حل تجميعة أسئلة بونس متوقعة في الامتحان النهائي

موقع المناهج ⇦ المناهج الإماراتية ⇦ الصف الثاني عشر المتقدم ⇦ رياضيات ⇦ الفصل الثاني ⇦ الملف

اسم الطالب/ الطالبة	الصف	الشعبة	التاريخ	الفصل	المادة
	12 متقدم		/ / 2023	الثاني - 2023م	

اسئلة (BONUS) متوقعه ـ الفصل الدراسي الثاني 2023 م – المادة / رياضيات

السؤال الاول : حدد قيمة $a\,,b$ التي تجعل للدالة $f(x)=2ax^2+bx+2$ قيمة محلية عند النقطة $(-1{,}4)$

الحل : النقطة (- 1 , 4) من الدالة ابدل x بـ – 1 وتكون y تساوي 4

$$4=2a(-1)^2+b(-1)+2$$

أي $2a-b=2$ المعادلة الاولى

إن مشتق الدالة يساوي صفر عندما x = - 1

$$\boldsymbol{f^{/}(x)=4ax+b}$$

$$\boldsymbol{0=4a(-1)+b}$$

$\boldsymbol{-4a+b=0}$ المعادلة الثانية

بحل المعادلتين ينتج : x = -1 و y = -4

السؤال الثاني : إذا كان $f(1)=9\,,\ f(0)=1$ اوجد التكامل

$$\int_0^1 3\sqrt{f(x)}\,f^{/}(x)dx$$

الحل : نفرض $u=f(x)$

$$\boldsymbol{d\,u}=f^{/}(x)\boldsymbol{dx}$$

وبالتالي $\mathbf{dx}=\dfrac{\boldsymbol{du}}{f^{/}(x)}$

عندما x=0 فإن u = $f(0)=1$ **وعندما x = 1 فإن u =** $f(1)=9$

$$\int_0^1 3\sqrt{f(x)}\,f^{/}(x)dx=\int_1^9 3\sqrt{u}\,f^{/}(x)\frac{\boldsymbol{du}}{f^{/}(x)}$$

$$=\int_1^9 3\sqrt{u}\,du=3\times\frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}}\Big|_1^9=52$$

اسم الطالب /الطالبة	الصف	الشعبة	التاريخ	الفصل	المادة
	12 متقدم		/ / 2023	الثاني - 2023م	

السؤال الثالث : على فرض أن f هي دالة متزايدة لها دالة معكوسة f^{-1}. بيّن أن f^{-1} هي أيضًا دالة متزايدة.

الحل : بما أن f متزايدة هذا يعني انه من اجل اي قيمتين x_1, x_2 حيث $x_1 \leq x_2$ فإن

$f(x_1) \leq f(x_2)$ أي أن $y_1 \leq y_2$ حيث y_1, y_2 من مجال $f^{-1}(x)$

اي من أجل y_1, y_2 من مجال $f^{-1}(x)$ يكون $f^{-1}(y_1) \leq f^{-1}(y_2)$

إن $f^{-1}(y_2) = x_2$, $f^{-1}(y_1) = x_1$ من تعريف معكوس الدالة

أي أن $x_1 \leq x_2$ وبالتالي f^{-1} متزايدة

السؤال الرابع : لأجل $f(x) = x^4 + bx^3 + cx^2 + dx + 2$. وضّح أنه لا يوجد نقطتي انعطاف سوى إذا كان $c < \frac{3}{8}b^2$.

الحل :نشتق مرتين $f^{/}(x) = 4x^3 + 3bx^2 + 2cx + d$

$$f^{//}(x) = 12x^2 + 6bx + 2c$$

يجب ان يكون $f^{//}(x) = 0$ أي $12x^2 + 6bx + 2c = 0$

معادلة من الدرجه الثانية يكون لها حلان عندما مميز المعادلة اكبر من صفر

$$\Delta = (6b)^2 - 4(12)(2c) > 0$$

$$36b^2 - 96c > 0 \quad , \quad 36b^2 > 96c \ , \ c < \frac{36}{96}b^2 \ , \quad c < \frac{3}{8}b^2$$

السؤال الخامس :

تقوم شركة صغيرة بتقدير أنه عند إنفاق x ألف درهم على الإعلانات في السنة. فمن الممكن وصف مبيعاتها السنوية بالدالة $s = 60 - 40e^{-0.05x}$ ألف درهم. يوضح الجدول التالي آخر أربعة إجماليات للإعلانات السنوية.

السنة	4	3	2	1
الاعلانات(بالدرهم)	20,000	18,000	16,000	14,500

قدر القيمة الحالية (السنة 4) لـــ $x'(t)$ والمعدل الحالي للتغير في المبيعات.

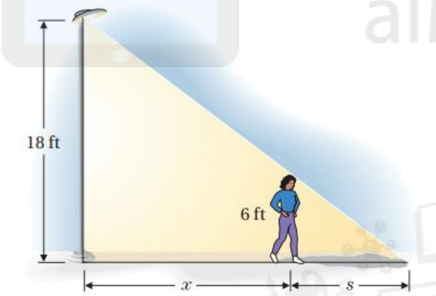
الحل : لاحظ ان x بالاف الدراهم $x'(4) = \frac{20-18}{4-3} = 2$ نشتق

$$s'(t) = -40e^{-0.05x(t)}\left(-0.05x'(t)\right) = 2x'(t)e^{-0.05x(t)}$$

من الجدول $x(4) = 20$ و $x'(4) = 2$ بالتعويض نجد ان

$s'(4) \approx 1.472$ اي ان معدل زيادة المبيعات تقريبا 1472 درهم في السنة

السؤال السادس :



على فرض أن شخصا ما يبلغ طوله 6 ft يبعد 12 ft من عمود إنارة ارتفاعه 18 ft (انظر الشكل). (a) إذا كان الشخص يبتعد عن عمود الإنارة بمعدل $2\ \text{ft/s}^2$. فما هو المعدل الذي يتغير به طول ظل الشخص مبتعدا عن العمود؟

العملية مع شخص يبعد 6 ft عن عمود الإنارة و يمشي نحو العمود بمعدل 3 ft/s

الحل : نفرض θ هي الزاويه بين نهاية الظل وقمة عمود الانارة فيكون من المثلث القائم الصغير $\tan\theta = \frac{6}{s}$ ومن المثلث القائم الكبير $\tan\theta = \frac{18}{s+x}$

بمساواة المعادلتين السابقتين نجد : $\frac{s+x}{18} = \frac{s}{6}$ نفاضل الطرفين نجد $\frac{s'}{6} = \frac{s'+x'}{18}$ وبالتبسيط

نجد $s' = \frac{x'}{2}$ نعوض $x' = 2$ نجد $s' = \frac{2}{2} = 1ft/s$

السؤال السابع : على فرض أن

$f(p) = 400(20 - p)$

هو طلب منتج معين بسعر p (بالدراهم) و $p < 20$. (a) جــد مرونة الطلب. (b) جــد مدى الأسعار التي تجعل $E < -1$. قارن مدى الأسعار هذا الذي تكون فيه الإيرادات دالة متناقصة لـ p.

الحل تحدد دالة مرونة الطلب من خلال

$$E = \frac{p}{f(p)} f'(p) = \frac{p}{400(20-p)}(-400) = \frac{p}{p-20}$$

في الشكل 4.98. لاحظ أنه $E < -1$ إذا كان $E = \frac{p}{p-20}$

$$\frac{p}{p-20} < -1$$

أو $p > -(p-20)$ بما أن $p - 20 < 0$

فينتج من حلها $2p > 20$

أو $p > 10$

لتحليل الإيرادات. فإننا نوجد قيمة $R = pf(p) = p(8000 - 400p) = 8000p - 400p^2$ تتناقص الإيرادات إذا كانت $R'(p) < 0$. من $R'(p) = 8000 - 800p$. نرى أن $R'(p) = 0$ إذا كان $p = 10$ و $R'(p) < 0$ إذا كان $p > 10$. وبطبيعة الحال. فهذا يدل على أن الإيرادات تتناقص إذا تجاوز السعر 10. ■

السؤال الثامن : لتكن $R(x)$ هي الإيرادات و $C(x)$ هي تكلفة تصنيع x منتج. تُعرف الأرباح بأنها $P(x) = R(x) - C(x)$. (a) بيّن انه عند قيمة x التي تحقق القيمة العظمى للأرباح. فان الإيرادات الحدية تساوي التكلفة الحدية. (b) جــد القيمة العظمى للأرباح إذا كانت $R(x) = 10x - 0.001x^2$ دراهم و $C(x) = 2x + 5000$ دراهم.

الحل : a) نشتق دالة الارباح $P'(x) = R'(x) - C'(x) = 0$

أي ان $R'(x) - C'(x)$

B) نبسط $P(x) = (10x - 0.001x^2) - (2x + 5000)$

$$P(x) = (8x - 0.001x^2 - 5000)$$

اسم الطالب/ الطالبة	الصف	الشعبة	التاريخ	الفصل	المادة
	12 متقدم		/ / 2023	الثاني - 2023م	

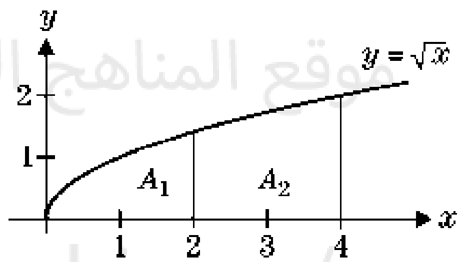
بالاشتقاق وجعل المشتق يساوي صفر $P^{/}(x) = 8 - 0.002x^2 = 0$

بحل المعادلة نجد $x = 4000$ ونلاحظ أن $P^{//}(x) = -0.002 < 0$ أي ان يوجد قيمة محلية عظمى عند $x = 4000$ وهي وحيدة فهي مطلقة عظمى اي ان اكبر ربح هو

$$P(4000) = (8 \times 4000 - 0.001 \times 4000^2 - 5000) = 11000$$

السؤال التاسع :

في الشكل المبيّن. أي مساحة تساوي $\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1} \sqrt{2}\sqrt{1+i/n}\,\frac{2}{n}$ ؟



الحل : نحسب مجموع ريمان على الفترة $[2, 4]$

$$x_i = 2 + \frac{2\,i}{n} \quad \text{و} \quad \Delta x = \frac{2}{n}$$

$$A = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \left[\left(\sqrt{2 + \frac{2i}{n}}\right) \frac{2}{n} \right]$$

$$A = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \left[\left(\sqrt{2}\left(\sqrt{1 + \frac{i}{n}}\right)\right) \frac{2}{n} \right]$$ اي نهاية المجموع يمثل A_2

المادة	الفصل	التاريخ	الشعبة	الصف	اسم الطالب/ الطالبة
	الثاني - 2023م	/ / 2023		12 متقدم	

السؤال العاشر : استخدم مجموع ريمان ونهايته لايجاد المساحه تحت المنحني $y = x^2 + 3x$ الفترة $[0$ و $1]$

الحل :

$x_i = \frac{i}{n}$ و $\Delta x = \frac{1}{n}$

$$A_n = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left[\left(\frac{i}{n}\right)^2 + 3\left(\frac{i}{n}\right)\right]$$

$$A_n = \frac{1}{n^3}\sum_{i=1}^{n}\left[i^2 + \frac{3}{n^2}(i)\right] = \frac{1}{n^3}\left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right) + \frac{3}{n^2}\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)$$

$$= \frac{11n^2 + 12n + 1}{6n^2}$$

$$a = \lim_{n\to\infty}\left(1\frac{11n^2 + 12n + 1}{6n^2}\right) = \frac{11}{6}$$

المادة /

الفصل الدراسي الثاني - 2023

اسم الطالب /الطالبة	الصف	الشعبة	التاريخ	الفصل	المادة
	12 متقدم		/ / 2023	الثاني - 2023م	

السؤال الحادي عشر : اوجد مشتقة الدالة $f(x) = \int_{x^2}^{x^3} \sin(3t)\,dt$

الحل :

$$f^{/}(x) = \sin(3x^3) \times 3x^2 - \sin(2x^2) \times 2x = 3x^2 \sin(3x^3) - 2x \sin(2x^2)$$

السؤال الثاني عشر : أوجد معادلة المماس للدالة $y = \int_0^x e^{-t^2+1}\,dt$ عند $x = 0$

الحل : يجب حساب الميل ونقطة التماس

$$y^{/}(x) = e^{-x^2+1}$$

$$m = e^1 = e$$

$$y = \int_0^0 e^{-t^2+1}dt = 0$$

معادلة المماس $y = ex$

المادة /

الفصل الدراسي الثاني - 2023

المادة	الفصل	التاريخ	الشعبة	الصف	اسم الطالب /الطالبة
	الثاني - 2023م	/ / 2023		12 متقدم	

السؤال الثالث عشر :

على فرض أنّ ماءًا تتدفق في خزان وتتسرّب خارجه كان المعدل الصافي للتغيّر (وهو معدل التدفق للداخل ناقص معدل التسرّب للخارج) في الماء يساوي $f(t) = 20(t^2 - 1)$ لترات في الدقيقة. (a) لكل $0 \le t \le 3$. حدد متى يزداد مستوى الماء ومتى ينخفض. (b) إذا كان الخزان يسع 200 L من الماء عند الزمن $t = 0$ ، فحدد كم لتراً في الخزان في الزمن $t = 3$ دقائق.

الحل لتكن $w(t)$ هو عدد اللترات في الخزان في الزمن t . (a) لاحظ أنّ مستوى الماء ينخفض إذا كان $w'(t) = f(t) < 0$. لدينا

$$f(t) = 20(t^2 - 1) < 0 \quad \text{إذا كان} \quad 0 \le t < 1$$

وبدلًا من ذلك، يزداد مستوى الماء إذا كان $w'(t) = f(t) > 0$. وفي هذه الحالة، نحصل على

$$f(t) = 20(t^2 - 1) > 0 \quad \text{إذا كان} \quad 1 < t \le 3$$

(b) لقد بدأنا مع $w'(t) = 20(t^2 - 1)$. وبالتكامل من $t = 0$ إلى $t = 3$ ، نحصل على

$$\int_0^3 w'(t)\,dt = \int_0^3 20(t^2 - 1)\,dt$$

بإيجاد قيمة التكاملات في كلا الطرفين، يكون الناتج

$$w(3) - w(0) = 20\left(\frac{t^3}{3} - t\right)\Bigg|_{t=0}^{t=3}$$

بما أنّ $w(0) = 200$ ، سنحصل على

$$w(3) - 200 = 20(9 - 3) = 120$$

ومن ثم،

$$w(3) = 200 + 120 = 320$$

ولذلك سيكون في الخزان 320 لتراً في غضون 3 دقائق. ■

المادة /

الفصل الدراسي الثاني - 2023

السؤال الرابع عشر : اوجد $\int_1^4 \frac{x-1}{\sqrt{x}}\,dx$ مبينا خطوات الحل :

الحل :

39. $$\int_1^4 \frac{x-1}{\sqrt{x}}dx = \int_1^4 (x^{1/2} - x^{-1/2})dx$$
$$= \left(\frac{2}{3}x^{3/2} - 2x^{1/2}\right)\Big|_1^4$$
$$= \left(\frac{16}{3} - 4\right) - \left(\frac{2}{3} - 2\right) = \frac{8}{3}$$

السؤال الخامس عشر : إذا كانت $f(x) = x|2x-6|$ اوجد $\int_0^4 f(x)dx$

الحل :

$$f(x) = x|2x-6| = \begin{cases} 2x^2 - 6x & , x \geq 3 \\ 6x - 2x^2 & , x < 3 \end{cases}$$

$$\int_0^4 f(x)dx = \int_0^3 (6x - 2x^2)dx + \int_3^4 (2x^2 - 6x)dx$$

السؤال السادس عشر : إذا كانت $f(x)$ دالة متصلة وكان $\int_4^{2x+2} f(t)dt = 3x^2 + ax - 6$

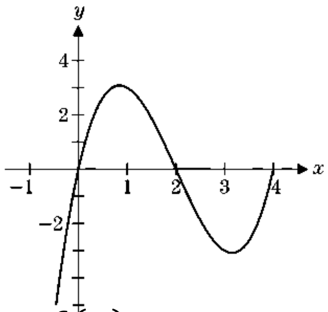
اوجد قيمة a

الحل : بوضع $x = 1$

$$\int_4^{2x+2} f(t)dt = 3x^2 + ax - 6 = \int_4^4 f(t)dt = 3(1)^2 + a(1) - 6 = 0$$

وبالتلي $a = 3$

اسم الطالب/ الطالبة	الصف	الشعبة	التاريخ	الفصل	المادة
	12 متقدم		/ / 2023	الثاني - 2023م	



السؤال السابع عشر : اعتمادا على الشكل المجاور الذي يمثل

بيان الدالة $f(x)$ اثبت أن $-12 \leq \int_0^4 f(x)dx \leq 12$

الحل :

$m \leq f(x) \leq M \quad , \quad m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a)$

$$-3(4-0) \leq \int_0^4 f(x)dx \leq 3(4-0)$$

$$-12 \leq \int_0^4 f(x)dx \leq 12$$

السؤال الثامن عشر : إذا كانت $F(x)$ هي الدالة الاصلية للدالة $f(x)$ وكان $F(3) = -2$

و $F(6) = 8$ أوجد $\int_0^3 f(x+3)dx$

الحل : نفرض $du = dx \quad , \quad u = x + 3$

$$\boldsymbol{x = 0} \qquad \boldsymbol{u = 3} \qquad\qquad \boldsymbol{x = 4} \qquad \boldsymbol{u = 6}$$

$$\int_0^3 f(x+3)dx = \int_3^6 f(u)dx = F(u))|_3^6$$

$$= \boldsymbol{F(6) - F(3) = 8 - -2 = 10}$$

المادة /

الفصل الدراسي الثاني - 2023

اسم الطالب/ الطالبة	الصف	الشعبة	التاريخ	الفصل	المادة
	12 متقدم		/ / 2023	الثاني - 2023م	

السؤال التاسع عشر : $\int_0^1 f(x)dx = -3$ أوجد $\int_0^1 f(1-x)dx$

الحل: نفرض $u = 1 - x \quad , \quad du = -dx$

$$x = 0 \quad u = 1 \qquad x = 1 \quad u = 0$$

$$\int_0^1 f(1-x)dx = \int_1^0 f(u).-du = -\int_1^0 f(u).du = \int_0^1 f(u).-du = -3$$

السؤال العشرون : إذا كان $\int_0^1 f(x)dx = -3$ أوجد $\int_0^4 f\left(\frac{x}{4}\right)dx$

الحل: نفرض $u = \frac{x}{4} \quad , \quad du = \frac{1}{4}dx \quad , \quad dx = 4du$

$$x = 0 \quad u = 0 \qquad x = 4 \quad u = 1$$

$$\int_0^4 f\left(\frac{x}{4}\right)dx = \int_0^1 f(u) \times 4du = 4\int_0^1 f(u)du = 4 \times -3 = -12$$