تم تحميل هذا الملف من موقع المناهج الإماراتية

almanahj.com/ae

موقع المناهج الإماراتية

الملف مراجعة درس تكاملات على فرق ومجموع مربعين مع الحل
موقع المناهج ⇦ المناهج الإماراتية ⇦ الصف الثاني عشر المتقدم ⇦ رياضيات ⇦ الفصل الثالث

روابط مواقع التواصل الاجتماعي بحسب الصف الثاني عشر المتقدم			
روابط مواد الصف الثاني عشر المتقدم على تلغرام			
التربية الاسلامية	اللغة العربية	اللغة الانجليزية	الرياضيات

المزيد من الملفات بحسب الصف الثاني عشر المتقدم والمادة رياضيات في الفصل الثالث	
1	الدرس الأول المشتقات العكسية والتكامل غير المحدود.
2	ملخص وأوراق عمل الوحدة السابعة: التكامل وتطبيقاته
3	إختبار تدريبي في التكامل
4	مقررات الفصل الثالث
5	نموذج تجريبي2

تكاملات على فرق ومجموع مربعين

(تكاملات الدوال المثلثية)

* $\sqrt{a^2 - b^2\,x^2}$ ⟹ $x = \frac{a}{b}\,sin\theta \quad , \frac{-\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$

almanahj.com/ae
المنهج الإماراتية

* $\sqrt{a^2 + b^2\,x^2}$ ⟹ $x = \frac{a}{b}\,tan\,\theta \quad , \frac{-\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$

* $\sqrt{b^2x^2 - \ a^2}$ ⟹ $x = \frac{a}{b}\,sec\,\theta\,,\ \left[0, \frac{\pi}{2}\right[\ \cup\ \left]\frac{\pi}{2}, \pi\right]$

$$1)\ \int \sqrt{4-9x^2}\,dx$$

$$a^2 = 4 \rightarrow a = 2$$

$$b^2 = 9 \rightarrow b = 3$$

$$x = \frac{2}{3}\sin\theta \rightarrow \sin\theta = \frac{3}{2}x$$

$$x^2 = \frac{4}{9}\sin^2\theta$$

$$dx = \frac{2}{3}\cos\theta\,d\theta$$

$$= \int \sqrt{4-9\left(\frac{4}{9}\sin^2\theta\right)}\,.\frac{2}{3}\cos\theta\,d\theta \qquad = \frac{2}{3}\int \sqrt{(4-4\sin^2\theta)}\,\cos\theta\,d\theta$$

$$= \frac{2}{3}\int \sqrt{4(1-\sin^2\theta)}\,\cos\theta\,d\theta \qquad = \frac{2}{3}\int \sqrt{4\cos^2\theta}\,\cos\theta\,d\theta$$

$$= \frac{2}{3} \int 2\cos\theta . \cos\theta \, d\theta$$

$$= \frac{4}{3} \int \cos^2\theta \, d\theta \qquad \cos^2\theta = \frac{1}{2}(1+\cos 2\theta)$$

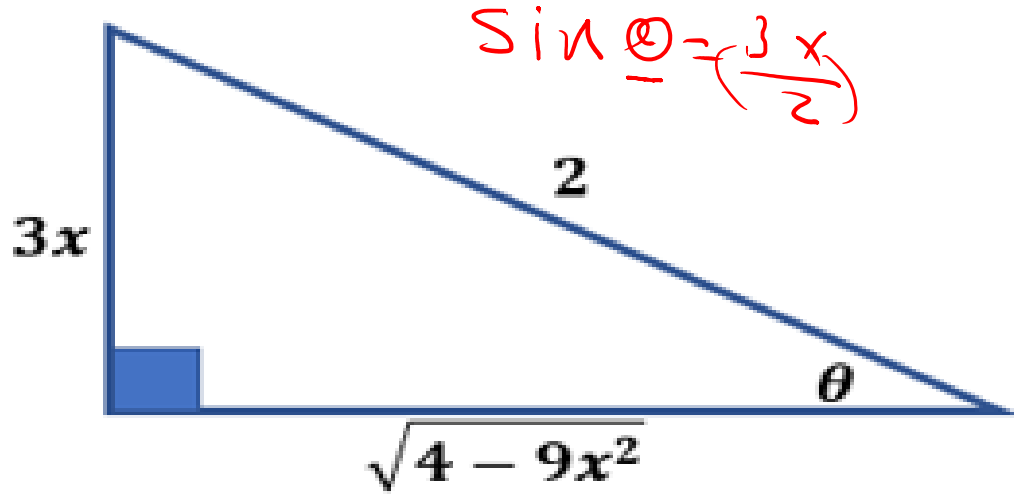
$$= \frac{4}{3} \int \frac{1}{2}(1+\cos 2\theta) \, d\theta \qquad = \frac{2}{3} \int (1+\cos 2\theta) \, d\theta$$

$$= \frac{2}{3}\left[\theta + \frac{1}{2}sin2\theta\right] + c$$

$$= \frac{2}{3}[\theta + sin\theta cos\theta] + c$$

$$sin2\theta = 2sin\theta cos\theta$$

$$\frac{1}{2}sin2\theta = sin\theta cos\theta$$



almanahj.com/ae
المناهج الإماراتية

$$= \frac{2}{3}\left[sin^{-1}\left(\frac{3x}{2}\right) + \frac{3x}{2} \cdot \frac{\sqrt{4 - 9x^2}}{2}\right] + c$$

حصة 2

تكاملات على شكل فرق بين مربعين(تعويض مع دوال مثلثية)

$$* \int \frac{x^2}{\sqrt{9-x^2}}\,dx$$

$$a^2 = 9 \rightarrow a = 3$$

$$b^2 = 1 \rightarrow b = 1$$

$$x = \frac{3}{1}\sin\theta \rightarrow \sin\theta = \frac{x}{3}$$

$$dx = 3\cos\theta\, d\theta$$

$$= \int \frac{9\sin^2\theta}{\sqrt{9-9\sin^2\theta}}\,3\cos\theta\, d\theta$$

$$= \int \frac{9\sin^2\theta}{\sqrt{9(1-\sin^2\theta)}} 3\cos\theta \, d\theta \qquad = \int \frac{9\sin^2\theta}{\sqrt{9\cos^2\theta}} 3\cos\theta \, d\theta$$

$$= \int \frac{9\sin^2\theta}{3\cos\theta} 3\cos\theta \, d\theta$$

almanahj.com/ae
المناهج الإماراتية

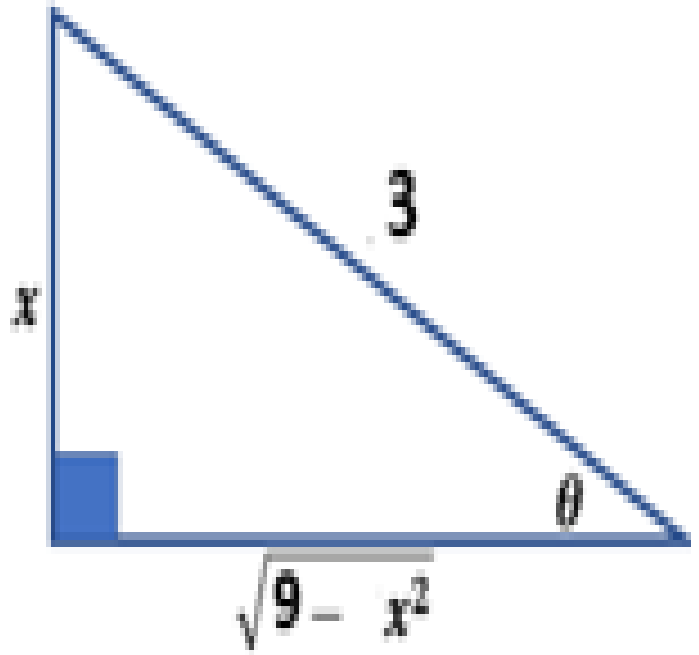
$$= 9\int \sin^2\theta d\theta \quad \sin^2\theta = \frac{1}{2}(1-\cos 2\theta)$$

$$= 9\int \frac{1}{2}(1-\cos 2\theta) d\theta$$

$$= \frac{9}{2}\left[\theta - \frac{1}{2}\sin 2\theta\right] + c$$

almanahj.com/ae
المنهج الإماراتية

$$= \frac{9}{2}\left[\sin^{-1}\left(\frac{x}{3}\right) + \frac{3}{3} \cdot \frac{\sqrt{9-x^2}}{3}\right] + c$$



حصة 3

طرائق تكامل على الدوال المثلثية

قاعدة 1 $u = sinx \ or \ u = cosx$

* $\int \underset{\text{فردي}}{sinx} \ \underset{\text{فردي}}{cox} \ dx$

$$u = sinx$$
$$\frac{du}{dx} = cosx$$
$$dx = \frac{du}{cosx}$$

1) $\int sin^3x \, cos^3x \, dx$

$$= \int u^3 \cos^3 x \ \frac{du}{cosx}$$

$$= \int u^3 \cos^2 x \, du \qquad cos^2x = 1 - sin^2x$$

$$= \int u^3(1-\sin^2 x)\,du \qquad = \int u^3(1-u^2)\,du$$

$$= \int (u^3 - u^5)\,du$$

almanahj.com/ae
المنهج الإماراتية

$$= \frac{u^4}{4} - \frac{u^6}{6} + c$$

$$= \frac{\sin^4 x}{4} - \frac{\sin^6 x}{6} + c$$

قاعدة 2

فردي زوجي

2) $\sin x \cos x \, dx$

$$\int \sin^2 x \cos^3 x \, dx$$

نفرض الأس الزوجي

$$u = \sin x$$

نفرض الأس الزوجي

$$\frac{du}{dx} = \cos x$$

$$dx = \frac{du}{\cos x}$$

$$= \int u^2 \cos^3 x \frac{du}{\cos x}$$

$$= \int u^2 \cos^2 x \, du$$

$$= \int u^2 (1 - \sin^2 x)\, du$$

$$= \int u^2 (1 - u^2)\, du$$

$$= \int (u^2 - u^4)\, du$$

$$= \frac{u^3}{3} - \frac{u^5}{5} + c = \frac{\sin^3 x}{3} - \frac{\sin^5 x}{5} + c$$

almanahj.com/ae
المنهج الإماراتية

قاعدة 3

$$3)\int \sqrt{cosx}\, sin^3 x\, dx$$

نفرض ما تحت الجذر

$$u = cos\, x$$

$$\frac{du}{dx} = -sinx$$

$$dx = \frac{du}{-sinx}$$

$$= \int \sqrt{u}\, sin^3 x\, \frac{du}{-sinx}$$

$$= -\int \sqrt{u}\, sin^2 x\, du$$

almanahj.com/ae
المناهج الإماراتية

$$= -\int \sqrt{u}(1 - \cos^2 x)dx$$

$$= \int -u^{\frac{1}{2}}(1 - u^2)\, du$$

$$= \int (-u^{\frac{1}{2}} + u^{\frac{5}{2}})\, du$$

almanahj.com/ae
المنهج الإماراتية

$$= \left[-\frac{2}{3} u^{\frac{3}{2}} + \frac{2}{7} u^{\frac{7}{2}} \right] + c$$

almanahj.com/ae
المنهج الإماراتية

$$= \left[-\frac{2}{3} (cosx)^{\frac{3}{2}} + \frac{2}{7} (cosx)^{\frac{7}{2}} \right] + c$$

قاعدة 4

$$\sin^2\frac{x}{2} = \frac{1}{2}(1-\cos x)$$

$$\cos^2\frac{x}{2} = \frac{1}{2}(1+\cos x)$$

4) $\int \sin^2\frac{x}{2}\cdot\cos^2\frac{x}{2}\,dx$

$$= \int \frac{1}{2}(1-\cos x).\frac{1}{2}(1+\cos x)dx$$

$$= \frac{1}{4}\int (1-\cos^2 x)dx$$

$$= \frac{1}{4}\int \sin^2 x\, dx = \frac{1}{4}\int \frac{1}{2}(1-\cos 2x)dx$$

$$= \frac{1}{8}\left[x - \frac{1}{2}\sin 2x\right] + c$$

$$= \left[\frac{1}{8}x - \frac{1}{16}\sin 2x\right] + c$$