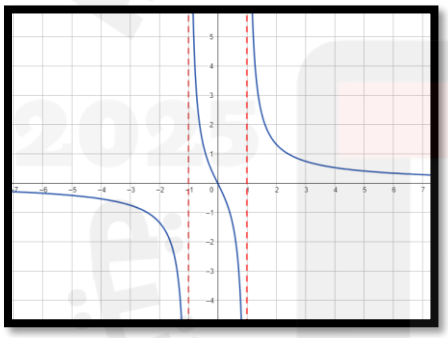
a)



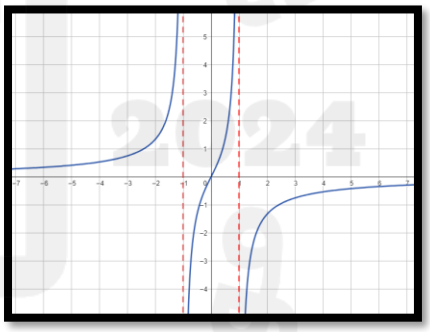
b)



c)



d)



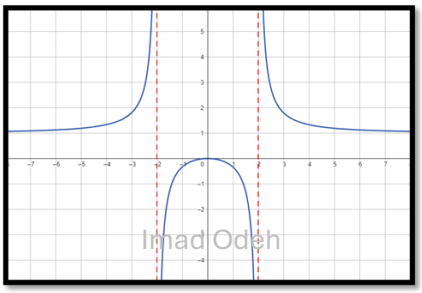
Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh

Imad Odeh

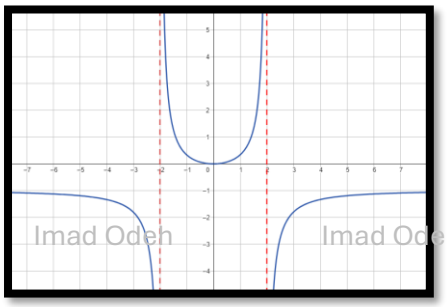
Q6 Determine the graph of the function **حدد التمثيل البياني للدالة** س6

$$f(x) = \frac{x^2}{x^2 - 4}$$

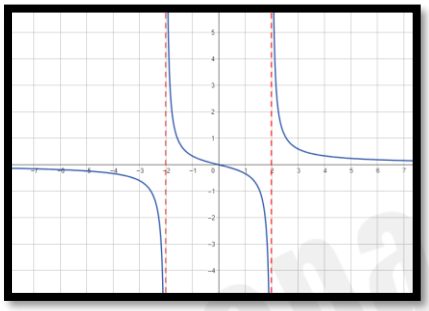
a)



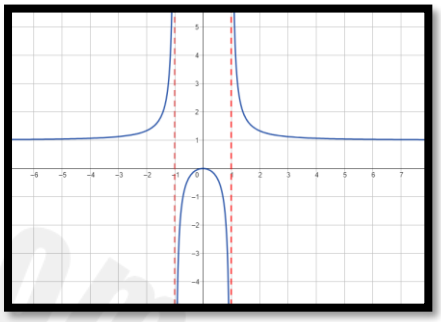
b)



c)



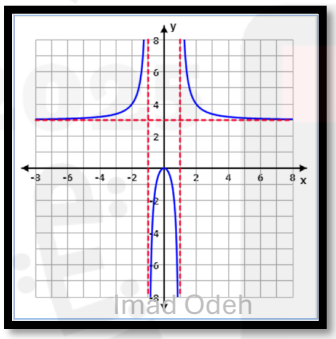
d)



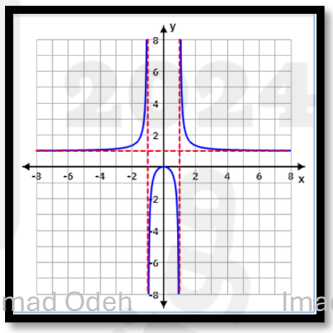
Q7 Determine the graph of the function **حدد التمثيل البياني للدالة** س7

$$f(x) = \frac{x^2}{x^2 - 1}$$

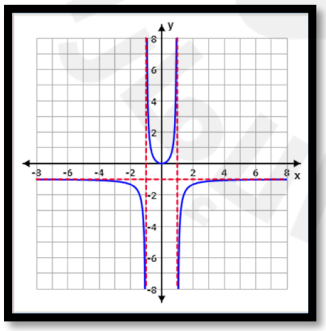
a)



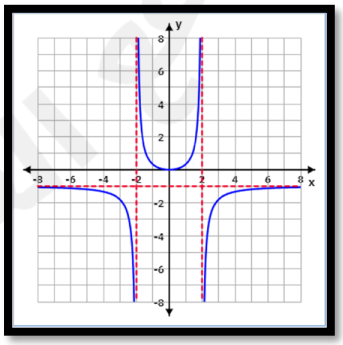
b)



c)



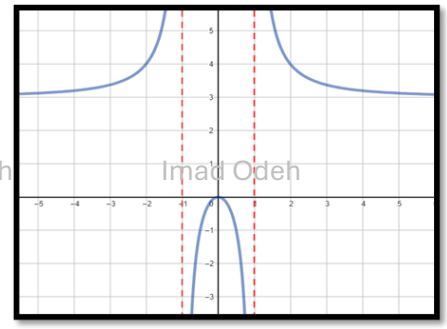
d)



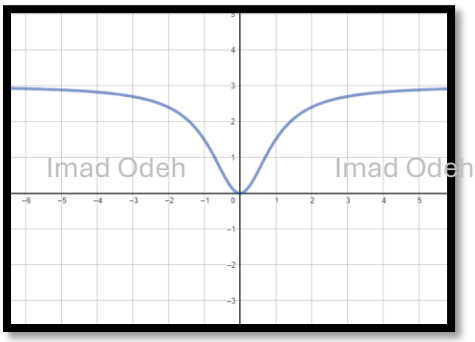
Q8 Determine the graph of the function **س8 حدد التمثيل البياني للدالة**

$$f(x) = \frac{3x^2}{x^2+1}$$

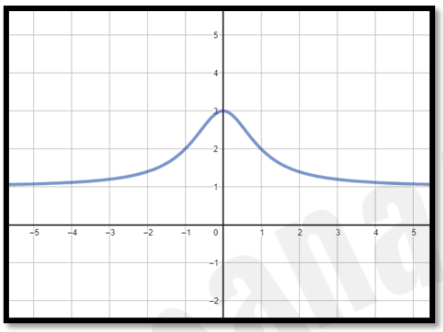
a)



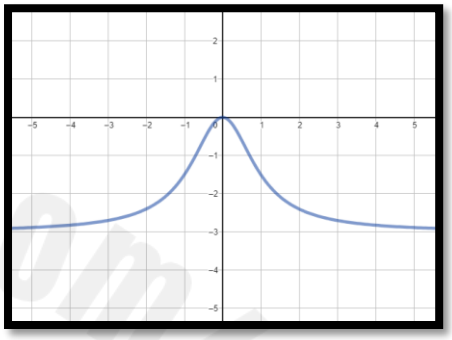
b)



c)



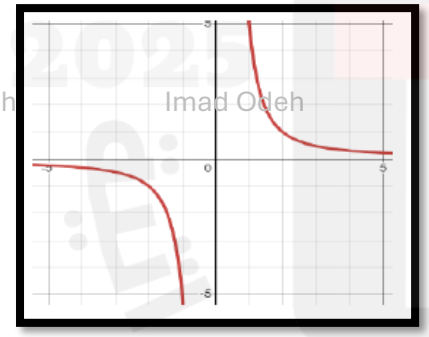
d)



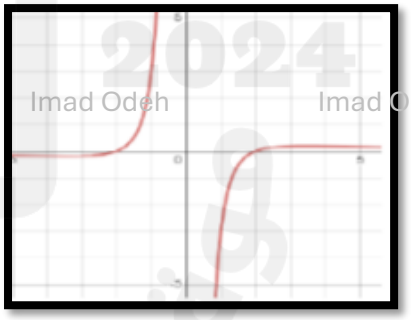
Q9 Determine the graph of the function **س9 حدد التمثيل البياني للدالة**

$$f(x) = \frac{x^2+4}{x^3}$$

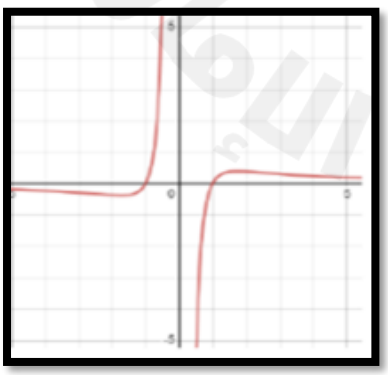
a)



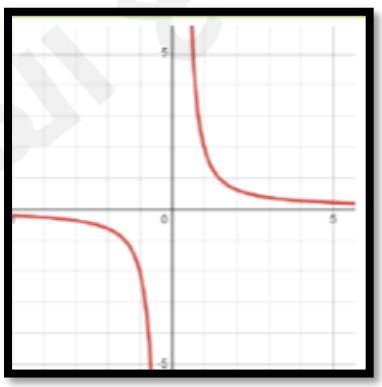
b)



c)



d)

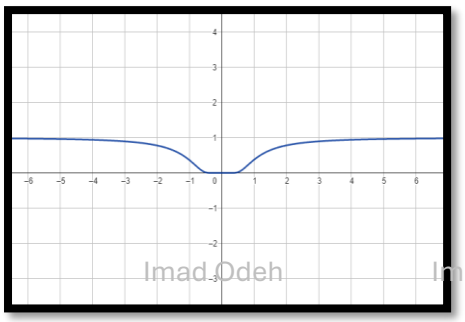


Imad Odeh

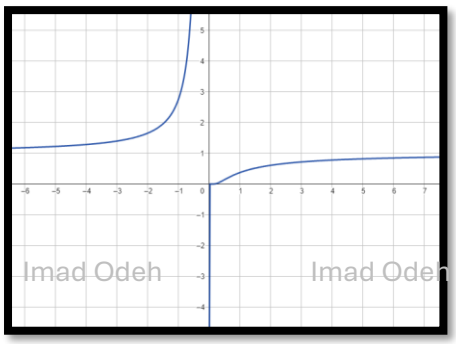
Q10 Determine the graph of the function **س10 حدد التمثيل البياني للدالة**

$$f(x) = e^{\frac{1}{x}}$$

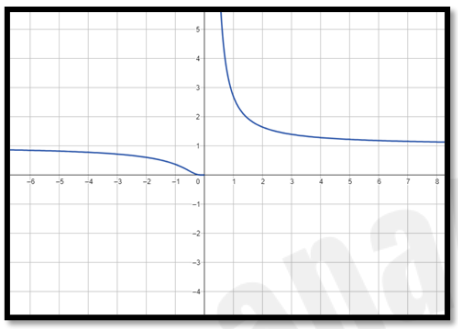
a)



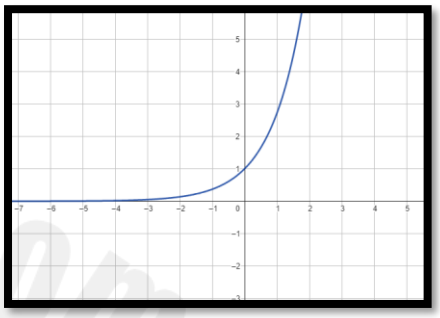
b)



c)



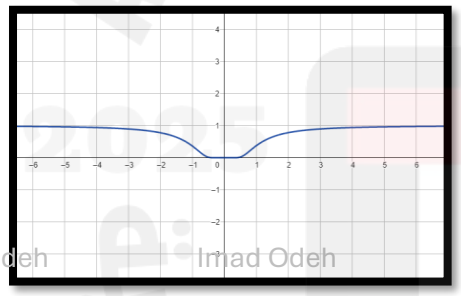
d)



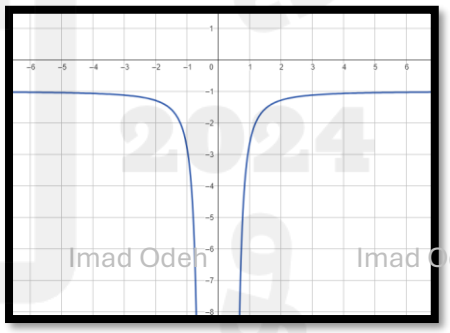
Q11 Determine the graph of the function **س11 حدد التمثيل البياني للدالة**

$$f(x) = e^{\frac{1}{x^2}}$$

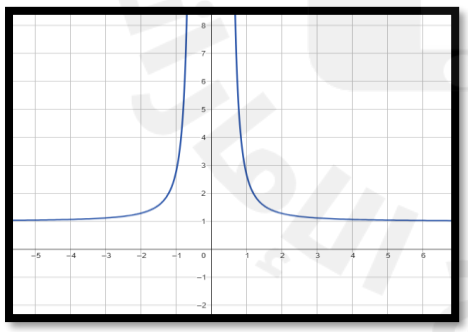
a)



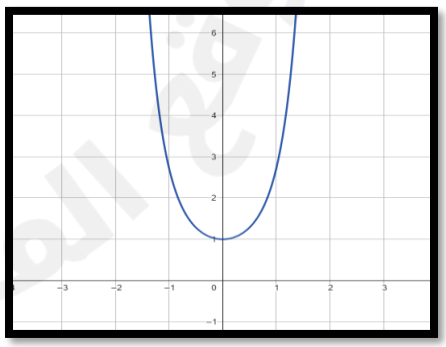
b)



c)

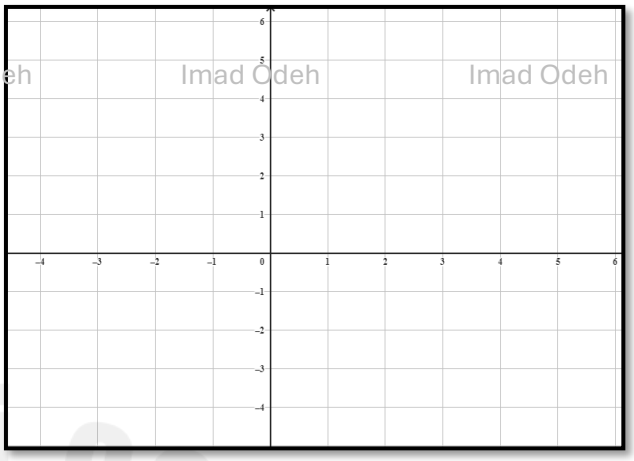


d)



Q12 graph the function **س12 مثل بيانيا**

$$f(x) = \frac{x-4}{x^3}$$



Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh
Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh

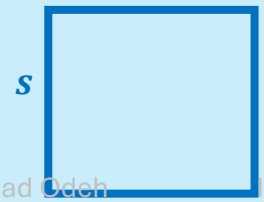
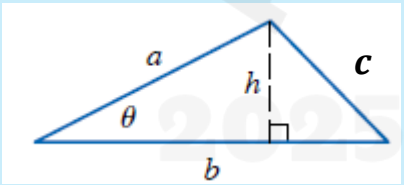
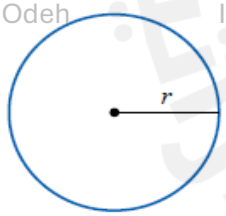
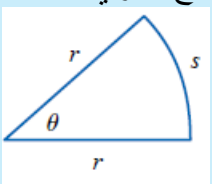
Q13 Determine the graph of the function **س13 حدد التمثيل البياني للدالة**

$$f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x$$

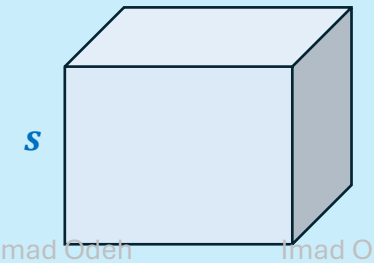
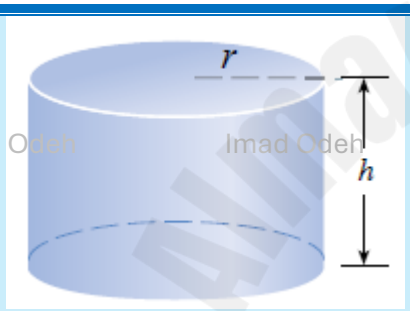
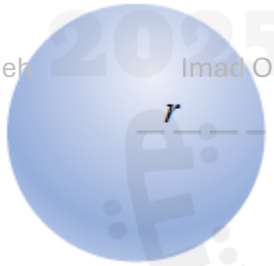
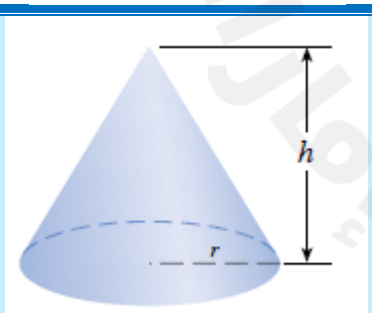
Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh
Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh
Imad Odeh

Imad Odeh

4.7
القيم المثلى
OPTIMIZATION

Shape الشكل	Area المساحة	Circumference/Perimeter المحيط
Square مربع 	$A = s^2$	$P = 4s$
Rectangle مستطيل 	$A = l\,w$	$P = 2l + 2w$
Triangle مثلث 	$A = \frac{1}{2}\,b\,h$ $A = \frac{1}{2}\,ab\,\sin\theta$	$P = a + b + c$
Circle دائرة 	$A = \pi\,r^2$	$c = 2\,\pi\,r$
Sector قطاع دائري 	$A = \frac{1}{2}\,r^2\theta$	$c = 2\,r + s$ $s = r\theta$

Imad Odeh

Shape الشكل	**Volume** الحجم	**Surface area** المساحة السطحية
	$v = s^3$	$A = 6s$
	$v = l\ w\ h$	$A = 2lw + 2lh + 2wh$
	$v = \pi\ r^2 h$	$A = 2\pi rh + 2\pi r^2$
	$v = \frac{4}{3}\pi\ r^3$	$A = 4\pi r^2$
	$v = \frac{1}{3}\pi\ r^2 h$	

Imad Odeh

• Draw a picture and label it • Determine what the variables are and how they are related. • Decide what quantity needs to be maximized or minimized. • Write an expression for the quantity to be maximized or minimized in terms of only *one* variable. • Determine the minimum and maximum allowable values (if any) of the variable you're using. • Solve the problem and be sure to answer the question that is asked.	• أقرأ المسألة جيدًا، ثم أُحدِّد المعلومات اللازمة لحلِّ المسألة. • أرسم مُخطَّطًا يُمثِّل المسألة، ثم أُدوِّن عليه المعلومات المُهِمَّة لحلِّ المسألة، وأختار رمزًا يُمثِّل الكمية التي أُريد أنْ أجد لها أكبر قيمة أو أقل قيمة ورموزًا للكميات المُتغيّرة الأخرى في المسألة • حدد نوع المتغيرات والثوابت وحدد علاقة كل منها ببعضها البعض • حدد ما هو المطلوب إيجاد أصغر قيمة او أكبر قيمة له • اكتب التعبير الذي يحدد المقدار المطلوب إيجاد أصغر قيمة له او أكبر قيمة له بدلالة متغير واحد • حدد الحد الأدنى والحد الأقصى للقيم المسموح بها (إن وجدت) للمتغير الذي تستخدمه (حدد المجال). • اوجد المشتقة الأولى • أجد القِيَم التي تكون عندها مشتقة الدالة صفرًا أو غير موجودة، وقيمتي الدالة عند طرفي الفترة

Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh

EXAMPLE 7.1

You have 40 (linear) feet of fencing with which to enclose a rectangular space for a garden. Find the largest area that can be enclosed with this much fencing and the dimensions of the corresponding garden.

مثال 7-1

لديك 40 قدمًا من السياج الذي يمكنك إحاطة مساحة مستطيلة به لحديقة. اوجد عن أكبر مساحة يمكن إحاطتها بهذا القدر من السياج وأبعاد الحديقة.

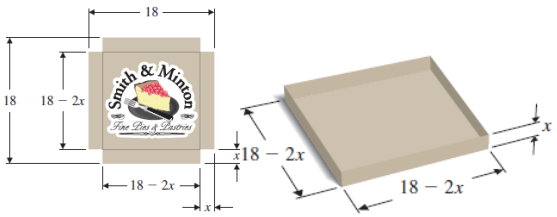
Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh

Imad Odeh

EXAMPLE 7.2 مثال 7-2

A square sheet of cardboard 18″ on a side is made into an open box (i.e., there's no top), by cutting squares of equal size out of each corner and folding up the sides along the dotted lines. Find the dimensions of the box with the maximum volume.

يراد صناعة صندوق مفتوح من الأعلى بواسطة ورقة مربعة من الورق المقوى طول ضلعها 18 بوصة عن طريق قطع مربعات متساوية الحجم من كل زاوية وطوي الأضلاع. أوجد أبعاد الصندوق ذو اكبر حجم.

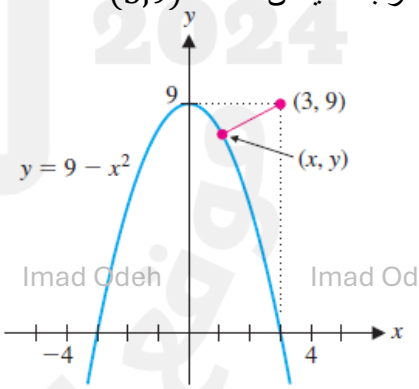


Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh
Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh

EXAMPLE 7.3 مثال 7-3

Find the point on the parabola $y = 9 - x^2$ closest to the point (3, 9).

اوجد نقطة على منحنى الدالة $y = 9 - x^2$ والتي تكون أقرب ما يمكن للنقطة (3,9)



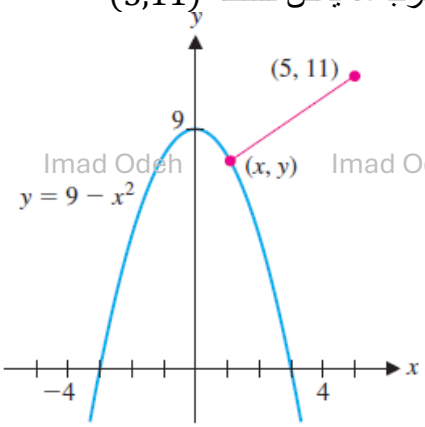
Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh
Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh
Imad Odeh

EXAMPLE 7.4

Find the point on the parabola $y = 9 - x^2$ closest to the point (5, 11).

مثال 7-4

اوجد نقطة على منحنى الدالة $y = 9 - x^2$ والتي تكون أقرب ما يمكن للنقطة (5,11)



Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh
Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh

EXAMPLE 7.5

A soda can is to hold 12 fluid ounces. Find the dimensions that will minimize the amount of material used in its construction, assuming that the thickness of the material is uniform (i.e., the thickness of the aluminum is the same everywhere in the can).

مثال 7-5

يجب أن تتسع علبة الصودا لـ 12 أونصة سائلة. ابحث عن الأبعاد التي ستقلل من كمية المواد المستخدمة في تصنيعها، على افتراض أن سمك المادة موحد (أي أن سمك الألومنيوم هو نفسه في كل مكان في العلبة).

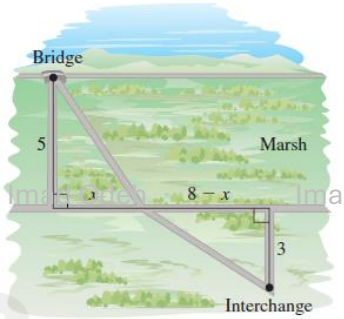
Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh
Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh
Imad Odeh

EXAMPLE 7.5

The state wants to build a new stretch of highway to link an existing bridge with a turnpike interchange, located 8 miles to the east and 8 miles to the south of the bridge. There is a 5-mile-wide stretch of marshland adjacent to the bridge that must be crossed. Given that the highway costs \$10 million per mile to build over the marsh and only \$7 million per mile to build over dry land, how far to the east of the bridge should the highway be when it crosses out of the marsh?

مثال 7-5

تريد الولاية بناء امتداد جديد من الطريق السريع لربط جسر قائم بتقاطع طريق سريع يقع على بعد 8 أميال إلى الشرق و8 أميال إلى الجنوب من الجسر. هناك امتداد من الأراضي المستنقعية بعرض 5 أميال بجوار الجسر يجب عبوره. نظرًا لأن تكلفة بناء الطريق السريع 10 ملايين دولار لكل ميل فوق المستنقع و7 ملايين دولار فقط لكل ميل فوق الأراضي الجافة، فإلى أي مدى يجب أن يكون الطريق السريع شرق الجسر عندما يعبر المستنقع؟



Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh
Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh

EXERCISES 3.7

Q1 A three-sided fence is to be built next to a straight section of river, which forms the fourth side of a rectangular region. The enclosed area is equal $\mathbf{1800}\ \boldsymbol{ft^2}$.
Find the minimum perimeter and the dimensions of the corresponding enclosure.

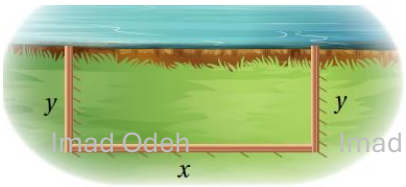
س1 سيتم بناء سياج ثلاثي الجوانب بجوار قسم مستقيم من النهر، والذي يشكل الجانب الرابع لمنطقة مستطيلة الشكل. المساحة المغلقة تساوي 1800 قدم مربع. أوجد الحد الأدنى للمحيط وأبعاد المنطقة المغلقة المقابلة.

Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh

Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh
Imad Odeh

Q2 A three-sided fence is to be built next to a straight section of river, which forms the fourth side of a rectangular region. There is 96 feet of fencing available.
Find the maximum enclosed area and the dimensions of the corresponding enclosure.

س2 سيتم بناء سياج ثلاثي الجوانب بجوار قسم مستقيم من النهر، والذي يشكل الجانب الرابع لمنطقة مستطيلة الشكل .يتوفر سياج بطول 96 قدمًا.
ابحث عن أقصى مساحة محاطة وأبعاد السياج المقابل.



Q3 A two-pen corral is to be built. The outline of the corral forms two identical adjoining rectangles. If there is $\mathbf{120}\ \boldsymbol{ft}$ of fencing available, what dimensions of the corral will maximize the enclosed area?

س3 سيتم بناء حظيرة ذات حجرتين. يشكل مخطط الحظيرة مستطيلين متجاورين متطابقين. إذا كان هناك 120 قدمًا من السياج المتاح، فما أبعاد الحظيرة التي ستزيد من مساحة المنطقة المغلقة إلى أقصى حد؟

Imad Odeh

Q4	A showroom for a department store is to be rectangular with walls on three sides, $\boldsymbol{6-ft}$ door openings on the two facing sides and a $\boldsymbol{10-ft}$ door opening on the remaining wall. The showroom is to have 800 ft^2 of floor space. What dimensions will minimize the length of wall used?	س4 صالة عرض مكونة من ثلاثة جدران بحيث يكون هناك بوابتان عرض كل منها ft6 في الجدارين المتقابلين وبوابة أخرى في الجدار الثالث عرضها ft10 إذا كانت مساحة صالة العرض ft^2800 اوجد ابعاد الصالة بحيث يكون طول الجدران اقل ما يمكن؟

Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh

Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh

Q5	Show that the rectangle of maximum area for a given perimeter $\boldsymbol{P}$ is always a square.	س5 أثبت أن المستطيل الذي له أقصى مساحة لمحيط معين P يكون دائمًا مربعًا.

Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh

Imad Odeh

Q6	Show that the rectangle of minimum perimeter for a given area A is always a square.	س6 أثبت أن المستطيل الذي له الحد الأدنى من المحيط لمساحة معينة A يكون دائمًا مربعًا.

Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh

Q7	A box with no top is to be built by taking a $6'' - by - 10''$ sheet of cardboard, cutting $x - in.$ squares out of each corner and folding up the sides. Find the value of x that maximizes the volume of the box.	س7 يمكن صنع صندوق بدون غطاء من خلال أخذ ورقة من الورق المقوى مقاس 6 × 10، وقطع مربعات مقاس x بوصة من كل زاوية وطي الجوانب. أوجد قيمة x التي تزيد من حجم الصندوق إلى أقصى حد.

Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh

Imad Odeh

Q8	A box with no top is to be built by taking a $\mathbf{12'' - by - 16''}$ sheet of cardboard, cutting x-in. squares out of each corner and folding up the sides. Find the value of x that maximizes the volume of the box.	س8 يمكن صنع صندوق بدون غطاء من خلال أخذ ورقة من الورق المقوى مقاس 12 × 16 بوصة، وقطع مربعات مقاس x بوصة من كل زاوية وطي الجوانب. أوجد قيمة x التي تزيد من حجم الصندوق إلى أقصى حد.

Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh

Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh

Q9	a) A box with no top is built by taking a $\mathbf{6'' - by - 6''}$ piece of cardboard, cutting $\boldsymbol{x - in}$. squares out of each corner and folding up the sides. The four x-in. squares are then taped together to form a second box (with no top or bottom). Find the value of $\boldsymbol{x}$ that maximizes the sum of the volumes of the boxes. b) Repeat the problem starting with a $\mathbf{4'' - by - 6''}$ piece of cardboard.	س9 أ) يمكن بناء صندوق بدون غطاء عن طريق أخذ قطعة من الورق المقوى مقاس 6 × 6، وقطع مربعات مقاس xبوصة من كل زاوية وطي الجوانب. ثم يتم لصق المربعات الأربعة مقاس x بوصة معًا لتكوين صندوق ثانٍ (بدون غطاء أو قاع). أوجد قيمةx التي تزيد من مجموع أحجام الصناديق إلى الحد الأقصى. (ب) كرر المسألة بدءًا من قطعة من الورق المقوى مقاس 4 × 6.

Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh

Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh

Imad Odeh

Q10 Find the point on the curve $y = x^2$ closest to the point $(0, 1)$.

س10 اوجد نقطة على منحنى الدالة $y = x^2$ والتي تكون أقرب ما يمكن للنقطة $(0,1)$

Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh

Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh

Q11 Find the point on the curve $y = x^2$ closest to the point $(3, 4)$.

س11 اوجد نقطة على منحنى الدالة $y = x^2$ والتي تكون أقرب ما يمكن للنقطة $(3,4)$

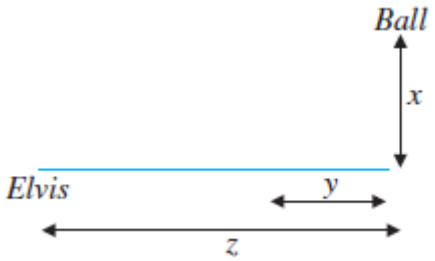
Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh

Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh

Imad Odeh

Q12 Elvis the dog stands on a shoreline while a ball is thrown $x = 4$ meters into the water and $z = 8$ meters down shore. If he runs $6.4\ m/s$ and swims $0.9\ m/s$, find the place (y) at which he should enter the water to minimize the time to reach the ball. Show that you get the same y-value for any $z > 1$.

س12 يقف الكلب الفيس على الشاطئ بينما يتم رمي كرة $x = 4$ أمتار في الماء و $z = 8$ أمتار في اتجاه الشاطئ. إذا ركض بسرعة ثانية/متر 6.4 وسبح بسرعة ثانية/متر 0.9، فابحث عن المكان (y) الذي يجب أن يدخل فيه الماء لتقليل الوقت اللازم للوصول إلى الكرة.
أظهر أنك حصلت على نفس قيمة y لأي $z > 1$.



Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh
Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh

Q13 Suppose a wire $2\ ft$ long is to be cut into two pieces, each of which will be formed into a square. Find the size of each piece to maximize the total area of the two squares.

س13 افترض أن سلكًا طوله 2 قدم سيتم قطعه إلى قطعتين، كل منهما سيتم تشكيلها على شكل مربع. أوجد حجم كل قطعة لتعظيم المساحة الإجمالية للمربعين.

Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh
Imad Odeh

Q14 An advertisement consists of a rectangular printed region plus $\mathbf{1} - \boldsymbol{in}$. margins on the sides and $\mathbf{2} - \boldsymbol{in}$. margins at top and bottom. If the area of the printed region is to be $\mathbf{92}\ \boldsymbol{in^2}$, find the dimensions of the printed region and overall advertisement that minimize the total area.

س14 يتكون الإعلان من منطقة مطبوعة مستطيلة بالإضافة إلى هوامش 1 بوصة على الجانبين وهوامش 2 بوصة في الأعلى والأسفل. إذا كانت مساحة المنطقة المطبوعة 92 بوصة مربعة، فابحث عن أبعاد المنطقة المطبوعة والإعلان الإجمالي الذي يقلّل المساحة الإجمالية.

Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh
Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh

Q15 An advertisement consists of a rectangular printed region plus 1-in. margins on the sides and 1.5-in. margins at top and bottom. If the total area of the advertisement is to be 120 in.2, what dimensions should the advertisement be to maximize the area of the printed region?

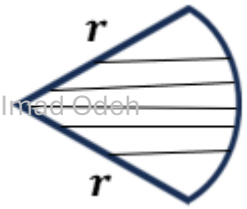
س15 يتكون الإعلان من منطقة مطبوعة مستطيلة بالإضافة إلى هوامش 1 بوصة على الجانبين وهوامش 1.5 بوصة في الأعلى والأسفل. إذا كانت المساحة الإجمالية للإعلان 120 بوصة مربعة، فما هي الأبعاد التي يجب أن تكون عليها الإعلان لتحقيق أقصى قدر من مساحة المنطقة المطبوعة؟

Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh
Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh
Imad Odeh

أسئلة سنوات سابقة و أخرى

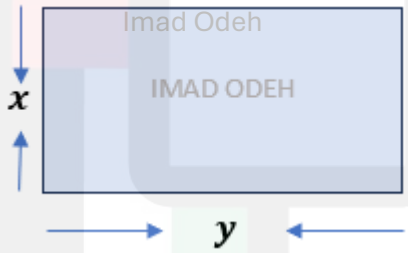
Q1	A circular sector with a perimeter of $12\ cm$. Find the length of the radius of its circle, which makes its area as large as possible. Note that the area of the sector is given by	س1 قطاع دائري محيطه $12\ cm$ اوجد طول نصف قطر دائرته والتي تجعل مساحته أكبر ما يمكن علما ان مساحة القطاع تعطي بالعلاقة

$$A = \frac{1}{2}rl \ ,$$



Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh

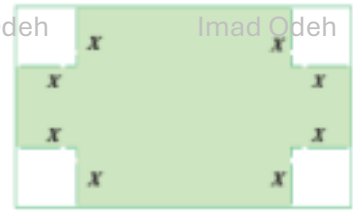
Q2-	You have $60\ m$ fencing with which to enclose a rectangular space for a garden. Find the dimensions of the garden to get the largest area that can be enclosed by this fence.	س 2 لديك سياج طوله $60m$ لتحيط به حديقة مستطيلة الشكل. اوجد ابعاد الحديقة لتحصل على أكبر مساحة ممكنة يمكن احاطتها بهذا السياج



Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh
Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh
Imad Odeh

Q3- A box with no top is to be built by taking a 12 *by* 16 sheet of cardboard, cutting x *in*. squares out of each corner and folding up the sides. Find the value of x that maximizes the volume of the box.

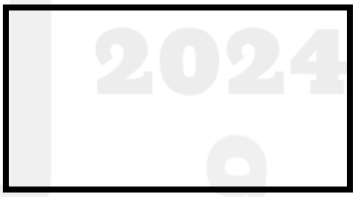
س 3 يراد صنع صندوق مفتوح من الأعلى باستخدام قطعة من الكرتون طولها $\boldsymbol{16\ in}$ وعرضها $\boldsymbol{12\ in}$ وذلك بقطع مربعات متساوية طول ضلع كل منها يساوي $\boldsymbol{x\ in}$ عند كل زاوية من زواياها ثم يتم ثنيها للحصول على الصندوق اوجد قيمة $\boldsymbol{x}$ والتي تجعل حجم الصندوق ابر ما يمكن



Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh
Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh

Q4 A rectangle has length $\boldsymbol{x}$ $\boldsymbol{m}$ and its perimeter is $\boldsymbol{20\ m}$ What is the maximum area of such a rectangle?

س4 مستطيل طوله $\boldsymbol{x}$ متر ومحيطه يساوي $\boldsymbol{20\ m}$ اوجد أكبر مساحة للمستطيل



Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh

Imad Odeh

Q5	The energy required for a bird to fly at speed $\boldsymbol{v}$ is proportional to $\boldsymbol{P}$ Find $\boldsymbol{v}$ that satisfies the largest value of energy	س5 الطاقة اللازمة لطائر لكي يطير بسرعة vتتناسب مع $\boldsymbol{P}$ اوجد $\boldsymbol{v}$ التي تحقق القيمة الصغرى للطاقة

$$\boldsymbol{P = \frac{1}{v} + cv^3} \quad , \qquad \boldsymbol{c > 0}$$

Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh

Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh

Q6	Find the maximum area of a rectangle having a base on the x-axis and upper vertices on the parabola	س6 اوجد مساحة المستطيل ذو أكبر مساحة والذي يقع رأسين من رؤوسه على محور $\boldsymbol{x}$والرأسان الاخران على منحنى الدالة

$$\boldsymbol{y = 12 - x^2}$$

Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh

Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh

Imad Odeh

المعدّلات المرتبطة
3.8 RELATED RATES

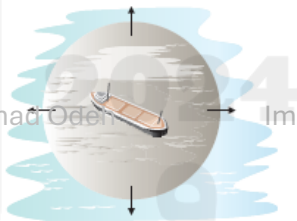
1. أقرأ المسألة جيدًا، ثم أُحدِّد المُتغيِّر الذي أُريد إيجاد مُعدَّل تغيُّره، ومُعدَّلات التغيُّر المعطاة. 2. أرسم مُخطَّطًا يُمثِّل المسألة، ثم أُدوِّن عليه المعلومات المُهِمَّة لحلِّ المسألة، مثل: الكميات الثابتة، والكميات المُتغيِّرة بمرور الزمن. 3. أكتب معادلة تربط بين المُتغيِّر الذي أُريد إيجاد مُعدَّل تغيُّره والمُتغيِّرات التي علمْتُ مُعدَّلات تغيُّرها. 4. أستعمل قاعدة السلسلة والاشتقاق الضمني لإيجاد مشتقة طرفي المعادلة بالنسبة إلى t. المُتغيِّر الوسيط 5. أُعوِّض في المعادلة الناتجة جميع القِيَم المعلومة للمُتغيِّرات ومُعدَّلات تغيُّرها، 6. أحُلُّ المعادلة تبعًا لمُعدَّل التغيُّر المطلوب إيجاده.	1. Make a simple sketch, if appropriate. 2. Set up an equation relating all of the relevant quantities. 3. Differentiate (implicitly) both sides of the equation with respect to time (t). 4. Substitute in values for all known quantities and derivatives. 5. Solve for the remaining rate.

Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh

EXAMPLE 8.1 مثال 8-1

An oil tanker has an accident, and oil pours out at the rate of **150** gallons per minute. Suppose that the oil spreads onto the water in a circle at a thickness of $\frac{1}{10}''$ Given that 1 ft3 equals **7.5** gallons, determine the rate at which the radius of the spill is increasing when the radius reaches **500 feet**.

تعرضت ناقلة نفط لحادث وتسرب النفط بمعدل 150 جالون /دقيقة على فرض ان النفط ينتشر على الماء في دائرة بسمك $\frac{1}{10}''$ اعتبر ان $1ft^3$ **يساوي** جالون **7.5** اوجد معدل تزايد نصف قطر التسرب عند وصول القطر الى $500ft$



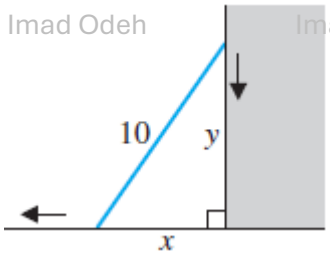
Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh
Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh
Imad Odeh

EXAMPLE 8.2

A $\mathbf{10}\ \boldsymbol{ft}$ ladder leans against the side of a building. If the top of the ladder begins to slide down the wall at the rate of $\mathbf{2}\ \boldsymbol{ft/sec}$, how fast is the bottom of the ladder sliding away from the wall when the top of the ladder is $\mathbf{8}\ \boldsymbol{ft}$ off the ground?

مثال 8-2

يرتكز سلم بطول $\mathbf{10}\ \boldsymbol{ft}$ على جانب المبنى. إذا بدأ الجزء العلوي من السلم في الانزلاق إلى أسفل الجدار بمعدل $\mathbf{2}\ \boldsymbol{ft/sec}$ ، فما سرعة انزلاق الجزء السفلي من السلم مبتعدًا عن الحائط عندما يكون الجزء العلوي من السلم مرتفعًا عن الأرض ب $\mathbf{8}\ \boldsymbol{ft}$



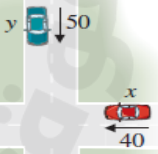
Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh
Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh

EXAMPLE 8.3

A car is traveling at 50 mph due south at a point $\frac{1}{2}$ mile north of an intersection. A police car is traveling at 40 mph due west at a point $\frac{1}{4}$ mile east of the same intersection. At that instant, the radar in the police car measures the rate at which the distance between the two cars is changing. What does the radar gun register?

مثال 8-3

تسير سيارة شرطة بسرعة $\mathbf{50}\boldsymbol{mph}$ تجاه الجنوب من نقطة تبعد شمال التقاطع $\frac{1}{2}\boldsymbol{mi}$. وتسير سيارة شرطة بسرعة $\mathbf{40}\boldsymbol{mph}$ من نقطة تبعد $\frac{1}{4}\boldsymbol{mi}$ شرق التقاطع نفسه. في هذه اللحظة، يقيس الرادار في سيارة الشرطة المعدل الذي تتغير به المسافة بين السيارتين. فما الذي سيسجله جهاز الرادار؟



Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh
Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh

EXAMPLE 8.4

A small company estimates that when it spends x thousand dollars for advertising in a year, its annual sales will be described by $s = 60 - 40e^{-0.05x}$ thousand dollars. The four most recent annual advertising totals are given in the following table.

Year	1	2	3	4
Advertising Dollars	14,500	16,000	18,000	20,000

Estimate the current (year 4) value of $x'(t)$ and the current rate of change of sales.

مثال 8-4

تقوم شركة صغيرة بتقدير أنه عند إنفاق ألف درهم على الإعلانات في السنة، فمن الممكن وصف مبيعاتها السنوية بالدالة $s = 60 - 40e^{-0.05x}$ ألف درهم. يوضح الجدول التالي آخر أربعة إجماليات للإعلانات السنوية.

قدر القيمة الحالية (السنة 4) ل $x'(t)$ والمعدل الحالي للتغير في المبيعات.

Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh
Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh

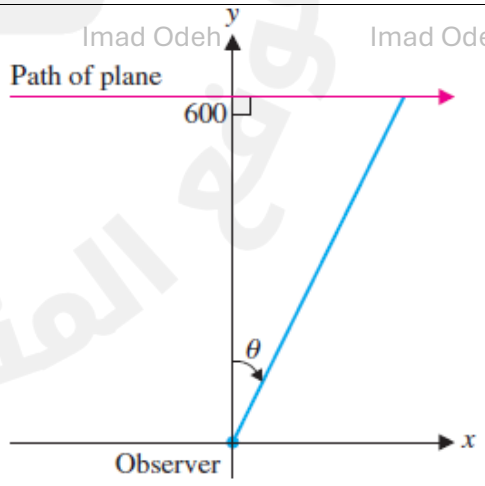
EXAMPLE 8.5

A spectator at an air show is trying to follow the flight of a jet. The jet follows a straight path in front of the observer at **540 *mph***. At its closest approach, the jet passes **600 *feet*** in front of the person. Find the maximum rate of change of the angle between the spectator's line of sight and a line perpendicular to the flight path, as the jet flies by.

مثال 8-5

يحاول مراقب عرض جوي تتبع رحلة لطائرة نفاثة. تسير الطائرة النفاثة في خط مستقيم أمام المراقب بسرعة **540 *mph***. وعند أقرب نقطة لها، تمر الطائرة النفاثة أمام المراقب على بعد **600 *feet*** جد معدل تغير الزاوية بين خط نظر المراقب والخط العمودي على مسار الطيران، عند مرور الطائرة النفاثة به.

Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh



Imad Odeh

EXERCISES 3.8 تمارين

Q1 Assume that the infected area of an injury is circular.
(a) If the radius of the infected area is **3 *mm*** and growing at a rate of **1 *mm/hr***, at what rate is the infected area increasing?
(b) Find the rate of increase of the infected area when the radius reaches **6 *mm***. Explain in commonsense terms why this rate is larger than that of part (a).

س1 افترض أن المنطقة المصابة دائرية.
(أ) إذا كان نصف قطر المنطقة المصابة 3 مم وينمو بمعدل 1 مم/ساعة، فما معدل زيادة المنطقة المصابة؟
(ب) أوجد معدل زيادة المنطقة المصابة عندما يصل نصف القطر إلى 6 مم. اشرح بمصطلحات منطقية لماذا يكون هذا المعدل أكبر من المعدل في الجزء (أ).

Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh

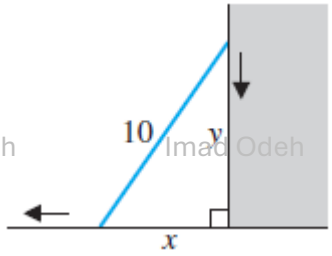
Q2 Suppose a forest fire spreads in a circle with radius changing at a rate of **5 feet per minute**. When the radius reaches **200 feet**, at what rate is the area of the burning region increasing?

س2 حريق في الغابة انتشر في دائرة يتغير نصف قطرها بمعدل 5 أقدام في الدقيقة. اوجد معدل تزايد مساحة المنطقة المحترقة عندما يصل نصف القطر إلى 200 قدم؟

Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh
Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh
Imad Odeh

Q3 A **10** ft ladder leans against the side of a building. If the bottom of the ladder is pulled away from the wall at the rate of **3** ft/s and the ladder remains in contact with the wall,
(a) find the rate at which the top of the ladder is dropping when the bottom is **6** ft from the wall.
(b) Find the rate at which the angle between the ladder and the horizontal is changing when the bottom of the ladder is **6** ft from the wall.

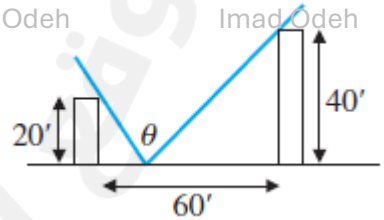
س3 يتكئ سلم طوله **10 أقدام** على جانب مبنى. إذا تم سحب الجزء السفلي من السلم بعيدًا عن الحائط بمعدل **3 أقدام/ثانية** وظل السلم على اتصال بالحائط،
(أ) أوجد المعدل الذي ينخفض به الجزء العلوي من السلم عندما يكون الجزء السفلي على بعد **6 أقدام** من الحائط.
(ب) أوجد المعدل الذي تتغير به الزاوية بين السلم والأفقي عندما يكون الجزء السفلي من السلم على بعد **6 أقدام** من الحائط.



Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh
Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh

Q4 Two buildings of height **20** $feet$ and **40** $feet$, respectively, are **60** $feet$ apart. Suppose that the intensity of light at a point between the buildings is proportional to the angle $\boldsymbol{\theta}$ in the figure.
(a) If a person is moving from right to left at **4** ft/s, at what rate is $\boldsymbol{\theta}$ changing when the person is exactly halfway between the two buildings?
(b) Find the location at which the angle $\boldsymbol{\theta}$ is maximum.

س4 مبنيان ارتفاعهما 20 قدمًا و40 قدمًا على التوالي، ويفصل بينهما 60 قدمًا. افترض أن شدة الضوء عند نقطة بين المبنيين تتناسب مع الزاوية θ في الشكل.
(أ) إذا كان شخص يتحرك من اليمين إلى اليسار بسرعة 4 أقدام/ثانية، فما معدل تغير الزاوية θ عندما يكون الشخص في منتصف المسافة تمامًا بين المبنيين؟
(ب) أوجد الموقع الذي تكون فيه الزاوية θ في أقصى حد لها.



Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh
Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh

Q5	A plane is located $x = 40$ miles (horizontally) away from an airport at an altitude of h miles. Radar at the airport detects that the distance $s(t)$ between the plane and airport is changing at the rate of $s'(t) = -240\ mph$. **(a)** If the plane flies toward the airport at the constant altitude $h = 4$, what is the speed $\|x'(t)\|$ of the airplane? **(b)** Repeat with a height of $6\ miles$. Based on your answers, how important is it to know the actual height of the airplane?	س5 توجد طائرة على مسافة $x = 40$ ميلاً (أفقيًا) من مطار على ارتفاع h أميال. يكتشف الرادار في المطار أن المسافة $s(t)$ بين الطائرة والمطار تتغير بمعدل $s'(t) = -240$ ميلاً في الساعة. (أ) إذا طارت الطائرة باتجاه المطار على ارتفاع ثابت $h = 4$، فما سرعة $\|x'(t)\|$ الطائرة؟ (ب) كرر ذلك على ارتفاع 6 أميال. بناءً على إجاباتك، ما مدى أهمية معرفة الارتفاع الفعلي للطائرة؟

Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh

Q6-	A camera tracks the launch of a vertically ascending spacecraft. The camera is located at ground level 2 miles from the launchpad. If the spacecraft is $3\ miles$ up and traveling at $0.2\ mile\ per\ second$, at what rate is the camera angle (measured from the horizontal) changing?	س 6 ترصد كاميرا انطلاق مركبة فضائية تنطلق عموديا، إذا كانت الكاميرا على بعد 2 ميل من نقطة انطلاق المركبة اوجد سرعة تغير زاوية رصد المركبة إذا كانت سرعة انطلاق المركبة 0.2ميل/الثانية عندما تكزن على ارتفاع 3 ميل

Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh

Imad Odeh

Q7- Sand is dumped such that the shape of the sandpile remains a cone with height equal to twice the radius. If the sand is dumped at the constant rate of $36ft^3/s$.
Find the rate t which the radius is increasing when the height reaches $6\ ft$.
(Hint: Cone volume $v = \frac{1}{3}\pi r^2 h$)

س 7 يسقط الرمل بحيث يشكل الرمل كومة على شكل مخروطي بارتفاع يساوي مثلي نصف القطر. إذا الرمال يسقط بمعدل ثابت قدره $36ft^3/s$ اوجد المعدل الذي يزداد فيه نصف القطر عندما يصل الارتفاع إلى 6 أقدام.
(تلميح: حجم المخروط $\left(v = \frac{1}{3}\pi r^2 h\right)$

Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh

Q8- A dock is $6\ ft$ above water. Suppose you stand on the edge of the dock and pull a rope attached to a boat at the constant rate of $2\ ft/s$. Assume that the boat remains at water level. At what speed is the boat approaching the dock when it is $20\ ft$ from the dock?

س 8 رصيف على ارتفاع 6 أقدام فوق الماء. لنفترض أنك تقف على حافة الرصيف وتسحب حبلًا مربوطًا بقارب بمعدل ثابت قدره 2 قدم/ثانية. افترض أن القارب لا يزال عند مستوى الماء. ما السرعة التي يقترب بها القارب من الرصيف عندما يكون على بعد 20 قدمًا من الرصيف؟

Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh
Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh

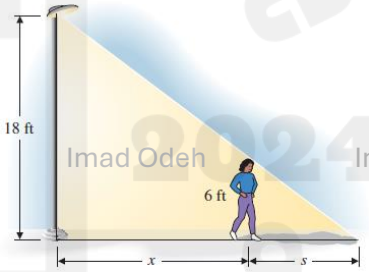
Q9- Suppose that you are blowing up a balloon by adding air at the rate of $1\ ft^3/s$. If the balloon maintains a spherical shape, the volume and radius are related by $V = \frac{4}{3}\pi r^3$. Compare the rate at which the radius is changing when $r = 0.01$ ft versus when $r = 0.1\ ft$.

س 9 لنفترض أنك تقوم بنفخ بالون بإضافة الهواء بمعدل $1\ ft^3/s$. إذا كان البالون يحتفظ بشكله الكروي، فإن الحجم ونصف القطر يرتبطان بـ $V = \frac{4}{3}\pi r^3$. قارن معدل تغير نصف القطر عندما يكون $r = 0.01$ قدم مقابل عندما يكون $r = 0.1$ قدم

Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh

Q10- Suppose a 6-ft-tall person is $12\ ft$ away from an $18\ ft$-tall lamppost. If the person is moving away from the lamppost at a rate of $2\ ft/s$, at what rate is the length of the shadow changing?

س 10 افترض أن شخصًا يبلغ طوله 6 أقدام يبعد 12 قدمًا عن عمود إنارة طوله 18 قدمًا. إذا كان الشخص يتحرك بعيدًا عن عمود الإنارة بمعدل $2\ ft/s$، فما المعدل الذي يتغير به طول الظل؟



Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh
Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh
Imad Odeh

Q11 Suppose a forest fire spreads in a circle with radius changing at a rate of $5\ ft/min$. When the radius reaches $200\ ft$, at what rate is the area of the burning region increasing?

س11 حريق غابات ينتشر على شكل دائرة حيث يتغير نصف قطرها بمعدل $5ft/min$. اوجد معدل تغير مساحة المنطقة المحترقة عندما يكون نصف قطرها $200ft$

Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh
Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh

Q12 Sand is poured from the pipe with rate $9\ m^3/s$ So that formed a conical pile by a height equal to half the diameter of the base of the cone. Find the rate of increase in the height of the sand pile when it reaches a height of 3 meters.

س12 ينصب رمل من أنبوب بمعدل $9\ m^3/sec$ بحيث يشكل كومة مخروطية ارتفاعها يساوي نصف قطر قاعدة المخروط. اوجد معدل تزايد ارتفاع كومة الرمل عندما يكون ارتفاعها $3m$

Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh
Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh

Q13	L and M two vertical roads in **C**, a gas station is $\mathbf{12\ km}$ on M road from the intersection point **C**. If a car moves towards **C** with velocity $\mathbf{26\ km/h}$. find the rate of changing distance between the car and the station when car about 5 km from C	س13 M و L طريقان مستقيمان متعامدان في النقطة $\boldsymbol{C}$. تقع محطة وقود على الطريق M وتبعد $12\boldsymbol{km}$ عن نقطة التقاطع $\boldsymbol{C}$. أذا تحركت سيارة على الطريق L بسرعة $26\ \boldsymbol{km/h}$ في اتجاه النقطة $\boldsymbol{C}$, فما معدل تغير المسافة بين السيارة ومحطة الوقود عندما تكون السيارة على بعد $\boldsymbol{5\ km}$ من نقطة التقاطع ؟

Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh
Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh

Q14	An isosceles triangle $\mathbf{10\ cm}$ each and the angle between them $\boldsymbol{\theta}$ if the angle change with rate $\frac{\pi}{60}\ \boldsymbol{rad\ /min}$. Find the rate of change of the tringle area when $\boldsymbol{\theta = \frac{\pi}{3}}$	س14 مثلث متطابق الضلعين طول كل من ضلعيه المتطابقين $\mathbf{10\ cm}$ وقياس الزاوية بينهما θ إذا تغيرت θ بمعدل $\boldsymbol{\pi/60\ \ rad/min}$. فان معدل تغير مساحة المثلث عندما $\boldsymbol{\theta=\pi/3}$ هو

Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh
Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh
Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh
Imad Odeh

Q15 The radius of a circle is changing at the rate of $\frac{1}{\pi}\ in/s$.
At what rate is the circle's area changing when $r = 5\ in$?

س15 يتغير نصف قطر دائرة بمعدل $\frac{1}{\pi}$ in/s اوجد معدل تغير مساحة الدائرة عندما يكون نصف قطرها 5cm

Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh
Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh
Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh
Imad Odeh

3.9

معدلات التغير في الاقتصاد والعلوم

RATES OF CHANGE IN ECONOMICS AND THE SCIENCES

EXAMPLE 9.1 مثال 9-1

Suppose that على فرض أن

$$C(x) = 0.02x^2 + 2x + 4000$$

is the total cost (in dollars) for a company to produce x units of a certain product.
Compute the marginal cost at $x = 100$ and compare this to the actual cost of producing the 100^{th} unit

هو إجمالي التكلفة بالدرهم لشركة تنتج x وحدة من منتجات معينة. اوجد قيمة التكلفة الحدية عند $x = 100$ وقارنها بالتكلفة الفعلية لإنتاج 100 وحدة.

Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh

EXAMPLE 9.2 مثال 9-2

Suppose that على فرض ان

$$C(x) = 0.02x^2 + 2x + 4000$$

is the total cost (in dollars) for a company to produce x units of a certain product.
Find the production level x that minimizes the average cost

هي التكلفة الإجمالية (بالدولار) التي تتحملها الشركة لإنتاج x وحدات من منتج معين.
اوجد مستوى الإنتاج x الذي يحقق القيمة الصغرى لمتوسط التكلفة

Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh
Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh
Imad Odeh

EXAMPLE 9.2 مثال 9-2

Let $R(x)$ be the revenue and $C(x)$ be the cost of manufacturing x items. Profit is defined as

ليكن $R(x)$ هو الإيراد و $C(x)$ هو تكلفة تصنيع x من العناصر. يتم تعريف الربح على أنه

$$P(x) = R(x) - C(x)$$
$$R(x) = 10x - 0.001x^2$$
$$C(x) = 2x + 5000$$

Find the maximum profit

اوجد القيمة العظمى للأرباح

Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh

Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh

EXAMPLE 9.3 مثال 9-3

Suppose that

على فرض أن

$$f(p) = 400(20 - p)$$

is the demand for an item at price p (in AED) with $p < 20$.

هو طلب منتج معين بسعر p بالدرهم حيث $p < 20$

(a) Find the elasticity of demand.

أ) جد مرونة الطلب.

(b) Find the range of prices for which $E < -1$. Compare this to the range of prices for which revenue is a decreasing function of p.

ب) اوجد مدى السعر التي تجعل $E < -1$

قارن مدى الأسعار الذي تكون فيه الايرادات دالة متناقصة ل p

Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh

Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh

Imad Odeh

EXAMPLE 9.4

مثال 9-4

In an autocatalytic chemical reaction, the reactant and the product are the same. The reaction continues until some saturation level is reached. From experimental evidence, chemists know that the reaction rate is jointly proportional to the amount of the product present and the difference between the saturation level and the amount of the product.
If the initial concentration of the chemical is **0** and the saturation level is **1** (corresponding to **100**%), this means that the concentration $\boldsymbol{x(t)}$ of the chemical satisfies the equation

في التفاعل الكيميائي ذاتي التحفيز تتشابه المواد المتفاعلة والمنتج. يستمر التفاعل حتى الوصول إلى مستوى التشبع. يعرف الكيميائيين من الأدلة التجريبية أن سرعة التفاعل تتناسب مع قيمة المنتج المعروض والفرق بين مستوى التشبع وقيمة المنتج. إذا كان التركيز الأولي من المادة الكيميائية هو 0 ومستوى التشبع هو 1 (بما يناظر 100%)فهذا يعني أن التركيز $x(t)$ للمادة الكيميائية يحقق المعادلة

$$\boldsymbol{x'(t) = rx(t)[1 - x(t)]}, \text{ where } \boldsymbol{r > 0} \text{ is a constant.}$$

Find the concentration of chemical for which the reaction rate $x'(t)$ is a maximum

جد تركيز المادة الكيميائية الذي تصل فيه سرعة تفاعلها $\boldsymbol{x'(t)}$ الى القيمة العظمى

Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh

Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh

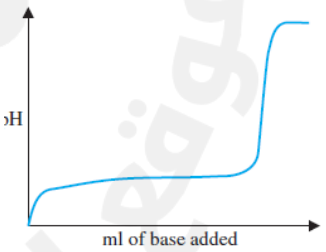
EXAMPLE 9.5

مثال 9-5

Find the value of $\boldsymbol{x}$ at which the rate of change of $\boldsymbol{pH}$ is the smallest. Identify the corresponding point on the titration curve in Figure

$$\boldsymbol{p(x) = c + ln\frac{x}{1-x}}$$

جد قيمة $\boldsymbol{x}$ التي يكون فيها معدل تغير الرقم الهيدروجيني $\boldsymbol{pH}$ صغير جدا. حدد النقطة المقابلة على منحنى المعايرة في الشكل



Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh

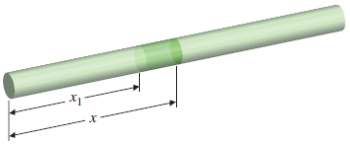
Imad Odeh

EXAMPLE 9.6

Suppose that the mass of the first x meters of a thin rod is given by $f(x) = \sqrt{2x}$. Compute the linear density at $x = 2$ and at $x = 8$, and compare the densities at the two points

مثال 9-6

على فرض أن كثافة الأمتار الأولى من قضيب معدني رقيق تعطى بالدالة $f(x) = \sqrt{2x}$ فاحسب الكثافة الخطية عند $x = 2$ وعند $x = 8$ ، وقارن الكثافتين عند النقطتين.



Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh

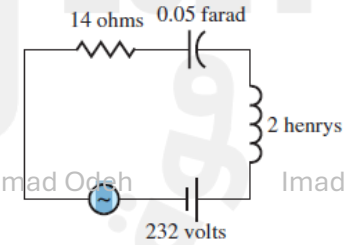
EXAMPLE 9.7

The electrical circuit shown in Figure includes a $14-ohm$ resistor, a $2-henry\ inductor$, a $0.05-farad$ capacitor and a battery supplying $232\ volts$ of AC current modeled by the oscillating function $232\ sin\ 2t$, where t is measured in seconds.
Find the current in the circuit at any time t.

$$Q(t) = 10e^{-5t} + 2te^{-2t} + 3\ sin2t - 7cos\ 2t\ coulombs$$

مثال 9-7

تتضمن الدارة الكهربائية المبينة في الشكل مقاوم 14 أوم وأداة ومعايق 2 هنري ومكثّف 0.05فاراد وبطارية إمداد 232 فولت من التيار المتردد المنمذج بالدالة المتذبذبة $232\sin 2t$ حيث إن تقاس بالثواني. فجد التيار في الدارة عند أي وقت t



Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh

Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh

EXAMPLE 9.8 مثال 9-8

Suppose that a population grows according to the equation $p'(t) = 2p(t)[1 - p(t)]$ (the logistic equation with $r = 2$). Find the population for which the growth rate is a maximum. Interpret this point graphically.

على فرض أن النمو السكاني يعطى بالمعادلة المعادلة
$p'(t) = 2p(t)[1 - p(t)]$
(اللوجستية باستخدام $r = 2$)
جد التعداد السكاني الذي يكون فيه معدل النمو هو القيمة العظمى. فسّر هذه النقطة بيانيًا.

Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh
Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh

Q1- If the cost of manufacturing x items is $C(x)$ find the marginal cost at $x = 30$

$$C(x) = x^3 + 20x^2 + 90x + 15$$

س 1 إذا كانت تكلفة تصنيع x منتج هي $C(x)$ اوجد التكلفة الحدية عند $x = 30$

Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh
Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh
Imad Odeh

Q2- Suppose that $C(x) = 10e^{0.02x}$ is the total cost (in dollars) for a company to produce x units of a certain product.

س (2) افترض ان $C(x) = 10e^{0.02x}$ هي التكلفة الكلية بالدولار لإنتاج x من الوحدات

a) Compute the **marginal cost at** $x = 100$

أ) اوجد التكلفة الحدية لإنتاج $x = 100$

Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh

b) **Actual cost of** producing the **100th unit**

ب) اوجد التكلفة الفعلية لإنتاج $x = 100$

Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh

c) Find the production level that will **minimize** the average cost.

جـ) اوجد مستوى الإنتاج والذي يجعل التكلفة المتوسطة اقل ما يمكن

Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh

Imad Odeh

Q3- The cost of manufacturing x items is given by

س 3 اذا كانت تكلفة تصنيع x عناصر تعطى بالعلاقة

$$C(x) = 0.02x^2 + 20x + 1800$$

a) Compute the **marginal cost at** $x = 20$

ت) اوجد التكلفة الحدية لإنتاج $x = 20$

Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh

b) **Actual cost of** producing the **20th unit**

ث) اوجد التكلفة الفعلية لإنتاج $x = 20$

Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh

Q4- Suppose that $f(p) = 200(30 - p)$is the **demand.**

س 4 على فرض ان دالة الطلب هي $f(p) = 200(30 - p)$

a) Find the **elasticity of demand**.

أ) **اوجد مرونة الطلب**

Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh

b) Find the **range of prices** for which the **demand is elastic** $(E < -1)$

ب) **اوجد مدى السعر الذي يكون عنده الطلب مرن** $(E < -1)$

Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh

c) Compare this to **the range of prices** for which **revenue** is a **decreasing function of** p..

جـ) **قارن مدى السعر الذي قمت بإيجاده سابقا بالسعر الذي يجعل العائد يتناقص**

Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh

Imad Odeh

Q5- If the concentration of a **chemical changes** according to the equation

س 5 إذا كان التركيز الكيميائي يتغير وفقا للمعادلة التالية

$$x'(t) = 2x(t)[4 - x(t)]$$

a) Find the **concentration** $x(t)$ for which the **reaction rate is maximum**

أ) اوجد التركيز الذي يحقق أكبر قيمة لسرعة التفاعل

Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh

b) Find The **Limiting concentration.**

ب) اوجد حدود التركيز

Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh

Q6- If the concentration of a **chemical changes** according to the equation

س 6 إذا كان التركيز الكيميائي يتغير وفقا للمعادلة التالية

$$x'(t) = 0.3x(t)[4 - x(t)]$$

Find the **concentration** $x(t)$ for which the **reaction rate is maximum**

ت) اوجد التركيز الذي يحقق أكبر قيمة لسرعة التفاعل

Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh

Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh

Imad Odeh

Q7- In the titration of a weak acid and strong base, the pH is given by $c + ln\frac{x}{1-x}$, where f is the fraction $(0 < x < 1)$ of converted acid. What happens to the rate of change of pH as x approaches 1?

س 7 عند معايرة حمض ضعيف مع قاعدة قوية يحدد الرقم الهيدروجيني بـ

$$pH = c + ln\frac{x}{1-x}$$

والذي في فيه الكسر ممثل بالدالة f $(0 < x < 1)$ ماذا يحدث لمعدل التغير في pH عندما تصل x الى 1

Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh
Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh

Q8- Suppose that the charge in an electrical circuit is $Q(t)$ coulombs. Find the current

$$Q(t) = e^{-2t}(cos\ 3t - 2\ sin\ 3t)$$

س 8 افرض ان الشحنة في دائرة كهربائية تعطى بالعلاقة $Q(t)$ اوجد التيار

Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh

Q9- Suppose that the charge in an electrical circuit is $Q(t)$ coulombs. Find the current

$$Q(t) = e^{-3t}\ sin\ 2t$$

س 9 افرض ان الشحنة في دائرة كهربائية تعطى بالعلاقة $Q(t)$ اوجد التيار

Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh
Imad Odeh

Q10- Suppose that the charge in an electrical circuit is $Q(t)$ coulombs. Find the current

$$Q(t) = e^{-3t}(\cos 2t + 4\sin 3t)$$

س 10 افرض ان الشحنة في دائرة كهربائية تعطى بالعلاقة $Q(t)$ اوجد التيار

Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh

Q11- The mass of the first x meters of a thin rod is given by the function $m(x)$ on the indicated interval.
Find the linear mass density function for the rod. Briefly describe the composition of the rod.

س 11 إذا كانت كتلة ال x متر الأولى من قضيب معدني تعطى بالعلاقة $m(x)$ في الفترة المعطاة اوجد الدالة الخطية لكثافة الكتلة للقضيب المعدني في كل مما يلي.
باختصار صف تركيب القضيب المعدني

a) $m(x) = 4x - \sin x$ grams for $0 \le x \le 6$

Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh

b) $m(x) = 4x$ $\quad grams\ for\ 0 \le x \le 2$

Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh

c) $m(x) = (x-1)^3 + 6x$ $\quad grams\ for\ 0 \le x \le 2$

Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh

d) $m(x) = 4x^2$ $\quad grams\ for\ 0 \le x \le 2$

Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh

Imad Odeh

Q12- Suppose that a **population grows** according to the logistic growth equation.

س 12 افرض ان النمو السكاني يعطى وفقا لمعادلة النمو اللوجيستي التالية

$$p'(t) = 2p(t)[7 - 2p(t)].$$

Find the **population** for which the **growth rate is a maximum**.

اوجد التعداد السكاني والتي يصل عندها معدل النمو السكاني القيمة العظمى

Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh

Q13- Suppose that a **population grows** according to the logistic growth equation.

س 13 افرض ان النمو السكاني يعطى وفقا لمعادلة النمو اللوجيستي التالية

$$p'(t) = 4p(t)[5 - p(t)].$$

Find the **population** for which the **growth rate is a maximum**.

اوجد التعداد السكاني والتي يصل عندها معدل النمو السكاني القيمة العظمى

Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh

Imad Odeh

Q14- Suppose that the mass of the first x meters of a thin rod is given by

س 14 افترض أن كتلة أول x أمتار من قضيب رفيع تعطى بالعلاقة

$$m(x) = 20 + x^2 \ for \ 0 \leq x \leq 4$$

Find the density of the rod and briefly describe the composition of the rod.

اوجد كثافة القضيب ثم اعطى وصفا لتركيب القضيب

Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh
Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh
Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh

اطيب التمنيات للجميع

Imad Odeh