NOTEBOOK

الرياضيات للصف الثاني عشر

المستوى المتقدم

للسنة الدراسية 2023/2024
الفصل الدراسي الثاني

+971566151988/
أ/ محمد طه

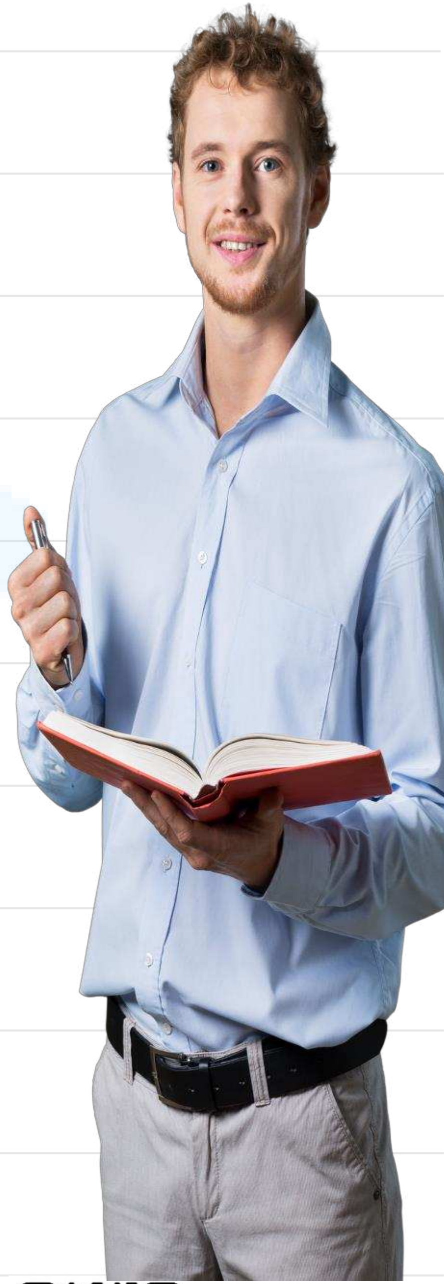
الوحدة الخامسة
التكامل

الدرس الثالث

اسم الدرس : المساحة

أهداف التعلم

- تقريب قيمة المساحة تحت منحنى فى فترة معطاة باستخدام المستطيلات .
- حساب قيمة المساحة تحت المنحنى باستخدام المجاميع والنهايات

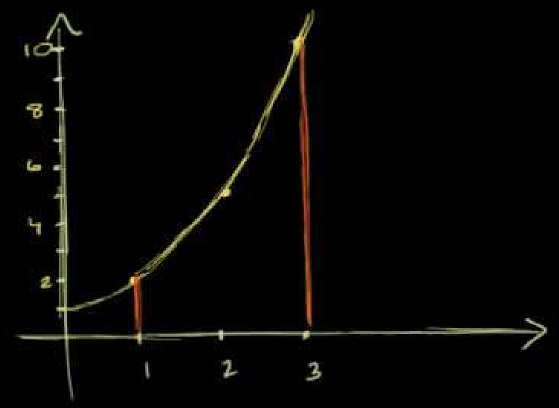


مفردات الدرس

- مجموع ريمان
- نقطة النهاية اليمنى
- نقطة النهاية اليسرى
- نقطة المنتصف

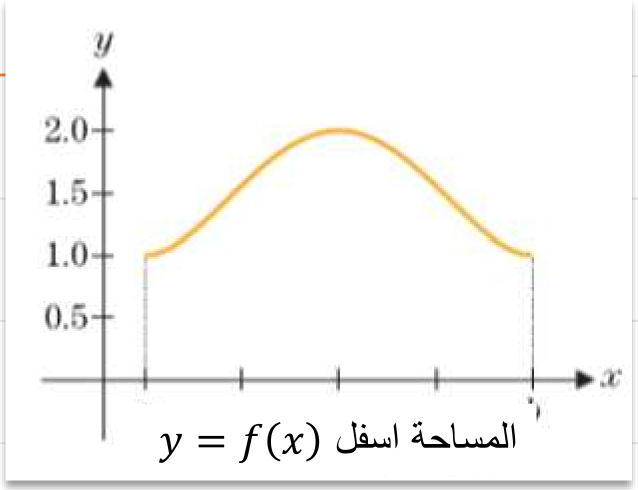
مقدمة

$f(x) = x^2 + 1$



لإيجاد قيمة المساحة تحت منحنى $y = f(x)$ وفوق محور السينات x على الفترة $[a,b]$

على فرض أن $f(x) \geq 0$ و f دالة متصلة فى الفترة $[a,b]$



لتقريب المساحة :

تجزئة :

تقسيم الفترة $[a,b]$ الى n فترات جزئية

طول كل فترة جزئية: $\Delta x = \dfrac{b-a}{n}$

النقاط

$x_0 = a$

$x_1 = x_0 + \Delta x$

$x_2 = x_1 + \Delta x$ وهكذا $\longrightarrow$ $x_i = a + i\Delta x$

$i = 1, 2, 3, \ldots\ldots n$

أنشئ مستطيلًا على كل فترة جزئية $[x_{i-1}, x_i]$

العرض Δx

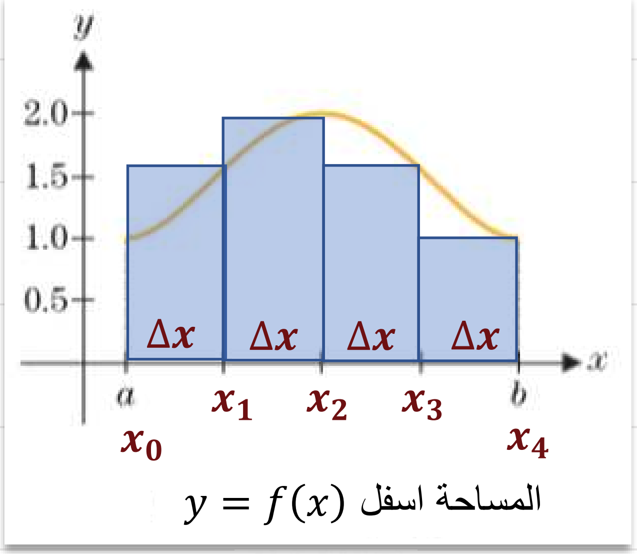
الطول $f(x_i)$ قيمة الدالة عند نقطة النهاية اليمنى للفترة الجزئية

إذًا المساحة تحت منحنى $y = f(x)$ هي تقريبًا مجموع مساحات المستطيلات

المساحة : $A \approx$ مجموع مساحة المستطيلات

المساحة : $A \approx f(x_1)\Delta x + f(x_2)\Delta x + f(x_3)\Delta x + \cdots. + f(x_n)\Delta x$

$$\boxed{A \approx A_n = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x}$$



على فرض أن $n = 4$

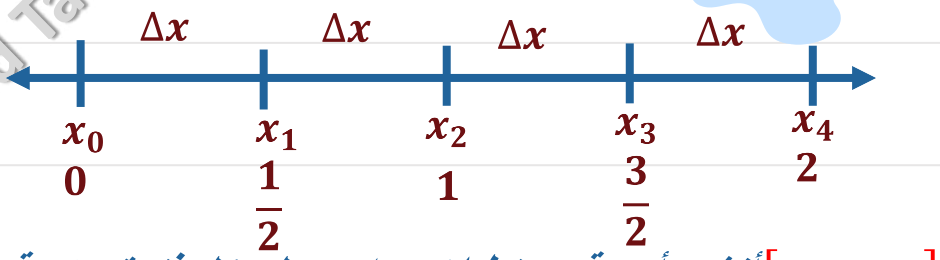
المساحة $= A \approx A_4 = f(x_1)\Delta x + f(x_2)\Delta x + f(x_3)\Delta x + f(x_4)\Delta x$

تقريب المساحة باستخدام المستطيلات

مثال

أوجد قيمة تقريبية لمساحة المنطقة تحت المنحنى $y = f(x) = x^2 + 1$ على الفترة $[0,2]$، باستخدام 4 مستطيلات.

الحل



$f(x) = x^2 + 1$ على $[0, 2]$

عدد الفترات الجزئية : $n = 4$

طول الفترة الجزئية : $\Delta x = \dfrac{b-a}{n} \longrightarrow \Delta x = \dfrac{2-0}{4} = \dfrac{1}{2}$

النقاط : $x_0 = a = 0$

$x_1 = x_0 + \Delta x = 0 + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

$x_2 = x_1 + \Delta x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$

$x_3 = x_2 + \Delta x = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$

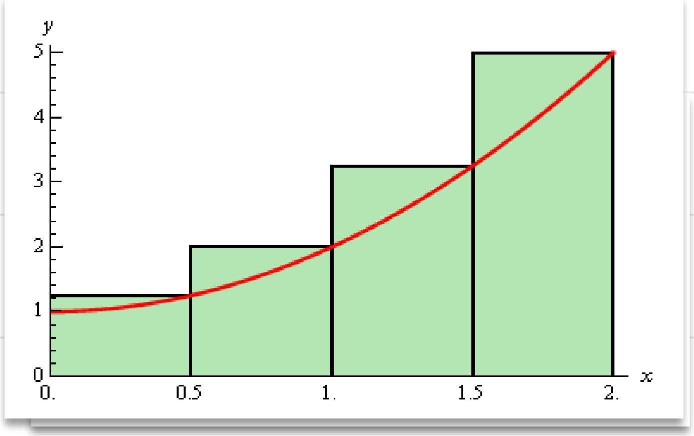
$x_4 = x_3 + \Delta x = \frac{3}{2} + \frac{1}{2} = 2 = b$

الفترات الجزئية : $\left[0, \frac{1}{2}\right], \left[\frac{1}{2}, 1\right], \left[1, \frac{3}{2}\right]$ و $\left[\frac{3}{2}, 2\right]$

أنشئ أربعة مستطيلات واحد على كل فترة جزئية $[x_{i-1}, x_i]$

العرض Δx الطول $f(x_i)$

قيمة الدالة عند نقطة النهاية اليمنى للفترة الجزئية



المساحة ≈ مجموع مساحات المستطيلات الأربعة

$$A \approx A_n = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x$$

$$A \approx A_4 = \sum_{i=1}^{4} f(x_i)\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{4} f(x_i)$$

$$A_4 = \frac{1}{2}\left[f(x_1) + f(x_2) + f(x_3) + f(x_4)\right]$$

$$A_4 = \frac{1}{2}\left[f\left(\frac{1}{2}\right) + f(1) + f\left(\frac{3}{2}\right) + f(2)\right]$$

$$A_4 = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{5}{4}\right) + (2) + \left(\frac{13}{4}\right) + (5)\right] = 5.75$$

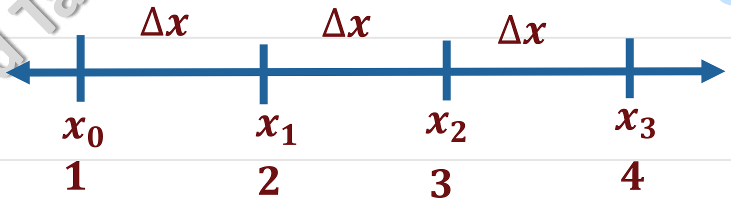
+971566151988/
أ/ محمد طه

تقريب المساحة باستخدام المستطيلات

تمرين

أوجد قيمة تقريبية لمساحة المنطقة تحت منحنى $y = f(x) = \frac{1}{x}$ على الفترة $[1,4]$، باستخدام 3 مستطيلات.

الحل



$f(x) = \frac{1}{x}$ على $[1, 4]$

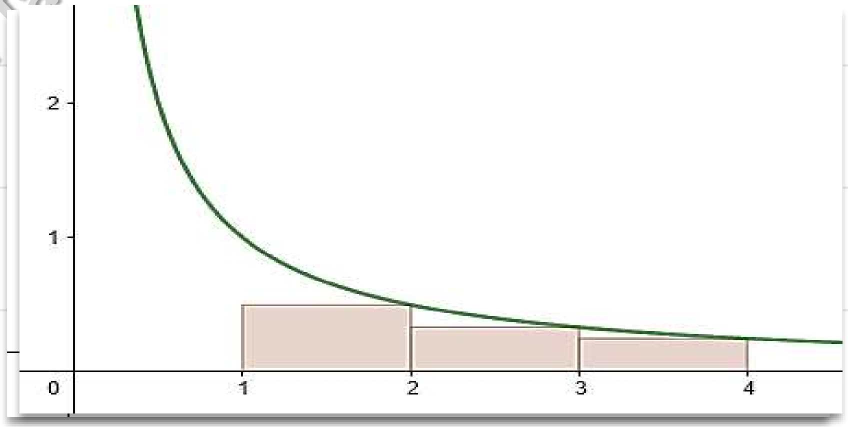
عدد الفترات الجزئية : $n = 3$

طول الفترة الجزئية : $\Delta x = \frac{b-a}{n} \longrightarrow \Delta x = \frac{4-1}{3} = 1$

أنشئ ثلاثة مستطيلات واحد على كل فترة $[x_{i-1}, x_i]$

العرض: Δx الطول: $f(x_i)$

قيمة الدالة عند نقطة النهاية اليمنى للفترة الجزئية



المساحة ≈ مجموع مساحات المستطيلات الثلاثة

$$A \approx A_n = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x$$

$$A \approx A_3 = \sum_{i=1}^{3} f(x_i)\Delta x = \sum_{i=1}^{3} f(x_i)(1)$$

$$A_3 = [f(x_1) + f(x_2) + f(x_3)]$$

$$A_3 = [f(2) + f(3) + f(4)]$$

$$A_3 = \left[\left(\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{4}\right)\right] = \frac{13}{12}$$

النقاط :

$x_0 = a = 1$

$x_1 = x_0 + \Delta x = 1 + 1 = 2$

$x_2 = x_1 + \Delta x = 2 + 1 = 3$

$x_3 = x_2 + \Delta x = 3 + 1 = 4 = b$

الفترات الجزئية

$[1, 2], [2, 3]$ and $[3, 4]$

+971566151988/

أ/ محمد طه

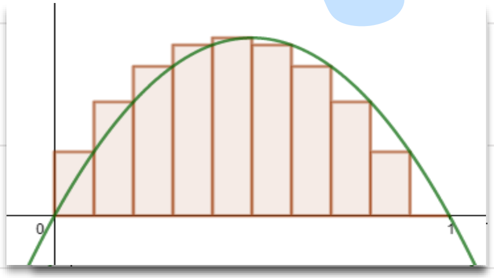
تقريب المساحة باستخدام المستطيلات

مثال

3.1صفحة340

أوجد قيمة تقريبية لمساحة المنطقة تحت منحنى $y = f(x) = 2x - 2x^2$ على الفترة $[0,1]$، باستخدام 10 مستطيلات.

الحل



$f(x) = 2x - 2x^2$ على $[0,1]$

عدد الفترات الجزئية : $n = 10$

طول الفترة الجزئية : $\Delta x = \dfrac{b-a}{n} \longrightarrow \Delta x = \dfrac{1-0}{10} = \dfrac{1}{10}$

النقاط

$x_i = a + i\Delta x$

$x_i = \dfrac{i}{10}$ $\quad i = 1, 2, 3, \ldots\ldots, 10$

$$A \approx A_n = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x$$

قيمة الدالة عند نقطة النهاية اليمنى للفترة الجزئية $[x_{i-1}, x_i]$: $f(x_i)$

$i = 1, 2, 3, \ldots\ldots, 10$

$$A \approx A_{10} = \sum_{i=1}^{10} f\left(\frac{i}{10}\right)\left(\frac{1}{10}\right)$$

$$A \approx A_{10} = \sum_{i=1}^{10}\left(2\left(\frac{i}{10}\right) - 2\left(\frac{i}{10}\right)^2\right)\left(\frac{1}{10}\right)$$

$$A \approx A_{10} = \frac{1}{10}\sum_{i=1}^{10}\left(2\left(\frac{i}{10}\right) - 2\left(\frac{i}{10}\right)^2\right)$$

$$= \frac{2}{100}\sum_{i=1}^{10} i - \frac{2}{1000}\sum_{i=1}^{10} i^2$$

$$A \approx A_{10} = \frac{1}{50} \times \frac{10(10+1)}{2} - \frac{1}{500} \times \frac{10(10+1)(2(10)+1)}{6}$$

$$A \approx A_{10} = \frac{1}{50} \times \frac{10(11)}{2} - \frac{1}{500} \times \frac{10(11)(21)}{6} = 0.33$$

تقريب المساحة باستخدام المستطيلات

تمرين

3.1صفحة340

أوجد قيمة تقريبية لمساحة المنطقة تحت منحنى $y = f(x) = 2x - 2x^2$ على الفترة $[0,1]$، باستخدام 20 مستطيلاً.

الحل

$f(x) = 2x - 2x^2$ على $[0, 1]$

عدد الفترات الجزئية : $n = 20$

طول الفترة الجزئية : $\Delta x = \dfrac{b-a}{n} \longrightarrow \Delta x = \dfrac{1-0}{20} = 0.05$

النقاط : $x_i = a + i\Delta x$

$x_i = 0.05i$ $\quad i = 1, 2, 3, \dots\dots, 10$

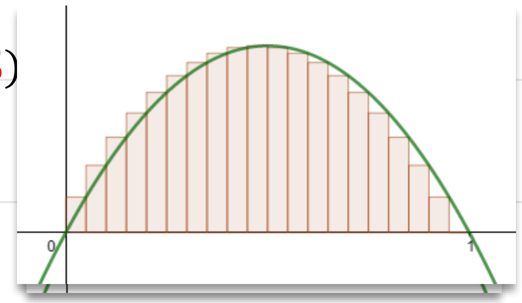
$$A \approx A_n = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x$$

قيمة الدالة عند نقطة النهاية اليمنى للفترة الجزئية $[x_{i-1}, x_i]$: $f(x_i)$

$i = 1, 2, 3, \dots\dots, 20$

$$A \approx A_{20} = \sum_{i=1}^{20} f(0.05i)(0.05)$$

$$A \approx A_{20} = \sum_{i=1}^{20} \left(2(0.05i) - 2(0.05i)^2\right)(0.05)$$



$$A \approx A_{20} = 0.05 \sum_{i=1}^{20} \left(2(0.05i) - 2(0.05i)^2\right)$$

$$= \frac{1}{200}\sum_{i=1}^{20} i - \frac{1}{4000}\sum_{i=1}^{20} i^2$$

$$A \approx A_{20} = \frac{1}{200} \times \frac{20(20+1)}{2} - \frac{1}{4000} \times \frac{20(20+1)(2(20)+1)}{6}$$

$$A \approx A_{20} = \frac{1}{200} \times \frac{20(21)}{2} - \frac{1}{4000} \times \frac{20(21)(41)}{6} = 0.3325$$

+971566151988/
أ/ محمد طه

تقريب المساحة باستخدام المستطيلات

تمرين

3.1صفحة340

أوجد قيمة تقريبية لمساحة المنطقة تحت منحنى $y = f(x) = 2x - 2x^2$ على الفترة $[0,1]$.

الحل

كلما كبر عدد المستطيلات المستخدمة نحصل على قيمة تقريبية للمساحة أفضل

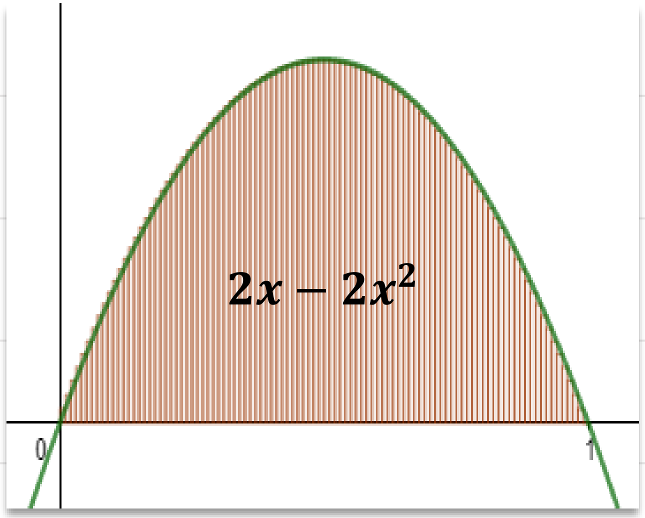
كلما كبرت n ستكون A_n قيمة تقريبية أفضل للمساحة الفعليّة.

$f(x) = 2x - 2x^2$ على $[0, 1]$

n	A_n
10	0.33
20	0.3325
30	0.332963
40	0.333125
50	0.3332
60	0.333241
70	0.333265
80	0.333281
90	0.333292
100	0.3333

$A_n \rightarrow \dfrac{1}{3}$

المساحة الدقيقة $= \dfrac{1}{3}$

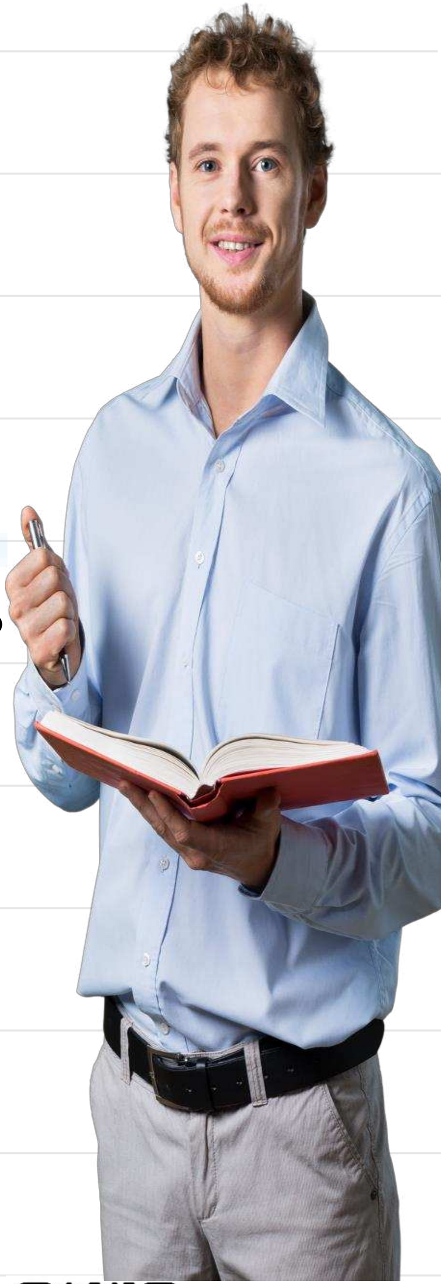


الدرس الثاني

+971566151988/
أ/ محمد طه

أهداف التعلم

- إيجاد قيمة المساحة تحت المنحنى باستخدام المجاميع والنهايات



التعريف3.1

لكل دالة f مُعرَّفة على الفترة $[a,b]$. إذا كانت f متصلة على $[a,b]$ و $f(x) \geq 0$ على $[a,b]$.
فإن المساحة A تحت منحنى $y = f(x)$ على $[a,b]$ تعطى بالصيغة :

$$A = \lim_{n\to\infty} A_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x$$

إيجاد قيمة المساحة بدقة

مثال

3.2صفحة341

جد المساحة تحت المنحنى $y = f(x) = 2x - 2x^2$ على الفترة $[0,1]$

الحل

$f(x) = 2x - 2x^2$ على $[0,1]$

لعدد n من الفترات الجزئية :

$$\Delta x = \frac{b-a}{n} \longrightarrow \Delta x = \frac{1-0}{n} = \frac{1}{n}$$

النقاط :

$$x_i = a + i\Delta x$$

$$x_i = \frac{i}{n} \qquad i = 1, 2, 3, \ldots..n$$

$$A \approx A_n = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x$$

قيمة الدالة عند نقطة النهاية اليمنى للفترة الجزئية $f(x_i) : [x_{i-1}, x_i]$

$$i = 1, 2, 3, \ldots\ldots, n$$

$$A \approx A_n = \sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{i}{n}\right)\left(\frac{1}{n}\right)$$

$$A \approx A_n = \sum_{i=1}^{n}\left(2\left(\frac{i}{n}\right) - 2\left(\frac{i}{n}\right)^2\right)\left(\frac{1}{n}\right)$$

$$A \approx A_n = \sum_{i=1}^{n}\left(2\left(\frac{1}{n}\right)\left(\frac{i}{n}\right) - 2\left(\frac{1}{n}\right)\frac{i^2}{n^2}\right)$$

$$A \approx A_n = \frac{2}{n^2}\sum_{i=1}^{n} i - \frac{2}{n^3}\sum_{i=1}^{n} i^2$$

$$A \approx A_n = \frac{2}{n^2} \times \frac{n(n+1)}{2} - \frac{2}{n^3} \times \frac{n(n+1)(2(n)+1)}{6}$$

$$A \approx A_n = \frac{(n+1)}{n} - \frac{(n+1)(2n+1)}{3n^2}$$

$$A \approx A_n = \frac{3n}{3n} \cdot \frac{(n+1)}{n} - \frac{(n+1)(2n+1)}{3n^2}$$

$$A \approx A_n = \frac{3n^2+3n}{3n^2} - \frac{2n^2+3n+1}{3n^2} = \frac{n^2-1}{3n^2}$$

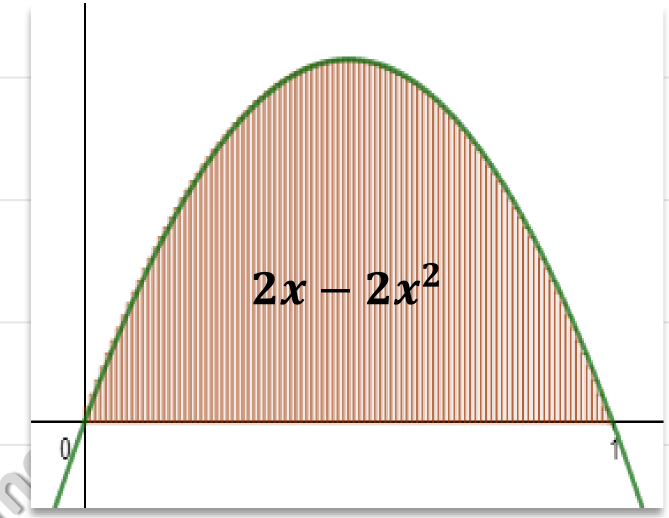
إيجاد قيمة المساحة بدقة

مثال

3.2صفحة341 :

جد المساحة تحت المنحنى $y = f(x) = 2x - 2x^2$ على الفترة $[0,1]$

الحل



$$A \approx A_n = \frac{n^2 - 1}{3n^2}$$

$n = 200 \qquad A_{200} = \frac{(200)^2 - 1}{3(200)^2} = 0.333325$

$n = 500 \qquad A_{500} = \frac{(500)^2 - 1}{3(500)^2} = 0.333332$

حيث $n \to \infty$

المساحة :

$$A = \lim_{n\to\infty} A_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2 - 1}{3n^2}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1n^2}{3n^2} = \frac{1}{3}$$

إيجاد قيمة المساحة بدقة

تمرين

Q13صفحة344

جد المساحة تحت المنحنى $y = f(x) = 2x^2 + 1$ على الفترة $[-1,1]$.

الحل

$f(x) = 2x^2 + 1$ على $[-1, 1]$

لعدد n من الفترات الجزئية :

$$\Delta x = \frac{b-a}{n} \longrightarrow \Delta x = \frac{1-(-1)}{n} = \frac{2}{n}$$

النقاط :

$$x_i = a + i\Delta x$$

$$x_i = -1 + i\frac{2}{n} \qquad i = 1, 2, 3, \ldots\ldots n$$

$$A \approx A_n = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x$$

$f(x_i)$: قيمة الدالة عند نقطة النهاية اليمنى للفترة الجزئية $[x_{i-1}, x_i]$

$$A \approx A_n = \sum_{i=1}^{n} f\left(-1 + i\frac{2}{n}\right)\left(\frac{2}{n}\right) \qquad i = 1, 2, 3, \ldots\ldots, n$$

$$A \approx A_n = \sum_{i=1}^{n} \left(2\left(-1 + i\frac{2}{n}\right)^2 + 1\right)\left(\frac{2}{n}\right)$$

$$A \approx A_n = \sum_{i=1}^{n} \left(2\left(1 - \frac{4i}{n} + \left(\frac{2i}{n}\right)^2\right) + 1\right)\left(\frac{2}{n}\right)$$

$$A \approx A_n = \sum_{i=1}^{n} \left(2 - \frac{8i}{n} + \frac{8i^2}{n^2} + 1\right)\left(\frac{2}{n}\right)$$

$$A \approx A_n = \sum_{i=1}^{n} \left(3 - \frac{8i}{n} + \frac{8i^2}{n^2}\right)\left(\frac{2}{n}\right)$$

$$A \approx A_n = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{6}{n} - \frac{16i}{n^2} + \frac{16i^2}{n^3}\right)$$

$$A \approx A_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{6}{n} - \frac{16}{n^2}\sum_{i=1}^{n} i + \frac{16}{n^3}\sum_{i=1}^{n} i^2$$

$$A \approx A_n = \frac{6}{n}(n) - \frac{16}{n^2} \times \frac{n(n+1)}{2} + \frac{16}{n^3} \times \frac{n(n+1)(2(n)+1)}{6}$$

إيجاد قيمة المساحة بدقة

تمرين Q13صفحة344

جد المساحة تحت المنحنى $y = f(x) = 2x^2 + 1$ على الفترة $[-1,1]$.

الحل

عندما $n \to \infty$

المساحة : $A = \lim_{n\to\infty} A_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x$

$$A = \lim_{n\to\infty}\left(6 - \frac{8n+8}{n} + \frac{16n^2+24n+8}{3n^2}\right)$$

$$A = \lim_{n\to\infty} 6 - \lim_{n\to\infty}\frac{8n+8}{n} + \lim_{n\to\infty}\frac{16n^2+24n+8}{3n^2}$$

$$A = 6 - \lim_{n\to\infty}\frac{8n}{1n} + \lim_{n\to\infty}\frac{16n^2}{3n^2}$$

$$A = 6 - 8 + \frac{16}{3} = \frac{10}{3}$$

$$A \approx A_n = \frac{6}{n}(n) - \frac{16}{n^2}\times\frac{n(n+1)}{2} + \frac{16}{n^3}\times\frac{n(n+1)(2(n)+1)}{6}$$

$$A \approx A_n = 6 - \frac{8(n+1)}{n} + \frac{8\,(n+1)(2n+1)}{3n^2}$$

$$A \approx A_n = 6 - \frac{8n+8}{n} + \frac{8\,(2n^2+3n+1)}{3n^2}$$

$$A \approx A_n = 6 - \frac{8n+8}{n} + \frac{16n^2+24n+8}{3n^2}$$

لقيم أكبر من n :

$n = 100$

$$A_{100} = 6 - \frac{8(100)+8}{100} + \frac{16(100)^2+24(100)+8}{3(100)^2} = 3.3336$$

$n = 500$

$$A_{500} = 6 - \frac{8(500)+8}{500} + \frac{16(500)^2+24(500)+8}{3(500)^2} = 3.333344$$

تقدير قيمة المساحة تحت المنحنى

مثال

3.3صفحة341

جد قيمة المساحة تحت منحنى $y = f(x) = \sqrt{x+1}$ على الفترة $[1,3]$.

الحل

$$A \approx A_n = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{\left(1 + \frac{2i}{n}\right) + 1}\left(\frac{2}{n}\right)$$

$$A \approx A_n = \frac{2}{n} \sum_{i=1}^{n} \sqrt{2 + \frac{2i}{n}}$$

لا يوجد صيغة لتبسيط المجموع

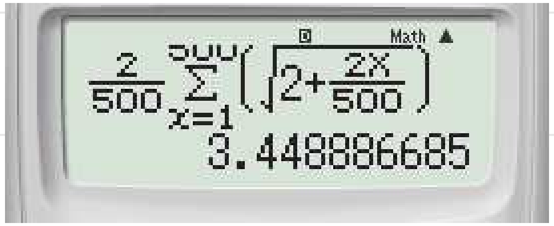
نقوم بتقدير المساحة بإيجاد قيمة A_n لعدد كبير من قيم n عن طريق الحاسبة

$n = 500$

$$A_{500} = \frac{2}{500} \sum_{i=1}^{500} \sqrt{2 + \frac{2i}{500}}$$

$= 3.448886685$

استخدم الآلة الحاسبة



$f(x) = \sqrt{x+1}$ على $[1,3]$

لعدد n من الفترات الجزئية :

$$\Delta x = \frac{b-a}{n} \longrightarrow \Delta x = \frac{3-1}{n} = \frac{2}{n}$$

النقاط:

$x_i = a + i\Delta x$

$x_i = 1 + i\frac{2}{n}$ $\quad i = 1, 2, 3, \dots\dots n$

$f(x_i)$: قيمة الدالة عند نقطة النهاية اليمنى للفترة الجزئية $[x_{i-1}, x_i]$

$$A \approx A_n = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x$$

$$A \approx A_n = \sum_{i=1}^{n} \left(\sqrt{x_i + 1}\right)\left(\frac{2}{n}\right) \quad i = 1, 2, 3, \dots\dots, n$$

تقدير قيمة المساحة تحت المنحنى

مثال

3.3صفحة341

جد قيمة المساحة تحت منحنى $y = f(x) = \sqrt{x+1}$ على الفترة $[1,3]$.

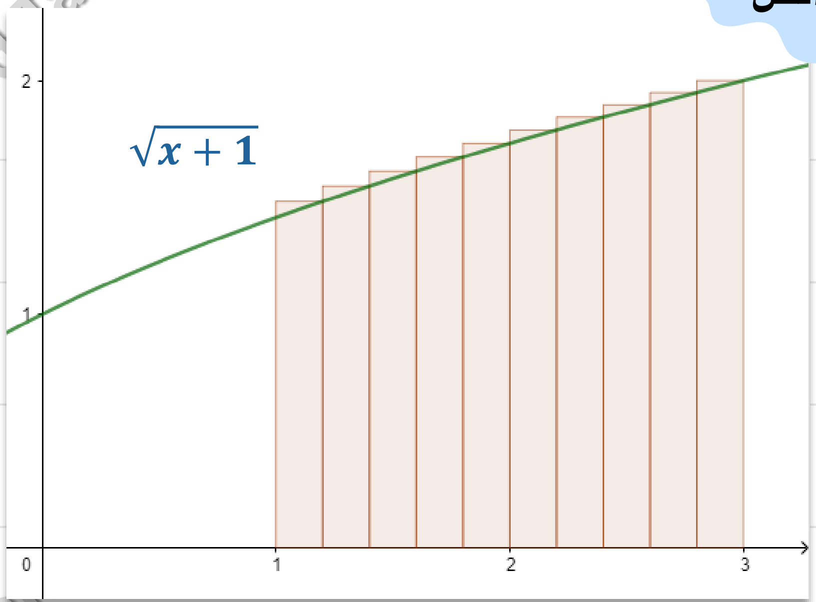
الحل

$f(x) = \sqrt{x+1}$ على $[1,3]$

$$A \approx A_n = \frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n}\sqrt{2+\frac{2i}{n}}$$

A_n لقيم مختلفة من n : (A_n تم تقريبها إلى أقرب 5 أرقام عشرية)

n	A_n
10	3.50595
50	3.45942
100	3.45357
500	3.44889
1000	3.44830
5000	3.44783



المساحة تقريبًا 3.44783

المساحة بدقة $= \dfrac{16-\sqrt{2^5}}{3} \approx 3.44771525$

تقدير قيمة المساحة تحت المنحنى

تمرين

جد المساحة تحت منحنى $y = f(x) = sinx$ على الفترة $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

الحل

لعدد n من الفترات الجزئية : $f(x) = sinx$ على $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

$$\Delta x = \frac{b-a}{n} \longrightarrow \Delta x = \frac{\frac{\pi}{2} - 0}{n} = \frac{\pi}{2n}$$

النقاط :

$$x_i = a + i\Delta x$$

$$x_i = i\frac{\pi}{2n} \qquad i = 1, 2, 3, \ldots\ldots n$$

$f(x_i)$: قيمة الدالة عند نقطة النهاية اليمنى للفترة الجزئية $[x_{i-1}, x_i]$

$$A \approx A_n = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x$$

$$A \approx A_n = \sum_{i=1}^{n} \sin(x_i)\left(\frac{\pi}{2n}\right) \qquad i = 1, 2, 3, \ldots\ldots, n$$

$$A \approx A_n = \sum_{i=1}^{n} \sin\left(\frac{\pi i}{2n}\right)\left(\frac{\pi}{2n}\right)$$

$$A \approx A_n = \frac{\pi}{2n}\sum_{i=1}^{n} \sin\left(\frac{\pi i}{2n}\right)$$

لا يوجد صيغة لتبسيط المجموع

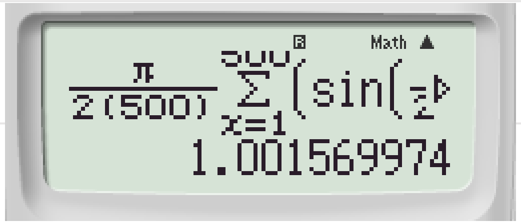
نقوم بتقدير المساحة بإيجاد قيمة A_n لعدد كبير من قيم n عن طريق الحاسوب

استخدم الآلة الحاسبة

$n = 500$

$$A_{500} = \frac{\pi}{2(500)}\sum_{i=1}^{500} \sin\left(\frac{\pi i}{2(500)}\right)$$

$$= 1.001569974$$



تقدير قيمة المساحة تحت المنحنى

تمرين

جد قيمة المساحة تحت منحنى $y = f(x) = sinx$ على الفترة $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

الحل

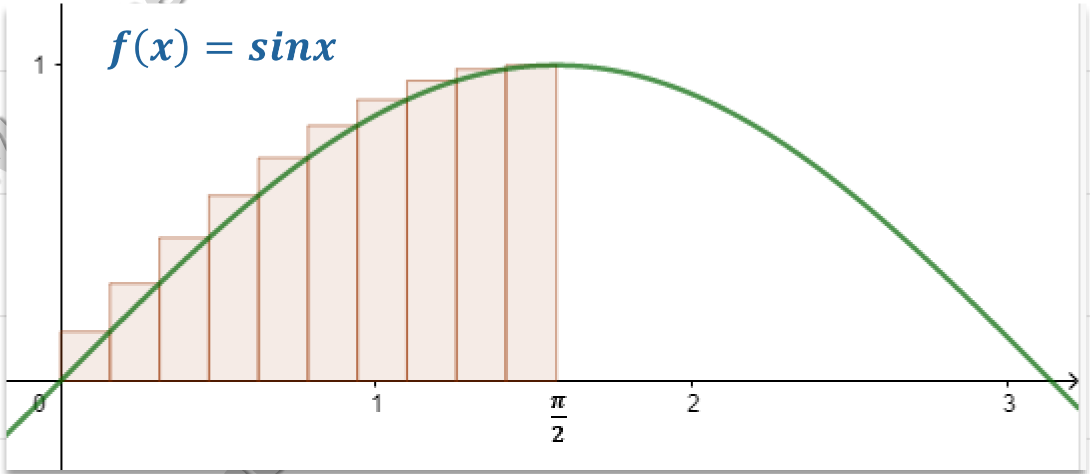
$f(x) = sinx$ على $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

$$A \approx A_n = \frac{\pi}{2n}\sum_{i=1}^{n} \sin\left(\frac{\pi i}{2n}\right)$$

A_n لقيم مختلفة من n :

(A_n تم تقريبها إلى أقرب 5 أرقام عشرية)

n	A_n
10	1.07648
50	1.01563
100	1.00783
500	1.00157
1000	1.00079

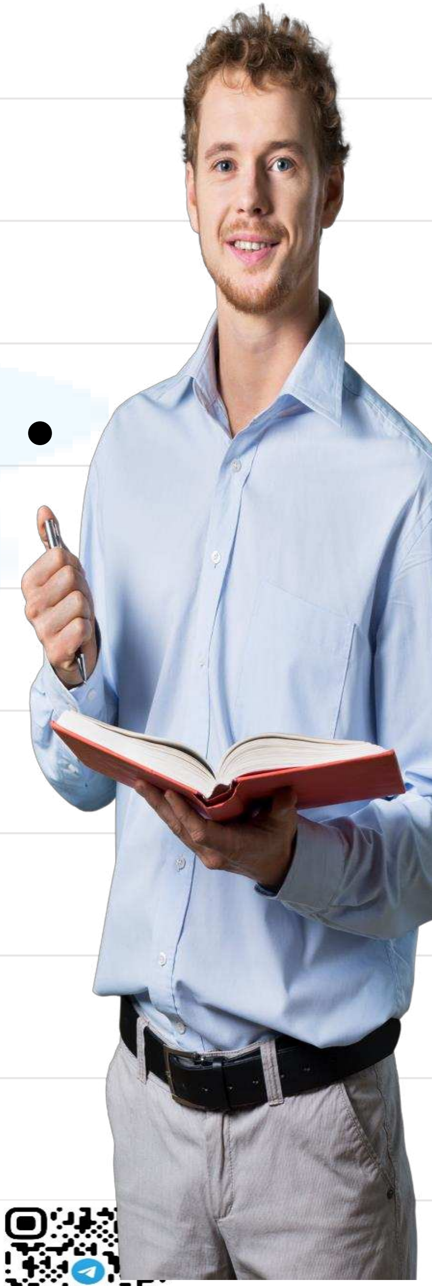


المساحة تقريبًا 1.00079

المساحة بدقة $= 1$

الدرس الثالث

أهداف التعلم



- إيجاد قيمة المساحة تحت المنحنى باستخدام المجاميع والنهايات

التعريف2 . 3

لتكن $\{x_0, x_1, x_2, \dots \dots, x_n\}$ تجزئة منتظمة للفترة $[a,b]$ ، حيث $x_i - x_{i-1} = \Delta x = \frac{b-a}{n}$ ،
لكل i . اختر النقاط $c_1, c_2, \dots \dots, c_n,$ حيث يكون c_i أى نقطة فى الفترة الجزئية $[x_{i-1}, x_i]$ ،
لكل $i = 1,2, \dots, n$ ، (وهذه النقاط تسمَّى نقاط القيم) . إنَّ مجموع ريمان لهذه التجزئة ومجموع نقاط القيم ، هو

$$\sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x$$

لدالة متصلة غير سالبة f ، تكون المساحة تحت المنحنى $y = f(x)$ هى نهاية مجاميع ريمان :

حيث $c_i = x_i$ (نقطة النهاية اليمنى) ، لكل $i = 1,2, \dots, n$

$$A = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x$$

تكون النهاية هى نفسها لأى اختيار من نقاط $c_i \in [x_{i-1}, x_i]$ لكل $i = 1,2, \dots, n$

اختيار نقطة القيمة

عندما لا نستطيع إيجاد قيمة نهاية مجموع ريمان (أو على الأقل ليس بشكل مباشر)

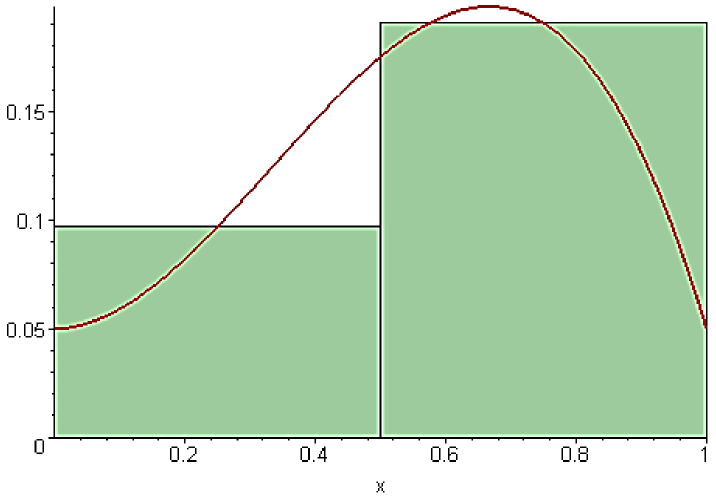
يمكننا تقريب المساحة بواسطة إيجاد قيمة مجاميع ريمان لقيم كبيرة من n

اختيار نقاط القيم

$c_i \in [x_{i-1}, x_i]$ لكل $i = 1,2,\ldots,n$

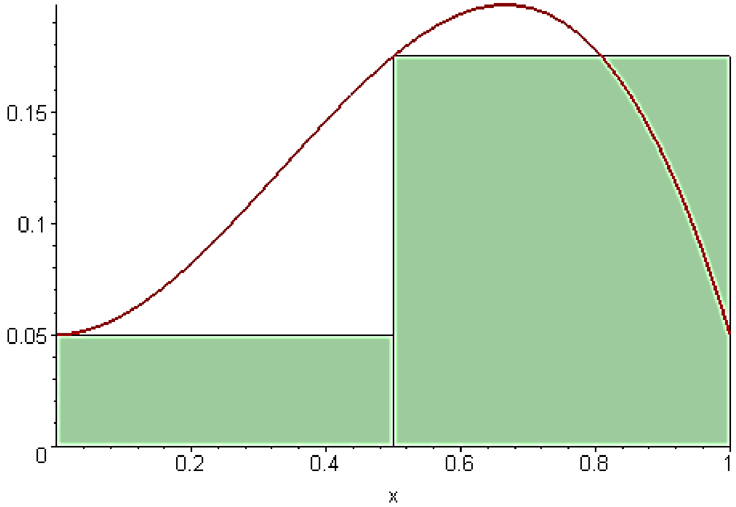
نقطة المنتصف

$$c_i = \frac{1}{2}(x_{i-1} + x_i)$$



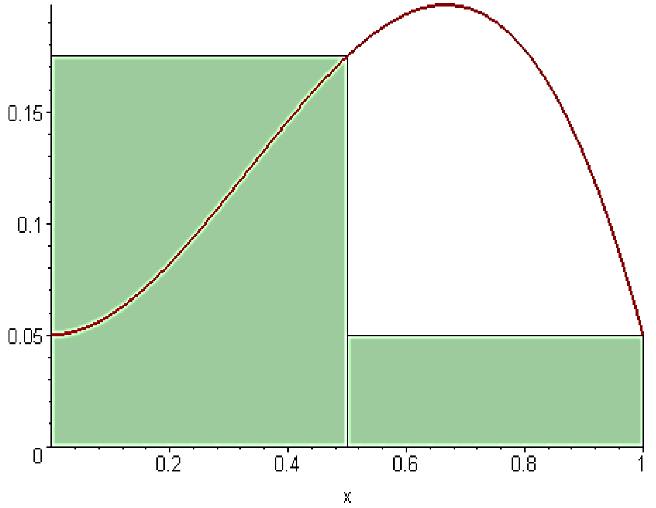
نقطة النهاية اليسرى

$$c_i = x_{i-1}$$



نقطة النهاية اليمنى

$$c_i = x_i$$



اختيار نقطة القيمة

اختيار نقاط القيم

$c_i \in [x_{i-1}, x_i]$ لكل $i = 1, 2, \ldots, n$

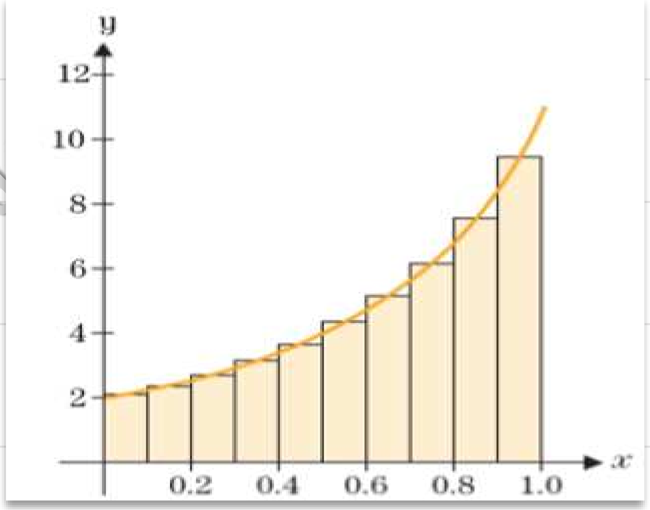
للدالة المتزايدة

مثال

$f(x) = 9x^2 + 2$ على $[0,1]$

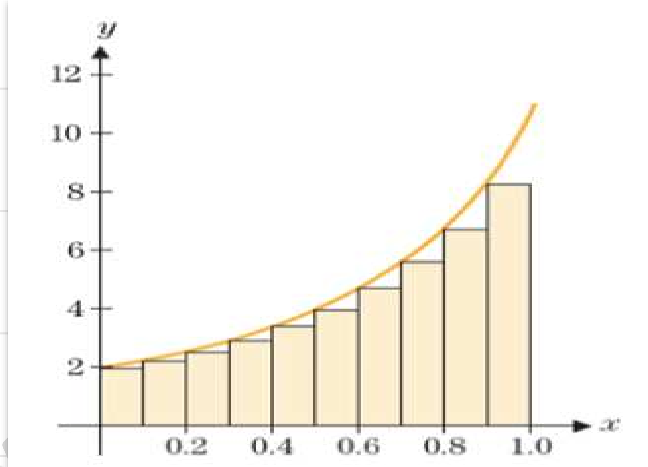
نقطة المنتصف

$$c_i = \frac{1}{2}(x_{i-1} + x_i)$$



نقطة النهاية اليسرى

$$c_i = x_{i-1}$$

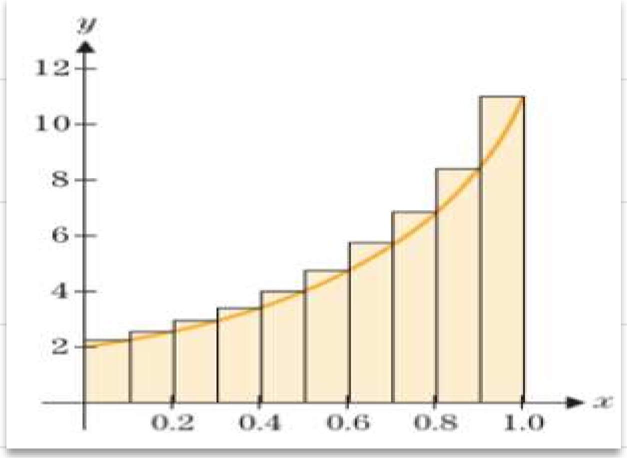


تعطي مساحة أقل من المساحة المقدرة

المساحة الدقيقة تحت المنحنى > المساحة المقربة

نقطة النهاية اليمنى

$$c_i = x_i$$



تعطي مساحة أكبر من المساحة المقدرة

المساحة الدقيقة تحت المنحنى < المساحة المقربة

اختيار نقطة القيمة

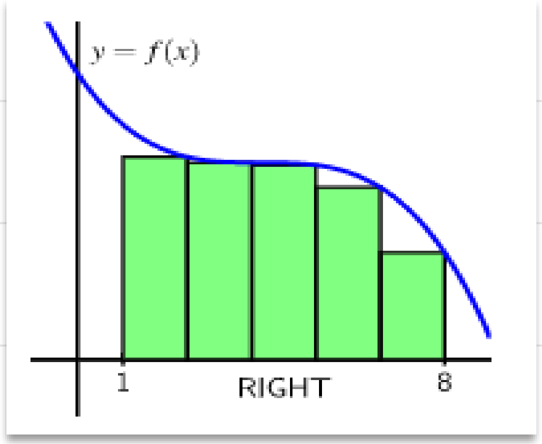
اختيار نقاط القيم

$c_i \in [x_{i-1}, x_i]$ لكل $i = 1, 2, \dots, n$

للدالة المتناقصة

نقطة النهاية اليمنى

$$c_i = x_i$$

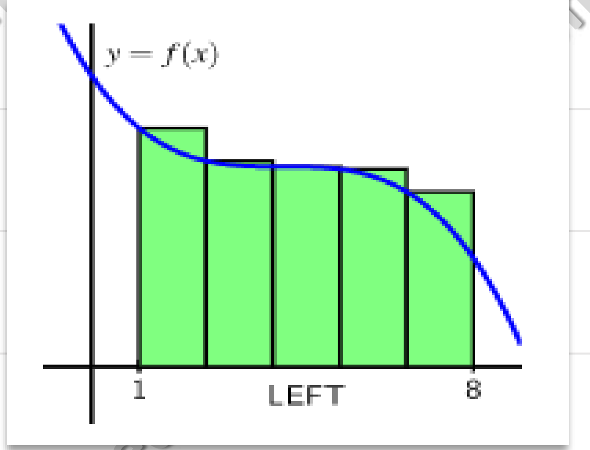


تعطي مساحة أقل من المساحة المقدرة

المساحة الدقيقة تحت المنحنى > المساحة المقربة

نقطة النهاية اليسرى

$$c_i = x_{i-1}$$

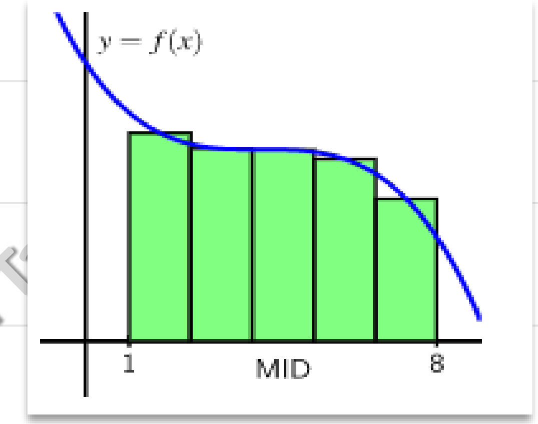


تعطي مساحة أكبر من المساحة المقدرة

المساحة الدقيقة تحت المنحنى < المساحة المقربة

نقطة المنتصف

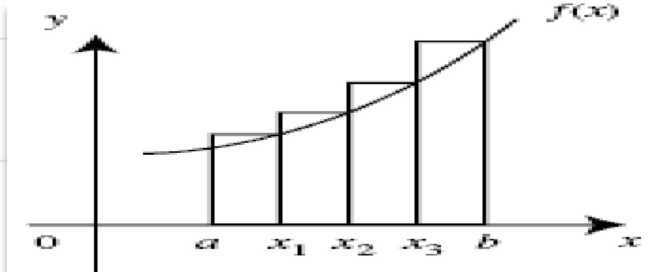
$$c_i = \frac{1}{2}(x_{i-1} + x_i)$$



اختيار نقطة القيمة

على $[a,b]$ $y = f(x)$ $\quad \Delta x = \dfrac{b-a}{n} \quad x_i = a + i\Delta x$

$c_i \in [x_{i-1}, x_i]$, حيث $i = 1, 2, \ldots, n$

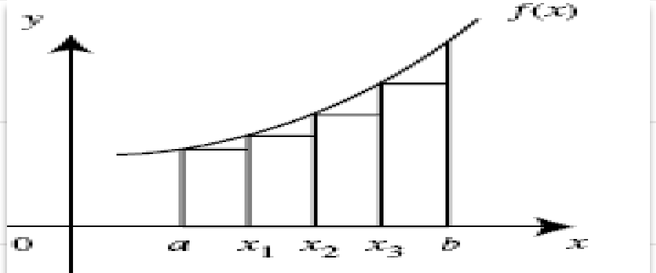


نقطة نهاية يمنى

مجموع ريمان : $$A_n = \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x$$

نقطة النهاية اليمنى $\quad c_i = x_i$

نقاط القيم $\quad c_i = a + i\Delta x$
$i = 1, 2, 3, \ldots, n$

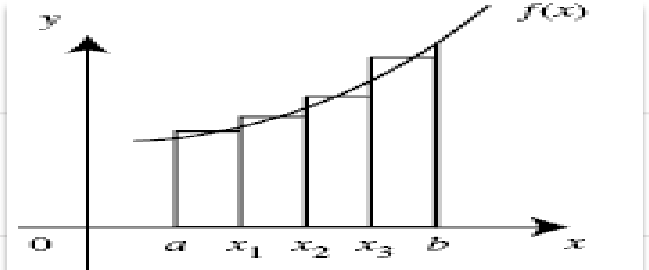


نقطة نهاية يسرى

مجموع ريمان : $$A_n = \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x$$

نقطة النهاية اليسرى $\quad c_i = x_{i-1}$

نقاط القيم $\quad c_i = a + (i-1)\Delta x$
$i = 1, 2, 3, \ldots, n$



نقطة منتصف

مجموع ريمان : $$A_n = \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x$$

نقطة المنتصف $\quad c_i = \dfrac{1}{2}(x_{i-1} + x_i)$

نقاط القيم $\quad c_i = a + \left(i - \dfrac{1}{2}\right)\Delta x$
$i = 1, 2, 3, \ldots, n$

تقدير قيمة المساحة باستخدام نقاط قيم مختلفة

تمرين

Q5صفحة344

قرّب المساحة تحت المنحنى $y = f(x) = x^2 + 1$ على الفترة $[0,1]$، باستخدام $n = 16$ مستطيلًا .
وقواعد القيم a) نقطة النهاية اليسرى b) نقطة المنتصف c) نقطة النهاية اليمنى

الحل

$f(x) = x^2 + 1$ على $[0,1]$

لـ $n = 16$ مستطيلًا :

$$\Delta x = \frac{b-a}{n} \longrightarrow \Delta x = \frac{1-0}{16} = \frac{1}{16}$$

$$x_0 = a = 0 \longrightarrow x_i = a + i\Delta x$$

$$x_i = \frac{i}{16}$$

a) نقطة النهاية اليسرى

$$c_i = a + (i-1)\Delta x \qquad i = 1, 2, 3, \ldots, n$$

$$c_i = \frac{i-1}{16} \qquad i = 1, 2, 3, \ldots, 16$$

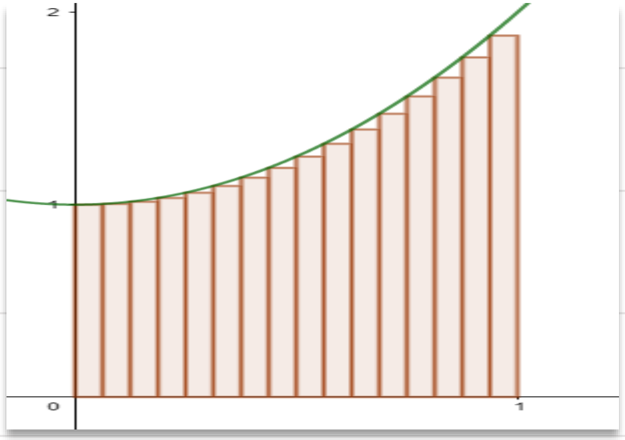
$$A \approx A_n = \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x$$

$$A \approx A_{16} = \sum_{i=1}^{16} f\left(\frac{i-1}{16}\right)\left(\frac{1}{16}\right) = \sum_{i=1}^{16}\left(\left(\frac{i-1}{16}\right)^2 + 1\right)\left(\frac{1}{16}\right)$$

$$A \approx A_{16} = \frac{1}{16}\sum_{i=1}^{16}\left(\left(\frac{i-1}{16}\right)^2 + 1\right)$$

$$A \approx A_{16} = \frac{1}{16}\sum_{i=1}^{16}\left(\frac{1}{16^2}(i-1)^2 + 1\right)$$

$$A \approx A_{16} = \frac{1}{16^3}\sum_{i=1}^{16}(i^2 - 2i + 1) + \frac{1}{16}\sum_{i=1}^{16} 1$$



$$= \frac{1}{16^3}\left(\frac{16(16+1)(2(16)+1)}{6} - 2\frac{16(16+1)}{2} + 1(16)\right) + \frac{1}{16}(1)(16)$$

$$A \approx A_{16} = \frac{1}{16^3}\left(\frac{16(17)(33)}{6} - 2\frac{16(17)}{2} + 16\right) + 1$$

$$A \approx A_{16} = 1.302734375$$

تقدير قيمة المساحة باستخدام نقاط قيم مختلفه

تمرين

Q5صفحة344

قرّب المساحة تحت المنحنى $y = f(x) = x^2 + 1$ على الفترة $[0,1]$، باستخدام $n = 16$ مستطيلاً .
وقواعد القيم (a نقطة النهاية اليسرى (b نقطة المنتصف (c نقطة النهاية اليمنى

الحل

$f(x) = x^2 + 1$ على $[0,1]$

لـ $n = 16$ مستطيلاً :

$$\Delta x = \frac{b-a}{n} \longrightarrow \Delta x = \frac{1-0}{16} = \frac{1}{16}$$

$$x_0 = a = 0 \longrightarrow x_i = a + i\Delta x \qquad x_i = \frac{i}{16}$$

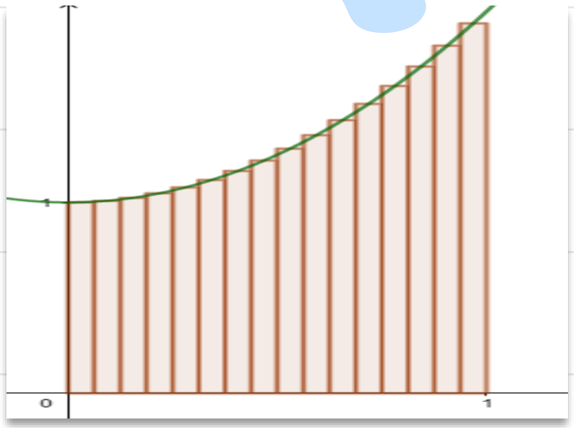
b) نقطة المنتصف

$$c_i = a + \left(i - \frac{1}{2}\right)\Delta x \qquad i = 1, 2, 3, \ldots, n$$

$$c_i = \frac{i - \frac{1}{2}}{16} \qquad c_i = \frac{i}{16} - \frac{1}{32} \qquad i = 1, 2, 3, \ldots, 16$$

$$A \approx A_n = \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x$$

$$A \approx A_{16} = \sum_{i=1}^{16} f\left(\frac{i}{16} - \frac{1}{32}\right)\left(\frac{1}{16}\right)$$



$$A \approx A_{16} = \frac{1}{16}\sum_{i=1}^{16}\left(\left(\frac{i}{16} - \frac{1}{32}\right)^2 + 1\right)$$

$$A \approx A_{16} = \frac{1}{16}\sum_{i=1}^{16}\left(\frac{1}{16^2}\left(i - \frac{1}{2}\right)^2 + 1\right)$$

$$A \approx A_{16} = \frac{1}{16^3}\sum_{i=1}^{16}\left(i^2 - i + \frac{1}{4}\right) + \frac{1}{16}\sum_{i=1}^{16} 1$$

$$= \frac{1}{16^3}\left(\frac{16(16+1)(2(16)+1)}{6} - \frac{16(16+1)}{2} + \frac{1}{4}(16)\right) + \frac{1}{16}(1)(16)$$

$$A \approx A_{16} = \frac{1}{16^3}\left(\frac{16(17)(33)}{6} - \frac{16(17)}{2} + 4\right) + 1$$

$$A \approx A_{16} = 1.333007813$$

تقدير قيمة المساحة باستخدام نقاط قيم مختلفه

تمرين

Q5صفحة344

قرّب المساحة تحت المنحنى $y = f(x) = x^2 + 1$ على الفترة $[0,1]$، باستخدام $n = 16$ مستطيلاً .
وقواعد القيم a) نقطة النهاية اليسرى b) نقطة المنتصف c) نقطة النهاية اليمنى

الحل

$f(x) = x^2 + 1$ على $[0,1]$

لـ $n = 16$ مستطيلاً :

$$\Delta x = \frac{b-a}{n} \longrightarrow \Delta x = \frac{1-0}{16} = \frac{1}{16}$$

$$x_0 = a = 0 \longrightarrow x_i = a + i\Delta x$$

$$x_i = \frac{i}{16}$$

c) نقطة النهاية اليمنى

$$c_i = a + i\Delta x \quad i = 1, 2, 3, \ldots, n$$

$$c_i = \frac{i}{16} \quad i = 1, 2, 3, \ldots, 16$$

$$A \approx A_n = \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x$$

$$A \approx A_{16} = \sum_{i=1}^{16} f\left(\frac{i}{16}\right)\left(\frac{1}{16}\right)$$

$$A \approx A_{16} = \frac{1}{16}\sum_{i=1}^{16}\left(\left(\frac{i}{16}\right)^2 + 1\right)$$

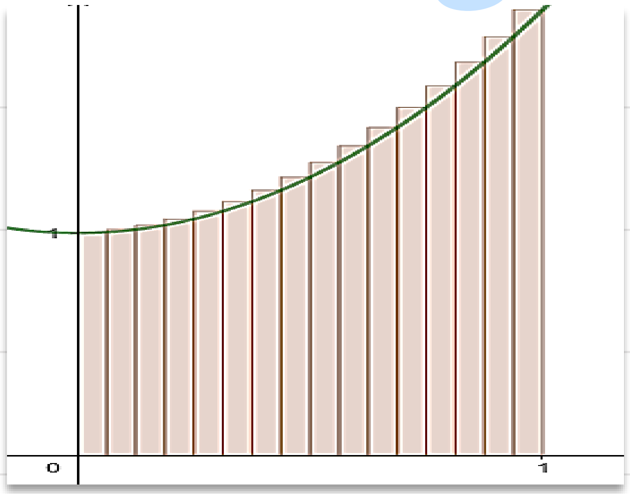
$$A \approx A_{16} = \frac{1}{16}\sum_{i=1}^{16}\left(\frac{1}{16^2}(i)^2 + 1\right)$$

$$A \approx A_{16} = \frac{1}{16^3}\sum_{i=1}^{16}(i^2) + \frac{1}{16}\sum_{i=1}^{16}1$$

$$= \frac{1}{16^3}\left(\frac{16(16+1)(2(16)+1)}{6}\right) + \frac{1}{16}(1)(16)$$

$$A \approx A_{16} = \frac{1}{16^3}\left(\frac{16(17)(33)}{6}\right) + 1$$

$$A \approx A_{16} = 1.3652343375$$



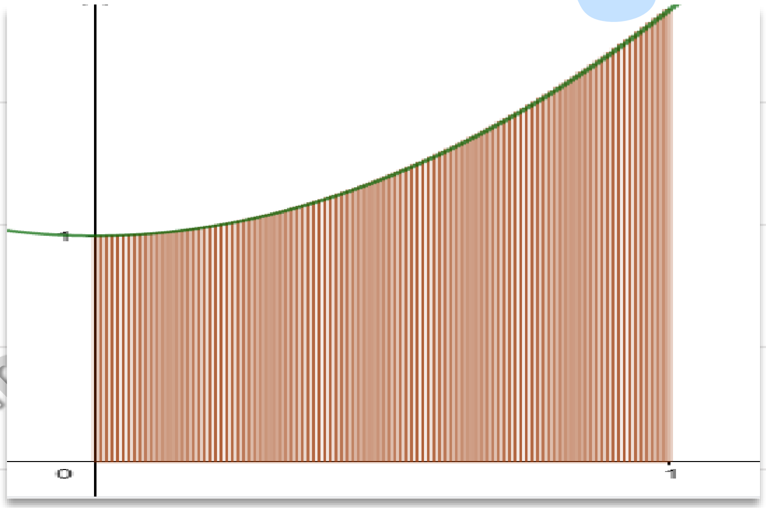
تقدير قيمة المساحة باستخدام نقاط قيم مختلفة

تمرين

Q5صفحة344

قرّب المساحة تحت المنحنى $y = f(x) = x^2 + 1$ على الفترة $[0,1]$، باستخدام $n = 16$ مستطيلًا .
وقواعد القيم (a نقطة النهاية اليسرى (b نقطة المنتصف (c نقطة النهاية اليمنى

الحل



a) نقطة النهاية اليسرى

$A_{16} = 1.302734375$

تعطي مساحة أقل من المساحة المقدّرة

b) نقطة المنتصف

$A_{16} = 1.333007813$

c) نقطة النهاية اليمنى

$A_{16} = 1.3652343375$

تعطي مساحة أكبر من المساحة المقدّرة

المساحة الدقيقة $A = \frac{4}{3} \approx 1.33333333$

نقطة المنتصف تعطي أدق تقريب

تقدير قيمة المساحة باستخدام نقاط قيم مختلفه

تمرين

Q8صفحة344

قرب المساحة تحت المنحنى $y = f(x) = e^{-2x}$ على الفترة $[-1,1]$، بأستخدام $n = 16$ مستطيلا . وقواعد القيم أ) نقطة النهاية اليسرى ب) نقطة المنتصف ج) نقطة النهاية اليمنى

الحل

$f(x) = e^{-2x}$ على $[-1,1]$

لـ $n = 16$ مستطيلًا :

$\Delta x = \dfrac{b-a}{n} \longrightarrow \Delta x = \dfrac{1-(-1)}{16} = \dfrac{1}{8}$

$x_0 = a = -1 \longrightarrow x_i = a + i\Delta x$

$x_i = -1 + \dfrac{i}{8}$

a) نقطة النهاية اليسرى

$c_i = x_0 + (i-1)\Delta x \qquad i = 1, 2, 3, \dots, n$

$c_i = -1 + \dfrac{i-1}{8}$

$c_i = -1 + \dfrac{i}{8} - \dfrac{1}{8} = \dfrac{i}{8} - \dfrac{9}{8} \qquad i = 1, 2, 3, \dots, 16$

$A \approx A_n = \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x \quad A \approx A_{16} = \sum_{i=1}^{16} f\left(\dfrac{i}{8} - \dfrac{9}{8}\right)\left(\dfrac{1}{8}\right)$

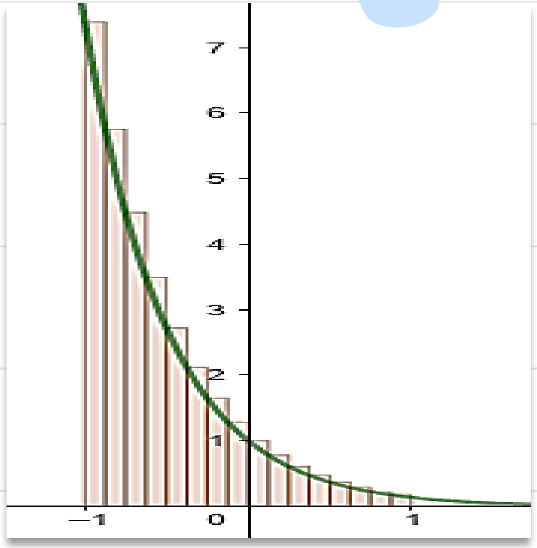
$A \approx A_{16} = \dfrac{1}{8}\sum_{i=1}^{16} e^{-2\left(\frac{i}{8}-\frac{9}{8}\right)}$

$A \approx A_{16} = \dfrac{1}{8}\sum_{i=1}^{16} e^{\left(\frac{9}{4}-\frac{i}{4}\right)}$

لا يوجد صيغة لتبسيط المجموع

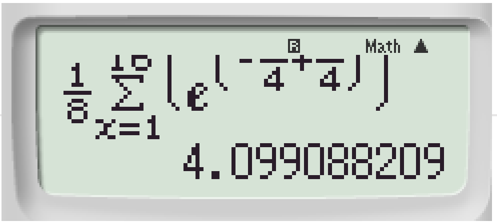
استخدم الآلة الحاسبة

$A \approx A_{16} = \dfrac{1}{8}\sum_{i=1}^{16} e^{\left(\frac{9}{4}-\frac{i}{4}\right)}$



تعطي مساحة كبيرة
حيث أن الدالة تتناقص

$A_{16} = 4.099088209$



تقدير قيمة المساحة باستخدام نقاط قيم مختلفة

تمرين

Q8صفحة344

قرب المساحة تحت المنحنى $y = f(x) = e^{-2x}$ على الفترة $[-1,1]$، بأستخدام $n = 16$ مستطيلا .
وقواعد القيم أ) نقطة النهاية اليسرى ب) نقطة المنتصف ج) نقطة النهاية اليمنى

الحل

$f(x) = e^{-2x}$ على $[-1,1]$

لـ $n = 16$ مستطيلًا :

$$\Delta x = \frac{b-a}{n} \longrightarrow \Delta x = \frac{1-(-1)}{16} = \frac{1}{8}$$

$$x_0 = a = -1 \longrightarrow x_i = a + i\Delta x$$

$$x_i = -1 + \frac{i}{8}$$

b) نقطة المنتصف

$$c_i = a + \left(i - \frac{1}{2}\right)\Delta x \qquad i = 1, 2, 3, \dots, n$$

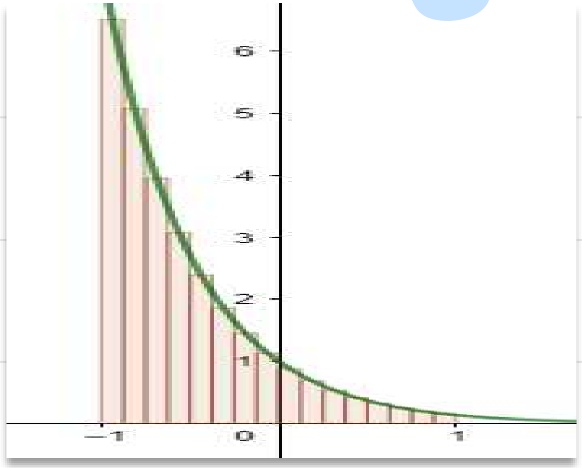
$$c_i = -1 + \frac{i - \frac{1}{2}}{8} \qquad c_i = -1 + \frac{i}{8} - \frac{1}{16} = -\frac{17}{16} + \frac{i}{8}$$

$$i = 1, 2, 3, \dots, 16$$

$$A \approx A_n = \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x \qquad A \approx A_{16} = \sum_{i=1}^{16} f\left(-\frac{17}{16} + \frac{i}{8}\right)\left(\frac{1}{8}\right)$$

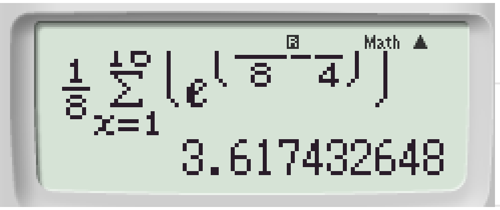
$$A \approx A_{16} = \frac{1}{8}\sum_{i=1}^{16} e^{-2\left(-\frac{17}{16}+\frac{i}{8}\right)}$$

$$A \approx A_{16} = \frac{1}{8}\sum_{i=1}^{16} e^{\left(\frac{17}{8}-\frac{i}{4}\right)}$$



لا يوجد صيغة لتبسيط المجموع

استخدم الآلة الحاسبة



$$A \approx A_{16} = \frac{1}{8}\sum_{i=1}^{16} e^{\left(\frac{17}{8}-\frac{i}{4}\right)}$$

$$A_{16} = 3.617432648$$

تقدير قيمة المساحة باستخدام نقاط قيم مختلفة

تمرين

Q8صفحة344

قرّب المساحة تحت المنحنى $y = f(x) = e^{-2x}$ وعلى الفترة $[-1,1]$، باستخدام $n = 16$ مستطيلًا .
وقواعد القيم a) نقطة النهاية اليسرى b) نقطة المنتصف c) نقطة النهاية اليمنى

الحل

$f(x) = e^{-2x}$ على $[-1,1]$

لـ $n = 16$ مستطيلًا :

$\Delta x = \dfrac{b-a}{n} \longrightarrow \Delta x = \dfrac{1-(-1)}{16} = \dfrac{1}{8}$

$x_0 = a = -1 \longrightarrow x_i = a + i\Delta x$

$x_i = -1 + \dfrac{i}{8}$

c) نقطة النهاية اليمنى

$c_i = a + i\Delta x \qquad i = 1, 2, 3, \dots, n$

$c_i = -1 + \dfrac{i}{8} \qquad i = 1, 2, 3, \dots, 16$

$$A \approx A_n = \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x$$

$$A \approx A_{16} = \sum_{i=1}^{16} f\left(-1 + \frac{i}{8}\right)\left(\frac{1}{8}\right)$$

$$A \approx A_{16} = \frac{1}{8}\sum_{i=1}^{16} e^{-2\left(-1+\frac{i}{8}\right)}$$

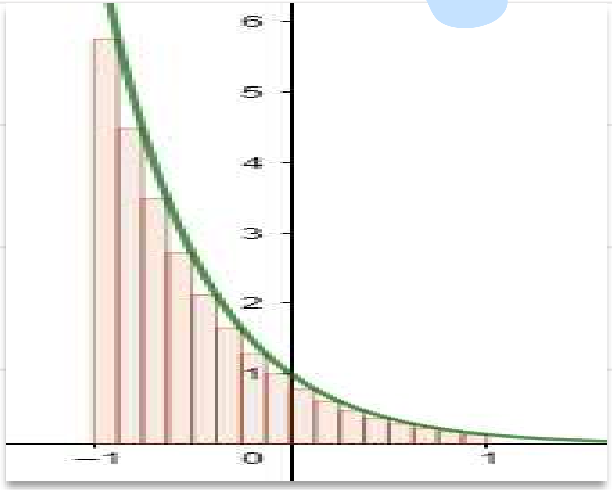
$$A \approx A_{16} = \frac{1}{8}\sum_{i=1}^{16} e^{\left(2-\frac{i}{4}\right)}$$

لا يوجد صيغة لتبسيط المجموع

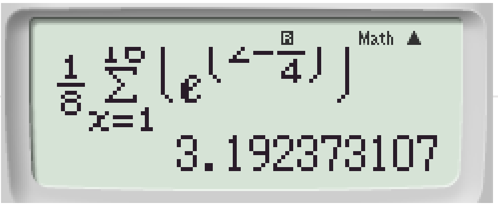
استخدم الآلة الحاسبة

$$A \approx A_{16} = \frac{1}{8}\sum_{i=1}^{16} e^{\left(2-\frac{i}{4}\right)}$$

$$A_{16} = 3.192373107$$



تعطي مساحة صغيرة
حيث أن الدالة تتناقص



+971566151988/
أ/ محمد طه

تقدير قيمة المساحة باستخدام نقاط قيم مختلفة

تمرين

Q8صفحة344

قرب المساحة تحت المنحنى $y = f(x) = e^{-2x}$ وعلى الفترة $[-1,1]$، باستخدام $n = 16$ مستطيلاً .
وقواعد القيم a) نقطة النهاية اليسرى b) نقطة المنتصف c) نقطة النهاية اليمنى

الحل

a) نقطة النهاية اليسرى

$A_{16} = 4.099088209$

تعطي مساحة كبيرة

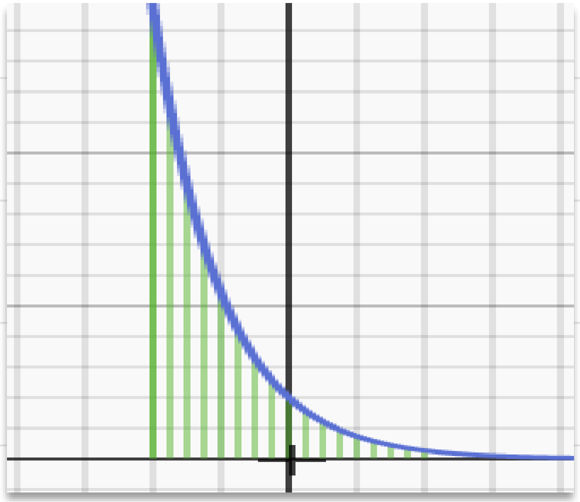
b) نقطة المنتصف

$A_{16} = 3.617432648$

c) نقطة النهاية اليمنى

$A_{16} = 3.192373107$

تعطي مساحة صغيرة



المساحة الدقيقة

$$A = \frac{e^2 - e^{-2}}{2} \approx 3.626860408$$

نقطة المنتصف تعطي أدق تقريب

الدرس الرابع

مدرسة الشراكات التعليمية الافتراضية
VIRTUAL CHARTER SCHOOL

أهداف التعلم

إيجاد قيمة المساحة تحت المنحنى باستخدام المجاميع والنهايات

+971566151988/
أ/ محمد طه

إيجاد قيمة مجموع ريمان باستخدام نقاط قيم مختلفة

مثال

3.4صفحة343 :

إيجاد قيمة مجموع ريمان لـ $y = f(x) = \sqrt{x+1}$ على الفترة $[1,3]$حيث $n = 10,50,100,500,1000$ و 5000.
باستخدام a) نقطة النهاية اليسرى b) نقطة المنتصف c) نقطة النهاية اليمنى لكل فترة جزئية باعتبارها نقاط القيم .

الحل

$f(x) = \sqrt{x+1}$ على $[1,3]$

لـ $n = 10$ مستطيلاً :

$$\Delta x = \frac{b-a}{n} \longrightarrow \Delta x = \frac{3-1}{10} = \frac{1}{5}$$

$$x_0 = a = 1 \longrightarrow x_i = a + i\Delta x$$

$$x_i = 1 + \frac{i}{5} \qquad i = 1, 2, 3, \dots, 10$$

a) نقطة النهاية اليسرى

$$c_i = a + (i-1)\Delta x \qquad i = 1, 2, 3, \dots, n$$

$$c_i = 1 + \frac{i-1}{5} \qquad c_i = 1 + \frac{i}{5} - \frac{1}{5} = \frac{i}{5} + \frac{4}{5}$$

$$i = 1, 2, 3, \dots, 10$$

$$A \approx A_n = \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x$$

$$A \approx A_{10} = \sum_{i=1}^{10} f\left(\frac{i}{5} + \frac{4}{5}\right)\left(\frac{1}{5}\right)$$

$$A \approx A_{10} = \frac{1}{5}\sum_{i=1}^{10} \sqrt{\left(\frac{i}{5} + \frac{4}{5}\right) + 1}$$

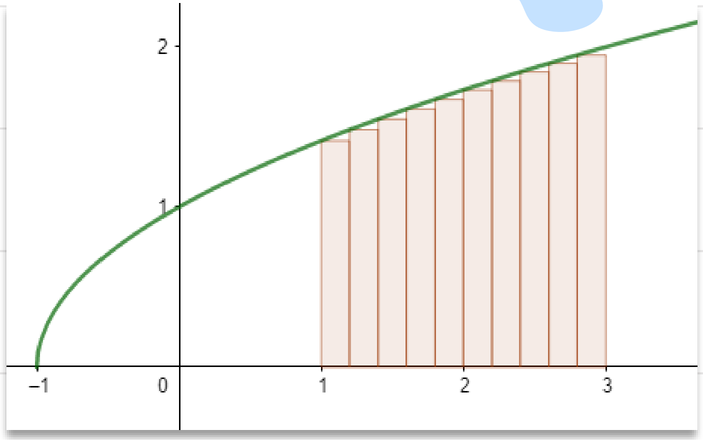
$$A \approx A_{10} = \frac{1}{5}\sum_{i=1}^{10} \sqrt{\frac{i}{5} + \frac{9}{5}}$$

لا يوجد صيغة لتبسيط المجموع

استخدم الآلة الحاسبة

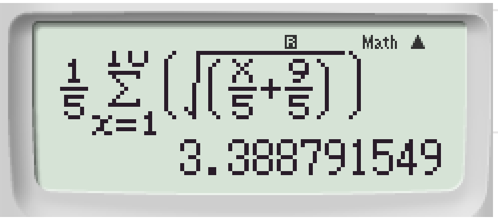
$$A \approx A_{10} = \frac{1}{5}\sum_{i=1}^{10} \sqrt{\frac{i}{5} + \frac{9}{5}}$$

$$A_{10} = 3.388791549$$



تعطي مساحة صغيرة

حيث أن الدالة تتزايد



إيجاد قيمة مجموع ريمان باستخدام نقاط قيم مختلفة

مثال

3.4صفحة343

إيجاد قيمة مجموع ريمان لـ $y = f(x) = \sqrt{x+1}$ على الفترة $[1,3]$حيث $n = 10,50,100,500,1000$ و 5000.
باستخدام a) نقطة النهاية اليسرى b) نقطة المنتصف c) نقطة النهاية اليمنى لكل فترة جزئية باعتبارها نقاط القيم .

الحل

$f(x) = \sqrt{x+1}$ على $[1,3]$

لـ $n = 10$ مستطيلًا :

$$\Delta x = \frac{b-a}{n} \longrightarrow \Delta x = \frac{3-1}{10} = \frac{1}{5}$$

$$x_0 = a = 1 \longrightarrow x_i = a + i\Delta x$$

$$x_i = 1 + \frac{i}{5} \qquad i = 1,2,3,\ldots,10$$

b) نقطة المنتصف

$$c_i = a + \left(i - \frac{1}{2}\right)\Delta x \qquad i = 1,2,3,\ldots,n$$

$$c_i = 1 + \frac{i - \frac{1}{2}}{5} \qquad c_i = 1 + \frac{i}{5} - \frac{1}{10} = \frac{9}{10} + \frac{i}{5}$$

$$i = 1,2,3,\ldots,10$$

$$A \approx A_n = \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x$$

$$A \approx A_{10} = \sum_{i=1}^{10} f\left(\frac{9}{10} + \frac{i}{5}\right)\left(\frac{1}{5}\right)$$

$$A \approx A_{10} = \frac{1}{5}\sum_{i=1}^{10}\sqrt{\left(\frac{9}{10} + \frac{i}{5}\right) + 1}$$

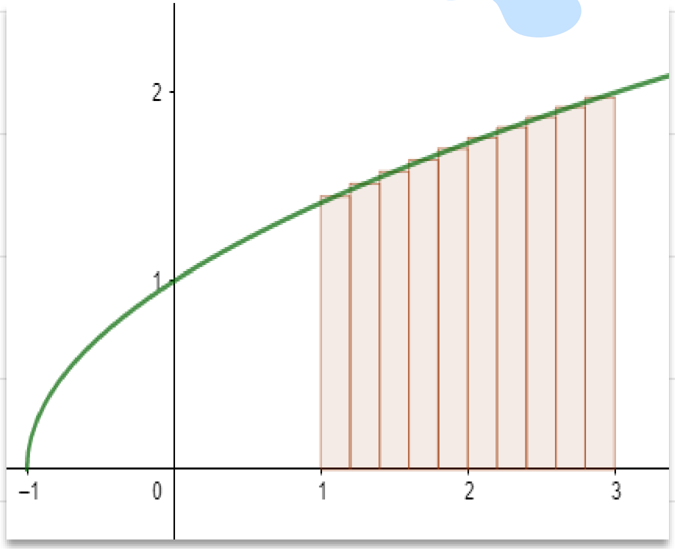
$$A \approx A_{10} = \frac{1}{5}\sum_{i=1}^{10}\sqrt{\frac{19}{10} + \frac{i}{5}}$$

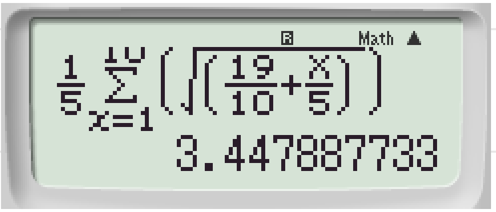
لا يوجد صيغة لتبسيط المجموع

استخدم الآلة الحاسبة

$$A \approx A_{10} = \frac{1}{5}\sum_{i=1}^{10}\sqrt{\frac{19}{10} + \frac{i}{5}}$$

$$A_{10} = 3.447887733$$





إيجاد قيمة مجموع ريمان باستخدام نقاط قيم مختلفة

مثال

3.4صفحة343

إيجاد قيمة مجموع ريمان لـ $y = f(x) = \sqrt{x+1}$ على الفترة $[1,3]$حيث $n = 10,50,100,500,1000$ و 5000.
باستخدام a) نقطة النهاية اليسرى b) نقطة المنتصف c) نقطة النهاية اليمنى لكل فترة جزئية باعتبارها نقاط القيم .

الحل

$$f(x) = \sqrt{x+1}$$ على $[1,3]$

لـ $n = 10$ مستطيلاً :

$$\Delta x = \frac{b-a}{n} \longrightarrow \Delta x = \frac{3-1}{10} = \frac{1}{5}$$

$$x_0 = a = 1 \longrightarrow x_i = a + i\Delta x$$

$$x_i = 1 + \frac{i}{5} \qquad i = 1,2,3,\dots,10$$

c) نقطة النهاية اليمنى

$$c_i = a + i\Delta x \qquad i = 1,2,3,\dots,n$$

$$c_i = 1 + \frac{i}{5} \qquad i = 1,2,3,\dots,10$$

$$A \approx A_n = \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x$$

$$A \approx A_{10} = \sum_{i=1}^{10} f\left(1+\frac{i}{5}\right)\left(\frac{1}{5}\right)$$

$$A \approx A_{10} = \frac{1}{5}\sum_{i=1}^{10}\sqrt{\left(1+\frac{i}{5}\right)+1}$$

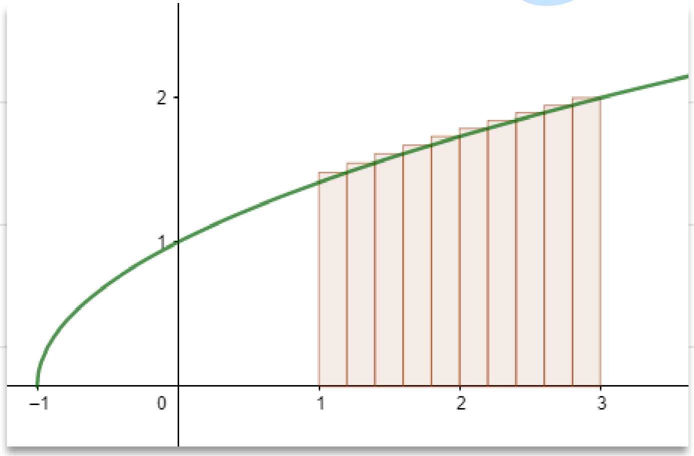
$$A \approx A_{10} = \frac{1}{5}\sum_{i=1}^{10}\sqrt{2+\frac{i}{5}}$$

لا يوجد صيغة لتبسيط المجموع

استخدم الآلة الحاسبة

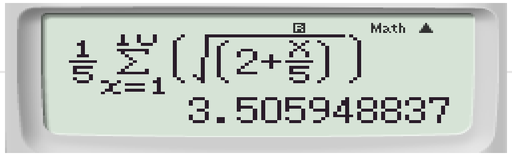
$$A \approx A_{10} = \frac{1}{5}\sum_{i=1}^{10}\sqrt{2+\frac{i}{5}}$$

$$A_{10} = 3.505948837$$



تعطي مساحة كبيرة

حيث أن الدالة تتزايد



إيجاد قيمة مجموع ريمان باستخدام نقاط قيم مختلفة

مثال

3.4صفحة343

إيجاد قيمة مجموع ريمان لـ $y = f(x) = \sqrt{x+1}$ على الفترة $[1,3]$حيث $n = 10,50,100,500,1000$ و 5000.
باستخدام a) نقطة النهاية اليسرى b) نقطة المنتصف c) نقطة النهاية اليمنى لكل فترة جزئية باعتبارها نقاط القيم .

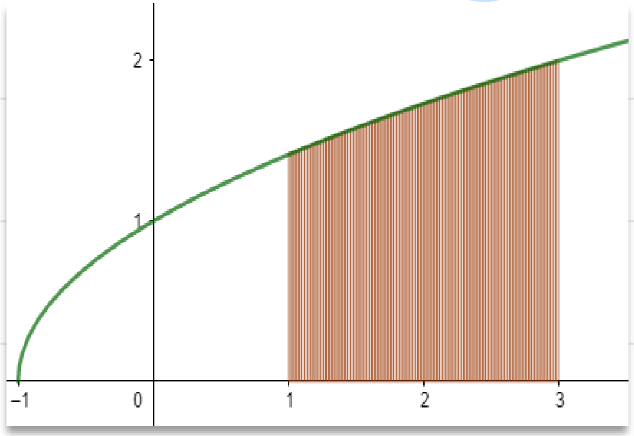
الحل

$f(x) = \sqrt{x+1}$ على $[1,3]$

A_n لقيم مختلفة من n :

(A_n تم تقريبها إلى أقرب 5 أرقام عشرية)

n	A_n نقطة النهاية اليسرى	A_n نقطة المنتصف	A_n نقطة النهاية اليمنى
10	3.38879	3.44789	3.50595
50	3.43599	3.44772	3.45942
100	3.44185	3.44772	3.45357
500	3.44654	3.44772	3.44889
1000	3.44713	3.44772	3.44830
5000	3.44760	3.44772	3.44783



المجموعات الثلاث متقاربة عند نهاية مشتركة ≈ 3.4477

نجد أن قيمتى مجموعتى نقطة النهاية اليسرى و نقطة النهاية اليمنى للقيم الأكبر من n يقتربان فى النهاية من 3.4477

مجموع ريمان

مثال

Q12 صفحة: 344

استخدم مجموع ريمان ونهايته لإيجاد قيمة المساحة الدقيقة تحت المنحنى $y = f(x) = x^2 + 3x$ على الفترة $[0,1]$.

الحل

$f(x) = x^2 + 3x$ على $[0,1]$

لـ n فترات جزئية :

$$\Delta x = \frac{b-a}{n} \longrightarrow \Delta x = \frac{1-0}{n} = \frac{1}{n}$$

$$x_0 = 0 \longrightarrow x_i = a + i\Delta x \qquad x_i = \frac{i}{n}$$

$$i = 1, 2, 3, \ldots\ldots n$$

$$A \approx A_n = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x$$

c_i : نقطة النهاية اليمنى للفترة الجزئية $[x_{i-1}, x_i]$

$$c_i = a + i\Delta x \qquad i = 1, 2, 3, \ldots\ldots, n$$

$$A \approx A_n = \sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{i}{n}\right)\left(\frac{1}{n}\right)$$

$$A \approx A_n = \sum_{i=1}^{n}\left(\left(\frac{i}{n}\right)^2 + 3\left(\frac{i}{n}\right)\right)\left(\frac{1}{n}\right)$$

$$A \approx A_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{i^2}{n^2} + \frac{3i}{n}\right)$$

$$A \approx A_n = \frac{1}{n^3}\sum_{i=1}^{n} i^2 + \frac{3}{n^2}\sum_{i=1}^{n} i$$

$$A \approx A_n = \frac{1}{n^3} \times \frac{n(n+1)(2(n)+1)}{6} + \frac{3}{n^2} \times \frac{n(n+1)}{2}$$

$$A \approx A_n = \frac{(n+1)(2n+1)}{6n^2} + \frac{3(n+1)}{2n}$$

$$A \approx A_n = \frac{(n+1)(2n+1)}{6n^2} + \frac{3n}{3n} \cdot \frac{3(n+1)}{2n}$$

$$A \approx A_n = \frac{2n^2 + 3n + 1}{6n^2} + \frac{9n^2 + 9n}{6n^2}$$

$$= \frac{11n^2 + 12n + 1}{6n^2}$$

مجموع ريمان

مثال

Q12صفحة344

استخدم مجموع ريمان ونهاية لإيجاد قيمة المساحة الدقيقة تحت منحنى $y = f(x) = x^2 + 3x$ على الفترة $[0,1]$.

الحل

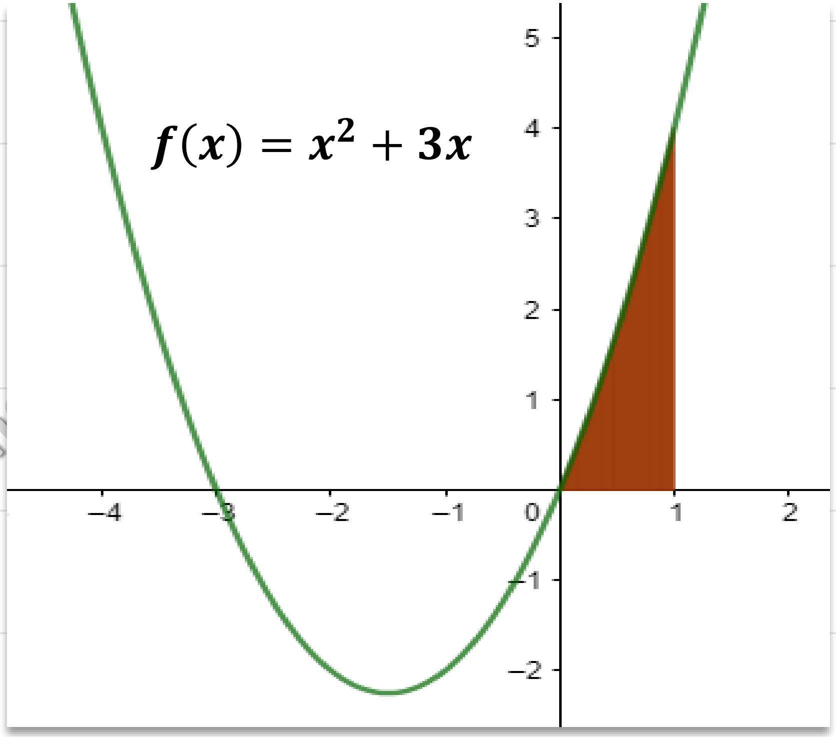
$$A \approx A_n = \frac{11n^2 + 12n + 1}{6n^2}$$

عندما $n \to \infty$

المساحة :

$$A = \lim_{n\to\infty} A_n = \lim_{n\to\infty} \frac{11n^2 + 12n + 1}{6n^2}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{11n^2}{6n^2} = \frac{11}{6}$$



مثال

Q14صفحة344

استخدم مجموع ريمان ونهاية لإيجاد قيمة المساحة الدقيقة تحت منحنى $y = f(x) = 4x^2 - x$ على الفترة $[1,3]$.

الحل

$f(x) = 4x^2 - x$ على $[1,3]$

$\Delta x = \dfrac{b-a}{n} \longrightarrow \Delta x = \dfrac{3-1}{n} = \dfrac{2}{n}$: فترات جزئية n لـ

$x_0 = a = 1 \longrightarrow x_i = a + i\Delta x$

$x_i = 1 + \dfrac{2i}{n}$ $\quad i = 1, 2, 3, \dots\dots n$

$$A \approx A_n = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x$$

c_i : نقطة النهاية اليمنى للفترة الجزئية $[x_{i-1}, x_i]$

$c_i = a + i\Delta x \qquad i = 1, 2, 3, \dots\dots, n$

$$A \approx A_n = \sum_{i=1}^{n} f\left(1 + \frac{2i}{n}\right)\left(\frac{2}{n}\right)$$

$$A \approx A_n = \sum_{i=1}^{n} \left(4\left(1 + \frac{2i}{n}\right)^2 - \left(1 + \frac{2i}{n}\right)\right)\left(\frac{2}{n}\right)$$

$$A \approx A_n = \frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(4 + \frac{16i}{n} + \frac{16i^2}{n^2} - 1 - \frac{2i}{n}\right)$$

$$A \approx A_n = \frac{2}{n}\left[\sum_{i=1}^{n}\frac{16i^2}{n^2} + \sum_{i=1}^{n}\frac{14i}{n} + \sum_{i=1}^{n} 3\right] = \frac{32}{n^3}\sum_{i=1}^{n} i^2 + \frac{28}{n^2}\sum_{i=1}^{n} i + \frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n} 3$$

$$A \approx A_n = \frac{32}{n^3} \times \frac{n(n+1)(2(n)+1)}{6} + \frac{28}{n^2} \times \frac{n(n+1)}{2} + \frac{2}{n} \times 3n$$

$$A \approx A_n = \frac{16(n+1)(2n+1)}{3n^2} + \frac{14(n+1)}{n} + 6$$

$$A \approx A_n = \frac{16(n+1)(2n+1)}{3n^2} + \frac{3n}{3n}\cdot\frac{14(n+1)}{n} + \frac{3n^2}{3n^2}\cdot 6$$

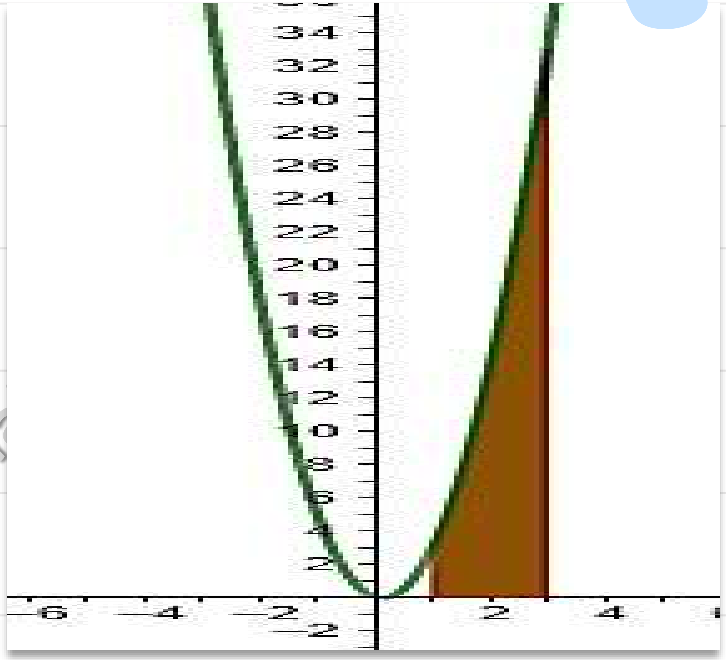
$$A \approx A_n = \frac{32n^2 + 48n + 16}{3n^2} + \frac{42n^2 + 42n}{3n^2} + \frac{18n^2}{3n^2}$$

مثال

Q12صفحة344

استخدم مجموع ريمان ونهاية لإيجاد قيمة المساحة الدقيقة تحت منحنى $y = f(x) = x^2 + 3x$ على الفترة $[1,3]$.

الحل



$$A \approx A_n = \frac{32n^2 + 48n + 16}{3n^2} + \frac{42n^2 + 42n}{3n^2} + \frac{18n^2}{3n^2}$$

$$A \approx A_n = \frac{92n^2 + 90n + 16}{3n^2}$$

عندما $n \to \infty$

المساحة :

$$A = \lim_{n\to\infty} A_n = \lim_{n\to\infty} \frac{92n^2 + 90n + 16}{3n^2}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{92n^2}{3n^2} = \frac{92}{3}$$

تقدير قيمة المساحة باستخدام نقاط قيم مختلفة

مثال

345صفحةQ35

استخدم قيم الدالة المعطاة في الجدول التالي لتقدير المساحة تحت المنحنى باستخدام قيم نقطة النهاية اليسرى ونقطة النهاية اليمنى .

الحل

لدينا 9 نقاط

لدينا 8 فترات جزئية $\quad n = 8$

سنقوم باستخدام 8 مستطيلات

	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8
x	0.0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8
$f(x)$	2.0	2.4	2.6	2.7	2.6	2.4	2.0	1.4	0.6

$$\Delta x = \frac{b-a}{n} \longrightarrow \Delta x = \frac{0.8-0}{8} = 0.1$$

نقطة النهاية اليسرى

$$c_i = x_{i-1}$$

$$A \approx A_n = \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x \longrightarrow A \approx A_8 = \sum_{i=1}^{8} f(x_{i-1})(0.1)$$

$$A \approx A_8 = 0.1\sum_{i=1}^{8} f(x_{i-1}) = 0.1[f(x_0)+f(x_1)+f(x_2)+f(x_3)+f(x_4)+f(x_5)+f(x_6)+f(x_7)]$$

$$= 0.1[\ 2.0\ +2.4\ +2.6\ +2.7\ +2.6\ +2.4\ +2.0\ +1.4\ ] = 1.81$$

تقدير قيمة المساحة باستخدام نقاط قيم مختلفة

تمرين

صفحة345 Q35

استخدم قيم الدالة المعطاة في الجدول التالي لتقدير المساحة تحت المنحنى باستخدام قيم نقطة النهاية اليسرى ونقطة النهاية اليمنى .

الحل

	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8
x	0.0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8
$f(x)$	2.0	2.4	2.6	2.7	2.6	2.4	2.0	1.4	0.6

لدينا 9 نقاط

لدينا 8 فترات جزئية $\quad n = 8$

سنقوم باستخدام 8 مستطيلات

$$\Delta x = \frac{b-a}{n} \longrightarrow \Delta x = \frac{0.8-0}{8} = 0.1$$

نقطة النهاية اليمنى

$$c_i = x_i$$

$$A \approx A_n = \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x \longrightarrow A \approx A_8 = \sum_{i=1}^{8} f(x_i)(0.1)$$

$$A \approx A_8 = 0.1\sum_{i=1}^{8} f(x_i) = 0.1[f(x_1)+f(x_2)+f(x_3)+f(x_4)+f(x_5)+f(x_6)+f(x_7)+f(x_8)]$$

$$= 0.1[\ 2.4\ +2.6\ +2.7\ +2.6\ +2.4\ +2.0\ +1.4\ +0.6\ ] = 1.67$$

+971566151988/
أ/ محمد طه

الواجب المنزلى

صفحة 344

- أنشئ جدولًا لمجموع ريمان كما في المثال 3.5 لإيضاح أن المجموع باستخدام قيم نقطة النهاية اليمنى ونقطة المنتصف ونقطة النهاية اليسرى تتقارب كلها من القيمة ذاتها عندما $n \to \infty$

$17. f(x) = x^3 - 1, [1,3]$ $\quad$ $18.\ f(x) = x^3 - 1, [-1,1]$

- نظِّم نقاط التقدير المناظرة لنقطة المنتصف لكل فترة جزئية، وارسم الدوال ومستطيلات التقريب وجد قيمة مجموع ريمان.

- $2. f(x) = x^3 - 1 \quad (a)[1,2], n = 4: \quad (b)[1,3], n = 4$
- $4.\ f(x) = 4 - x^2.\ (a)[-1,1]\ , \mathrm{n} = 4: \ (\mathrm{b})[-3,-1], n = 4$

36- استخدم قيم الدالة المعطاة لتقدير المساحة تحت المنحنى باستخدام قيم نقطة النهاية اليسرى ونقطة النهاية اليمنى

x	0.0	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0	1.2	1.4	1.6
$f(x)$	2.0	2.2	1.6	1.4	1.6	2.0	2.2	2.4	2.0

في التمارين 5-10 ، قرّب المساحة تحت المنحنى على الفترة المعطاة باستخدام n مستطيلًا وقواعد القيم

a) نقطة النهاية اليسرى $\quad$ b) نقطة المنتصف $\quad$ c) نقطة النهاية اليمنى

7. $y = \sqrt{x+2}$ علي $[1,4], n = 16$
9. $y = \cos x$ علي $[0, \pi/2], n = 50$
10. $y = x^3 - 1$ علي $[-1,1], n = 100$

- استخدم مجموع ريمان ونهاية لإيجاد قيمة المساحة الدقيقة تحت المنحنى

- $11. y = x^2 + 1$ علي $(a)[0,1] : (b)[0,2] : (c)[1,3]$
- $13.\ y = 2x^2 + 1$ علي $(a)[0,1] : (b)[-1,1] : (c)[1,3]$


Thank you