الوحدة السّادسة – تطبيقات التّكامل المحدود

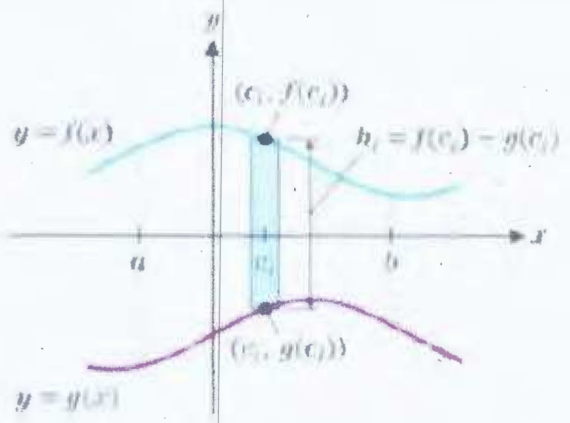
(6-1) المساحة بين منحنيين

1

$y = f(x)$

$y = g(x)$

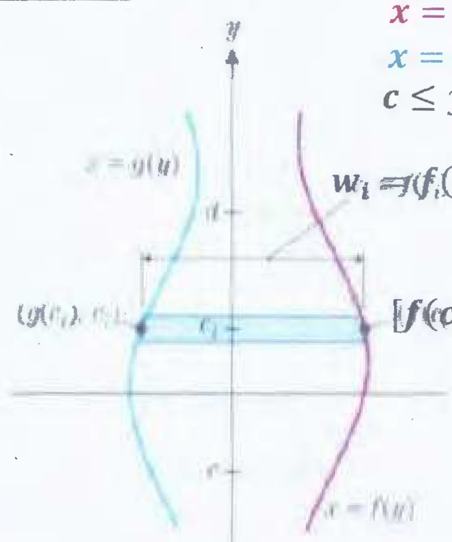
$a \le x \le b$



$x = f(y)$

$x = g(y)$

$c \le y \le d$



$f(x) > g(x)$

لكل $[a, b]$

$$A = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} [f(c_i) - g(c_i)]\, \Delta x$$

$$= \int_{x=a}^{x=b} (f(x) - g(x))\, dx$$

تحت – فوق

$$A = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} [f(c_i) - g(c_i)]\, \Delta y$$

$$= \int_{y=c}^{y=d} (f(y) - g(y))\, dy$$

يسار – يمين

س1) جد مساحة المنطقة المحدودة ب $\boxed{y = x^2}$ ، $\boxed{y = 2 - x}$ ، $\boxed{y = 0}$ بمعلومية x و y ؟

$x^2 = 0 \Rightarrow \boxed{x = 0}$

$2 - x = 0 \Rightarrow \boxed{x = 2}$

$x^2 = 2 - x \Rightarrow x^2 + x - 2 = 0$

$(x-1)(x+2) = 0 \Rightarrow \boxed{x = 1}$

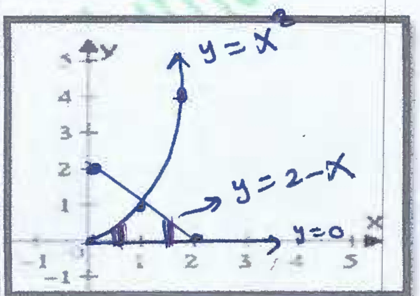
$x = -2$ خارج نقاط تقاطع المنحنيات

0 1 2 x x

$A_1 = \int_0^1 x^2 dx = \frac{x^3}{3}\Big]_0^1$

$A_1 = \frac{1}{3}$

$A_2 = \int_1^2 (2 - x)\, dx$



$A_2 = \left[2x - \frac{x^2}{2}\right]_1^2 = (2 - 1\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}$

$A = A_1 + A_2 = \frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \frac{5}{6}$

$y = x^2 \Rightarrow x = \sqrt{y}$

$y = 2 - x \Rightarrow x = 2 - y$

$y = 0$

نساوي الاقترانات لمعرفة نقاط التقاطع

$\sqrt{y} = 2 - y \Rightarrow y^2 - 5y + 4 = 0$

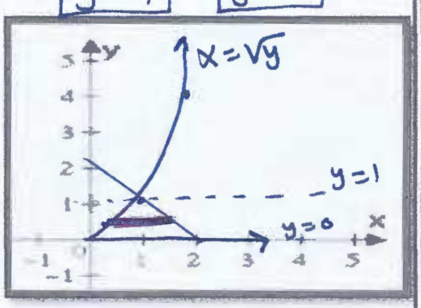
$(y-1)(y-4) = 0$

$\boxed{y = 1}$ ، $\boxed{y = 4}$ مرفوض

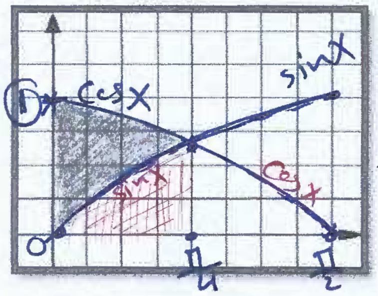
$A = \int_{y=0}^{y=1} (2 - y - \sqrt{y})\, dy$

$\left[2y - \frac{1}{2}y^2 - \frac{y^{\frac{3}{2}}}{3/2}\right]_0^1$

$= \frac{5}{6}$



س2) إذا كانت $f(x) = sinx$ و $g(x) = cosx$ فجد **1)** المساحة بين الأوّل والثّاني ومحور (y) على الفترة $[0, \frac{\pi}{4}]$ ؟

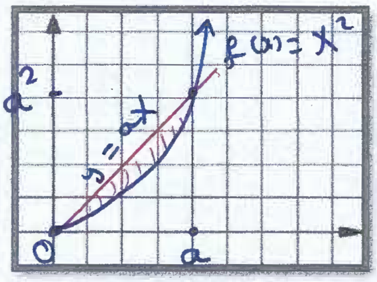


$$A = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\cos x - \sin x)\, dx = \left[\sin x + \cos x\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \sqrt{2} - 1$$

2) المساحة بين الأوّل والثّاني ومحور (x) على الفترة $[0, \frac{\pi}{2}]$ ؟

$$A = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin x\, dx + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x\, dx = -\cos x\Big]_0^{\frac{\pi}{4}} + \sin x\Big]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} = 2 - \sqrt{2}$$

س3) إذا علمت أنّ المساحة بين $f(x) = x^2$ و $y = ax$ كانت تساوي 4.5 وحدة مساحة مربّعة، فما قيمة a حيث a موجبة؟



نساوي المعادلتين لمعرفة نقاط التقاطع

$$x^2 = ax$$
$$x^2 - ax = 0$$
$$x(x - a) = 0$$
$$\boxed{x = 0} \quad \boxed{x = a}$$

$$A = \int_0^a (ax - x^2)\, dx$$
$$= \left[\frac{ax^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right]_0^a = 4.5$$
$$= \frac{a^3}{2} - \frac{a^3}{3} = 4.5 \Rightarrow \boxed{a = 3}$$

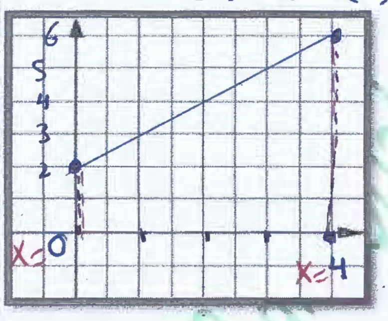
س4) جد مساحة المنطقة المحدودة بِ $y = x + 2$ ومحور السّينات، والمستقيمان $x = 0$ و $x = 4$ ؟

$y = 0$

$$A = \int_0^4 (x+2)\, dx = \frac{1}{2}x^2 + 2x\Big]_0^4 = 16$$

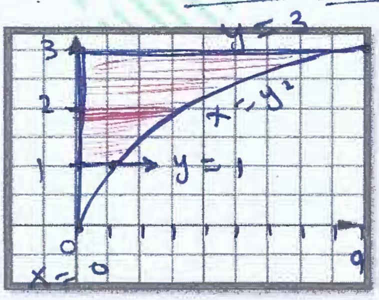
لاحظ الشكل شبه منحرف ⇐

$$A = \frac{1}{2}(6+2)(4) = 16$$



س5) جد مساحة المنطقة المحدودة بِ $y = \sqrt{x}$ ومحور الصّادات، والمستقيمان $y = 1$ و $y = 3$ ؟

$x = 0$



$y = 1$
$y = 3$

المستقيمات أي حدود التكامل معطاه

أولاً نحول $y = \sqrt{x}$

$y^2 = x \Rightarrow \boxed{x = y^2}$

$$A = \int_{y=1}^{y=3} y^2\, dy = \frac{y^3}{3}\Big]_1^3$$
$$= 9 - \frac{1}{3} = 8\frac{2}{3}$$

اليمين - اليسار

$y^2 - (x = 0)$

$$A = \int_1^3 (y^2 - 0)\, dy$$

س6) جد مساحة المنطقة المحدودة بالمنحنيين $x = 1 - y^2$ و $x = y^2 - 1$ ؟

$$A = \int_{y=-1}^{y=1} [(1-y^2) - (y^2-1)]\,dy = \int_{-1}^{1} (1-y^2-y^2+1)\,dy$$

$$= \int_{-1}^{1} (2-2y^2)\,dy = \left[2y - \frac{2y^3}{3}\right]_{-1}^{1} = \boxed{\frac{8}{3}}$$

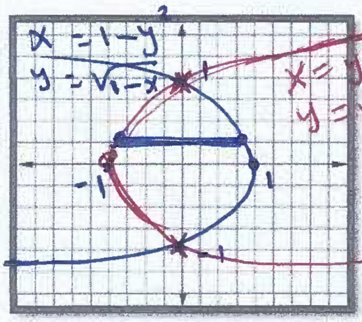
← لِنجِد نقاط التقاطع

$1 - y^2 = y^2 - 1$

$-2y^2 = -2$

$y^2 = 1$

$\int_{y=-1}^{y=1} \Leftarrow \boxed{y = \pm 1}$



لِنعرف الدالة التي على اليمين والتي على اليسار

نعوض أي قيمة بالفترة بالدالتين

يمين $x = 1 - y^2 \Rightarrow x = 1 - 0 = 1$

يسار $x = y^2 - 1 \Rightarrow x = 0 - 1 = -1$

ويمكن رسم أيضاً

$x = 1 - y^2 \Rightarrow y^2 = 1 - x$

$y = \pm\sqrt{1-x}$

$x = y^2 - 1 \Rightarrow y^2 = x + 1 \Rightarrow \boxed{y = \pm\sqrt{x+1}}$

س7) جد مساحة المنطقة المحدودة بالمنحنيين $x = 3y - 2$ و $x = 2y^2 - 4$ ؟

$$A = \int_{y=-\frac{1}{2}}^{y=2} (3y-2) - (2y^2-4)\,dy = \int_{-\frac{1}{2}}^{2} (3y - 2 - 2y^2 + 4)\,dy$$

$$A = \int_{-\frac{1}{2}}^{2} (-2y^2 + 3y + 2)\,dy$$

$\boxed{A \cong 5.2}$

نقاط التقاطع

$x = 3y - 2$

$x = 2y^2 - 4$

$2y^2 - 4 = 3y - 2$

$2y^2 - 3y - 2 = 0$

$(2y+1)(y-2) = 0$

$\boxed{y = 2}$

$\boxed{y = -\frac{1}{2}}$

نعوض أي قيمة بين القيمتين ⇐

مثلاً $y = 1$

يمين $x = 3y - 2 = 1$

يسار $x = 2y^2 - 4 = -2$

2 يتحدّث عن نسبة الطّاقة المفقودة أثناء الاصطدام. والمثال يتكلّم عن الاصطدام بين مضرب التّنس والكرة وأنّ الطّاقة المفقودة تتناسب مع المساحة تحت المنحنى $y = f(x)$، حيث $f_c(x)$ القوّة أثناء انكماش الكرة $(compressing)$، و $f_e(x)$ القوّة أثناء تمدّد الكرة $(expanding)$، حيث $0 \le x \le m$ (المسافة).

تعطى نسبة الطّاقة المفقودة أثناء الاصطدام بـ:

$$\boxed{100\left(\frac{\int_0^m [f_c(x) - f_e(x)]\,dx}{\int_0^m f_c(x)\,dx}\right)}$$

س1)

$x(cm)$	0	0.25	0.5	0.75	1
$f_c(x)(N)$	0	110	220	400	700
$f_e(x)(N)$	0	100	200	300	700

استخدم قاعدة سيمبسون لتقدير نسبة الطاقة التي احتفظت بها كرة البيسبول؟

$$\int_0^1 f_c(x)\,dx = \frac{\Delta x}{3}[f(0)+4f(0.25)+2f(0.5)+4f(0.75)+f(1)]$$

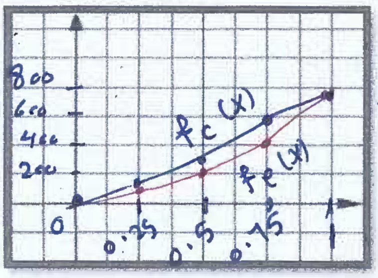
$$= \frac{1}{4(3)}(0+4(110)+2(220)+4(400)+700]$$

$$= \boxed{265}$$

نسبة الطاقة المفقودة $= \dfrac{\int_0^1 [f_c(x)-f_e(x)]\,dx}{\int_0^1 f_c(x)\,dx}\cdot 100$

$\Delta x = \frac{1-0}{4} = \frac{1}{4}$

نحسب الآن $\int_0^1 (f_c(x)-f_e(x))\,dx$ بنفس الأسلوب ولكن ناتج طرح القوتان.



$$\frac{\Delta x}{3}[0+4(110-100)+2(220-200)+4(400-300)+(700-700)]$$

$$\frac{1}{12}(0+40+40+400+0) = \boxed{40}$$

X	0	0.25	0.5	0.75	1
$f_c(x)-f_e(x)$	0	10	20	100	0

⟸ نسبة الطاقة المفقودة $= \frac{40}{265}\cdot 100 \simeq 15\%$

اذن تحتفظ الكرة بـ 85% من طاقتها.

الأسئلة من (2-3) جد المساحة بين المنحنيان على الفترة المعطاة؟

2) $y = \cos x$ (تحت) , $y = x^2+2$ (فوق) , $0 \le x \le 2$

$$A = \int_0^2 (x^2+2-\cos x)\,dx = \frac{x^3}{3}+2x-\sin x\Big]_0^2 =$$

$$A = \left(\frac{8}{3}+4-\sin 2\right) = 5.75$$

نعوض نقطة مثل (1)

$\cos(1) = 0.54$

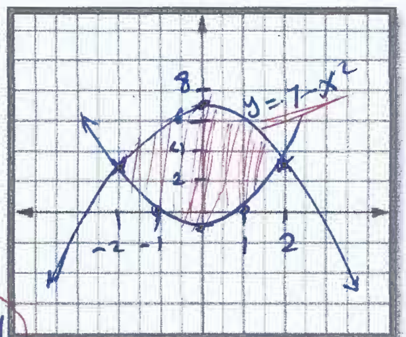
فوق $y = x^2+2 \Rightarrow 1^2+2 = 3$

3) $y = e^x$ (فوق) , $y = x-1$ (تحت) , $-2 \le x \le 0$

$$A = \int_{-2}^{0}[e^x-(x-1)]\,dx = \int_{-2}^{0}(e^x-x+1)\,dx = e^x-\frac{x^2}{2}+x\Big]_{-2}^{0} = 5-\frac{1}{e^2}$$

الأسئلة من (4-7) ارسم وأوجد مساحة المنطقة التي تحدّدها تقاطعات المنحنيات؟

4) $y = x^2-1$ (تحت) , $y = 7-x^2$ (فوق)



$x^2-1 = 7-x^2$

$2x^2 = 8$

$x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm 2 \Rightarrow \int_{-2}^{2}[7-x^2-(x^2-1)]\,dx$

$$\int_{-2}^{2}(7-x^2-x^2+1)\,dx = \int_{-2}^{2}(8-2x^2)\,dx = 8x-\frac{2x^3}{3}\Big]_{-2}^{2} = \frac{64}{3}$$

ح/ ثانية ⟸ $2\int_0^2(-2x^2+8)\,dx$

تقاطع التقاطع

5) $y = 4xe^{-x^2}$, $y = |x| < \begin{matrix} x \\ -x \end{matrix}$

$$\frac{4x}{e^{x^2}} = \frac{x}{1} \Rightarrow xe^{x^2} = 4x$$

$$xe^{x^2} - 4x = 0$$

$$x(e^{x^2} - 4) = 0$$

$$\boxed{x = 0}$$

$$e^{x^2} = 4 \Rightarrow x^2 = \ln 4$$

$$\boxed{x = \sqrt{\ln 4}} = 1.17$$

$$A = \int_0^{\sqrt{\ln 4}} (4xe^{-x^2} - x)\,dx$$

$$= \frac{{}^{2}\cancel{4}x}{-\cancel{2}x} e^{-x^2} - \frac{x^2}{2}\Big]_0^{\sqrt{\ln 4}} =$$

$$= \frac{-2}{e^{x^2}} - \frac{x^2}{2}\Big]_0^{\sqrt{\ln 4}} = 0.8068$$

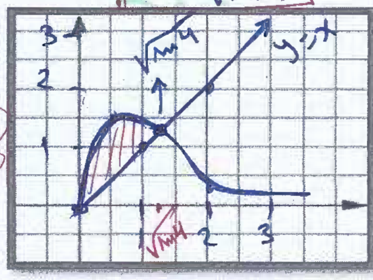
ملاحظة: مسارات

$(-x) \Leftarrow$ ب

$$-xe^{x^2} = 4x$$

$$-xe^{x^2} - 4x = 0 \Rightarrow x(-e^{x^2} - 4) = 0$$

$$-e^{x^2} - 4 = 0 \Rightarrow e^{x^2} \neq -4$$



6) $y = \dfrac{2}{x^2 + 1}$, $y = |x|$

$$\frac{2}{x^2+1} = \frac{-x}{1}$$

$$-x^3 - x - 2 = 0$$

$$x^3 + x + 2 = 0$$

$$\boxed{x = -1}$$

$$\boxed{x = 1}$$

$$\frac{2}{x^2+1} \times \frac{x}{1} \Rightarrow x^3 + x = 2$$

$$x^3 + x - 2 = 0$$

$$\boxed{x = 1}$$

$$A = \int_{-1}^{0} \left(\frac{2}{x^2+1} + x\right) dx + \int_0^1 \left(\frac{2}{x^2+1} - x\right) dx$$

$$= \left[2\tan^{-1} x + \frac{x^2}{2}\right]_{-1}^{0} + \left[2\tan^{-1} x - \frac{x^2}{2}\right]_0^1$$

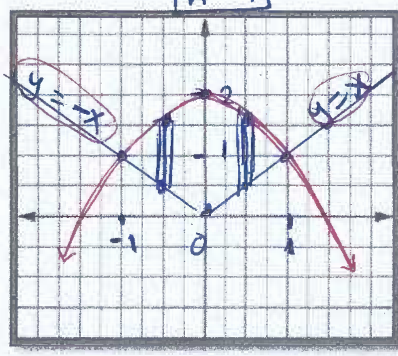
$$= \Pi - 1 = 2.14159$$

-1 $-x$ 0 x 1

نظام التوزيع

$$\left(\frac{2}{x^2+1} - x\right)$$

$$\left(\frac{2}{x^2+1} - (-x)\right)$$



7) $y = sinx$, $y = cosx$, $0 \leq x \leq 2\pi$

$$\sin x = \cos x$$

$$x = \frac{\Pi}{4}, \frac{5\Pi}{4}$$

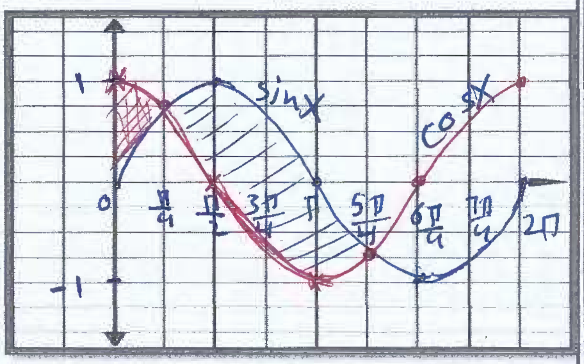
0   $\frac{\Pi}{4}$ $\frac{5\Pi}{4}$ 2Π

يمكن للطالب ان يعوض
بقيم بين الفترات لمعرفة
الدالة الأعلى دون الحاجة
إلى الرسم

$$A = \int_0^{\frac{\Pi}{4}} (\cos x - \sin x)\,dx$$

$$+ \int_{\frac{\Pi}{4}}^{\frac{5\Pi}{4}} (\sin x - \cos x)\,dx$$

$$* \int_{\frac{5\Pi}{4}}^{2\Pi} (\cos x - \sin x)\,dx = 4\sqrt{2}$$



أهم مجموعة أسئلة ورد منها في جميع السنوات السابقة

الأسئلة من (8-14) ارسم وأوجد مساحة المنطقة المحدودة بالمنحنيات المعطاة، اختر متغيّر التّكامل بحيث تتم كتابة المساحة كتكامل واحد، تحقق من اجابتك باستخدام صيغة هندسية أساسية للمساحة؟

8) $y = x \quad , \quad y = 2 - x \quad , \quad y = 0$

$\boxed{x=0}$ ، $2 - x = 0 \Rightarrow \boxed{x = 2}$

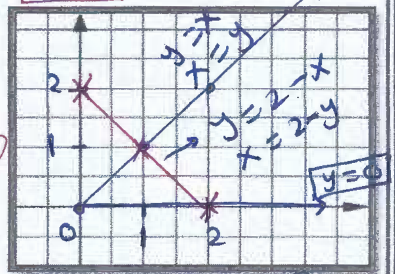
$2 - x = x \Rightarrow \boxed{x = 1}$

لاحظ ممكن حل السؤال بالنسبة لـ x ⇐ يعني

$A = \int_0^1 x\,dx + \int_1^2 (2-x)\,dx = 1$

ولكن المطلوب كتابة المساحة كتكامل واحد ⇐ اذن نكتب بدلالة y ⇐

$A = \int_{y=0}^{y=1} (2 - y - y)\,dy = 2y - y^2 \Big]_0^1 = 1$



هندسياً $\Rightarrow \Delta \Rightarrow \frac{1}{2}(2)(1) = 1$

9) $y = x \quad , y = 2 \; , \quad y = 6 - x \quad , \quad y = 0$

$\boxed{x=0}$ ، $6 - x = 0 \Rightarrow \boxed{x = 6}$ } $6 - x = x$

$\boxed{x=2}$ ، $6 - x = 2 \Rightarrow \boxed{x = 4}$ } $\boxed{x = 3}$

وحتى نكتب بصورة تكامل واحد اذن اليمين - اليسار

المظللة هي منطقة التكامل من

$\boxed{x = y} \Leftarrow y = x$

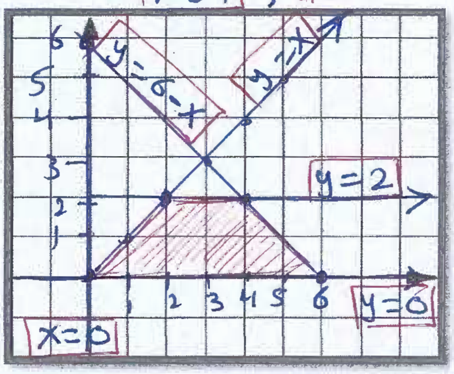
$y = 2$

$\boxed{x = 6 - y} \Leftarrow y = 6 - x$

$y = 0$

$A = \int_{y=0}^{y=2} (6 - y - y)\,dy$

$A = \left[6y - y^2\right]_0^2 = 8$



وهندسياً مساحة شبه منحرف

$A = \frac{1}{2}(6+2)(2) = 8$

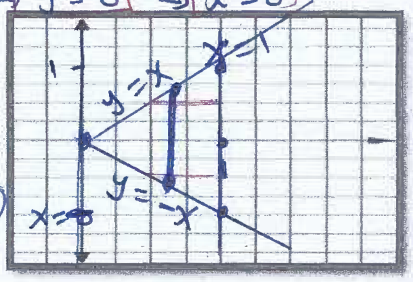
10) $x = y \quad , \quad x = -y \quad , \quad \boxed{x = 1}$ ، $y = -y \Rightarrow 2y = 0 \Rightarrow \boxed{y = 0} \Rightarrow \boxed{x = 0}$

حتى نكتب كتكامل واحد اذن نوجد بحث بدلالة (x)

$A = \int_{x=0}^{x=1} [x - (-x)]\,dx = \int_0^1 2x\,dx = 1$ ✓

هندسياً

$\frac{1}{2}(2)(1) = 1$



لاحظ لو كتبناها بدلالة (y)

$\int_{y=-1}^{y=0} (1 - (-y))\,dy + \int_0^1 (1 - y)\,dy = 1 \Rightarrow 2\int_0^1 (1-y)\,dy$ ✓

11) $y = 2x$ لكل $x > 0 \quad , \quad y = 3 - x^2 \quad , \quad x = 0$

نساوي الاقترانات لمعرفة نقاط التقاطع

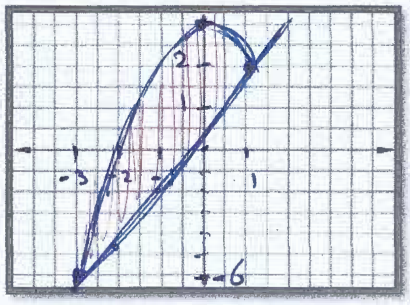
$3 - x^2 = 2x \Rightarrow x^2 + 2x - 3 = 0$

$(x - 1)(x + 3) = 0$

$\boxed{x = 1}$ ، $\boxed{x = -3}$

$A = \int_{-3}^{1} (3 - x^2 - 2x)\,dx$

$\left[3x - \frac{x^3}{3} - x^2\right]_{-3}^{1} = \frac{32}{3}$

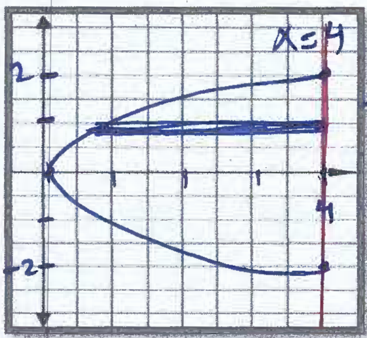


2018/2019

12) $x = y^2$, $x = 4$ ، $y^2 = 4 \Rightarrow y = \pm 2$

$$A = \int_{y=-2}^{y=2} (4 - y^2)\, dy$$

$$\left[4y - \frac{y^3}{3}\right]_{-2}^{2} = \frac{32}{3}$$



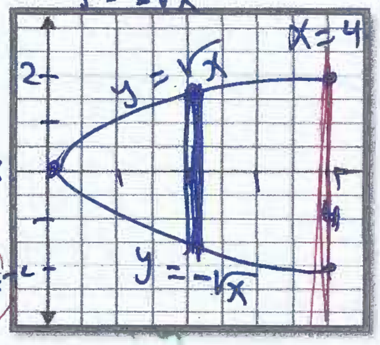
$x = y^2$

$y = \pm\sqrt{x}$

ونحل بدلالة (x) أيضاً كتكامل واحد

$$\Rightarrow \int_{x=0}^{x=4} [\sqrt{x} - (-\sqrt{x})]\, dx$$

$$2\int_0^4 \sqrt{x}\, dx = \frac{32}{3}$$



أو

من التناظر ← $2\int_{y=0}^{y=2} (4 - y^2)\, dy = 2\left[4y - \frac{y^3}{3}\right]_0^2 = \frac{32}{3}$

13) $y = e^x$, $y = 4e^{-x}$, $x = 0$

$$A = \int_{x=0}^{x=\ln 2} (4e^{-x} - e^x)\, dx$$

$$\left[-4e^{-x} - e^x\right]_0^{\ln 2} = 1$$

لاحظ :

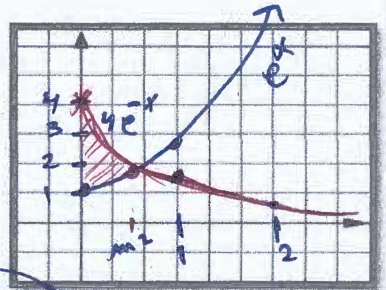
$e^x \neq 0$

$4e^{-x} \neq 0$

اذن نساوي المعادلتين معاً

$\frac{e^x}{1} = \frac{4}{e^x} \Rightarrow \sqrt{e^{2x}} = \sqrt{4}$

$e^x = 2 \Rightarrow x = \ln 2$



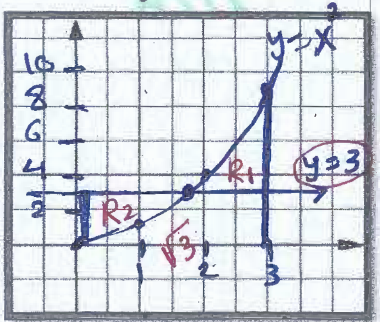
14) $y = \frac{\ln x}{x}$, $y = \frac{1 - x}{1 + x^2}$, $1 \le x \le 4$

تعويض ثلاثة مرات

$$A = \int_{x=1}^{x=4} \left(\frac{\ln x}{x} - \frac{1-x}{1+x^2}\right) dx \Rightarrow \begin{matrix} u = \ln x \\ du = \frac{dx}{x} \end{matrix} \Rightarrow \int_1^4 u\, du - \left(\int_1^4 \frac{1}{1+x^2}\, dx - \int_1^4 \frac{x}{1+x^2}\, dx\right)$$

$$= \frac{(\ln x)^2}{2}\Big]_1^4 - \left(\tan^{-1} x\Big]_1^4 - \frac{1}{2}\ln|1 + x^2|\Big]_1^4\right)$$

15) القيمة المتوسّطة لدالة $f(x)$ هي $A = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$ ، احسب القيمة المتوسّطة لـ $f(x) = x^2$ على الفترة $[0,3]$ ، وبيّن أنّ المساحة فوق $y = A$ وتحت $y = f(x)$ تساوي المساحة تحت $y = A$ وفوق $y = f(x)$؟



$$A = \frac{1}{3}\int_0^3 x^2\, dx = \frac{1}{3}\frac{x^3}{3}\Big]_0^3 = 3$$

$x^2 = 3 \Rightarrow x = \sqrt{3}$

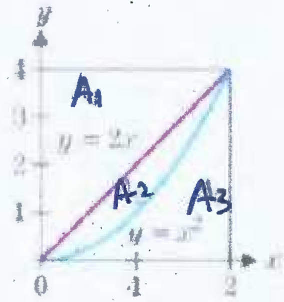
R_1 المساحة فوق $y = A = 3$ وتحت $f(x) = x^2$

$$\int_{\sqrt{3}}^{3} (x^2 - 3)\, dx = \frac{x^3}{3} - 3x\Big]_{\sqrt{3}}^{3} = 2\sqrt{3}$$

$= R_2$ المساحة تحت $y = 3$ وفوق $y = x^2$

$$\int_0^{\sqrt{3}} (3 - x^2)\, dx = 3x - \frac{x^3}{3}\Big]_0^{\sqrt{3}} = 2\sqrt{3}$$

وهو المطلوب .



16) بدلالة A_1 , A_2 , A_3 حدّد المساحة المعطاة بكل تكامل؟

a) $\int_0^2 (2x - x^2)\, dx$ A_2

b) $\int_0^2 (4 - x^2)\, dx$ $A_1 + A_2$

c) $\int_0^4 (2 - \sqrt{y})\, dy$ A_3

d) $\int_0^4 \left(\sqrt{y} - \frac{y}{2}\right) dy$ A_2

نفس الجزء (a)

أسئلة متنوّعة

1) جد المساحة ؟ $y = x\sqrt{a^2 - x^2}$, $a > 0$, $y = 0$

$$x\sqrt{a^2-x^2} = 0$$
$$x^2(a^2-x^2) = 0$$
$$\boxed{x = 0}$$
$$x^2 = a^2$$
$$x = \pm a$$

$a > 0$ معطى $\Leftarrow$ إذن $\boxed{x = a}$

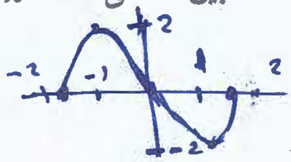
$$u = a^2 - x^2$$
$$du = -2x\, dx$$
$$\frac{du}{-2x} = dx$$

$$A = \int_{x=0}^{x=a} x\,(a^2-x^2)^{\frac{1}{2}}\, dx$$

$$\int_0^a \cancel{x}\, u^{\frac{1}{2}} \frac{du}{-2\cancel{x}} = -\frac{1}{2}\int_0^a u^{\frac{1}{2}} du$$

$$\left[-\frac{1}{\cancel{2}}\frac{\cancel{2}u^{\frac{3}{2}}}{3}\right]_0^a = -\frac{1}{3}\sqrt{(a^2-x^2)^3}\Big]_0^a = \frac{1}{3}a^3$$

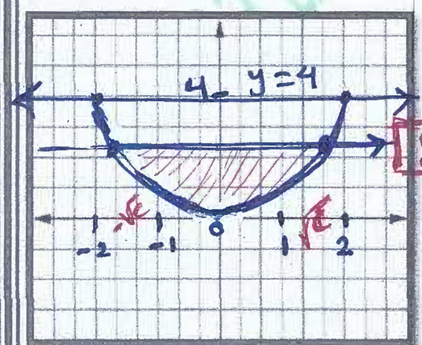
2) جد المساحة بين منحنى الدالة $y = ax^3 + bx$ والنّقطة $(-1, 2)$ عظمى ؟



$$f(-1) = 2 \Rightarrow 2 = a(-1)^3 + b(-1) = \boxed{-a - b = 2}$$
$$f'(-1) = 0 \Rightarrow 3ax^2 + b = 0 = \boxed{3a + b = 0}$$
$$\boxed{a = 1} \ , \ \boxed{b = -3} \Rightarrow \boxed{y = x^3 - 3x} = 0 \Rightarrow x(x^2 - 3) = 0$$
$$x = 0$$
$$x = \pm\sqrt{3}$$

$$A = \left|\int_{-\sqrt{3}}^{0} (x^3 - 3x)\, dx\right| + \left|\int_0^{\sqrt{3}} (x^3 - 3x)\, dx\right| = \frac{9}{2}$$

3) المنطقة المحدودة من أسفل بالقطع المكافئ $y = x^2$ ومن أعلى بالمستقيم $y = 4$ ، جزئت إلى جزئين متساويين في المساحة بالمستقيم الأفقي $y = c$ ، جد قيمة (c) بالتّكامل بالنّسبة لِ (x) ؟



$$\begin{cases} y = x^2 \\ y = 4 \end{cases} \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow \boxed{x = \pm 2}$$

$\Rightarrow$ المساحة بين المنحنى والمستقيم

$$A = 2\int_0^2 (4 - x^2)\, dx = \frac{32}{3}$$

المساحة بين $\begin{cases} y = x^2 \\ y = c \end{cases}$ $x^2 = c$ $\boxed{x = \pm\sqrt{c}}$

تساوي $\frac{1}{2}$ المساحة الكلية أي $\frac{16}{3}$

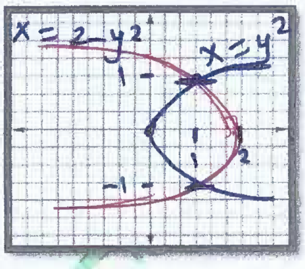
$$A = 2\int_0^{\sqrt{c}} (c - x^2)\, dx = \frac{16}{3}$$

$$2\left[cx - \frac{x^3}{3}\right]_0^{\sqrt{c}} = 2\left(c\sqrt{c} - \frac{c\sqrt{c}}{3}\right) = \frac{4}{\cancel{3}}c\sqrt{c} = \frac{16}{\cancel{3}}$$

$$c\sqrt{c} = 4 \Rightarrow c^3 = 16$$
$$c = \sqrt[3]{16} \Rightarrow \boxed{c = 2.51}$$

مساحة منطقة محدودة بدوال (y)

4) جد مساحة المنطقة المحدودة بين $x = 2 - y^2$ و $x = y^2$ ؟



$2-y^2=y^2$

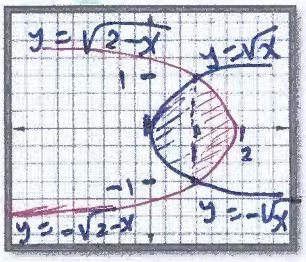
$y^2=1 \Rightarrow \boxed{y=\pm 1}$

يسار يمين

$$A = \int_{y=-1}^{y=1} (2-y^2-y^2)\,dy = \int_{-1}^{1}(2-2y^2)\,dy = \left[2y - \frac{2y^3}{3}\right]_{-1}^{1}$$

$$A = \frac{8}{3}$$

يمكن حله أيضاً بدلالة (x)



$$A = 2\int_0^1 \sqrt{x}\,dx + 2\int_1^2 \sqrt{2-x}\,dx$$

$$= \frac{8}{3}$$

$\sqrt{x} = \sqrt{y^2}$

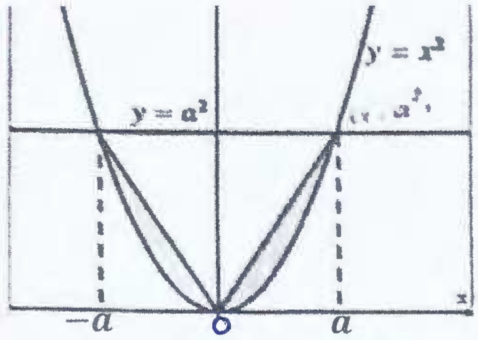
$y = \pm\sqrt{x}$

$x = 2-y^2$

$y^2 = 2-x$

$y = \pm\sqrt{2-x}$

5) $y = x^2$ والمستقيم $y = a^2$ ، جد قيمة (a) بحيث تكون مساحة المنطقة المظلّلة = 9 وحدات مساحة مربّعة؟



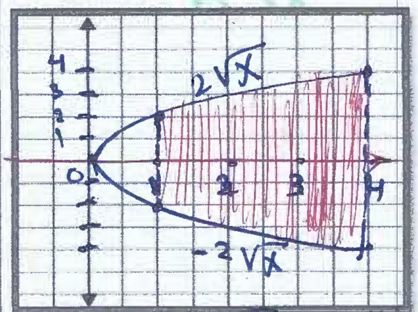
$$\text{مساحة المظللة} = \int_{-a}^{a}(a^2-x^2)\,dx - \triangle$$

$$= 2\int_0^a (a^2-x^2)\,dx - \left(\frac{1}{2}(2a)a^2\right)$$

$$= 2\left[a^2x - \frac{x^3}{3}\right]_0^a - a^3 = 9$$

$$\frac{4}{3}a^3 - a^3 = 9 \Rightarrow \frac{a^3}{3} = \frac{9}{1} \Rightarrow a^3 = 27 \Rightarrow \boxed{a=3}$$

6) جد مساحة المنطقة المحدودة ب $y^2 = 4x$ ومحور السّينات والمستقيمان $x = 1$ و $x = 4$ ؟



$\sqrt{y^2} = \sqrt{4x}$ للرسم

$y = \pm 2\sqrt{x} \rightarrow x \geq 0$

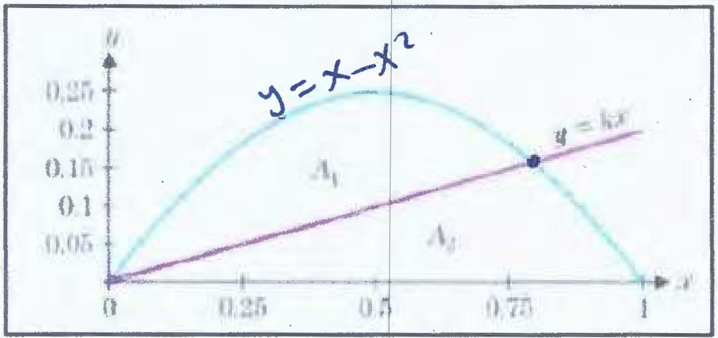
$$A = \int_{x=1}^{x=4} \left[2\sqrt{x} - (-2\sqrt{x})\right]\,dx$$

$$= 4\int_1^4 \sqrt{x}\,dx = 4\left[\frac{2x^{\frac{3}{2}}}{3}\right]_1^4$$

$$= 4\left(\frac{2}{3}(8) - \frac{2}{3}\right)$$

$$= \frac{56}{3}$$

38 (7 لأجل $y = x - x^2$ ، و $y = kx$ كما هو مبيّن بالشّكل. جد قيمة k بحيث تكون $A_1 = A_2$ ؟



$$\text{المساحة الكلية} = A_1 + A_2 = \int_0^1 (x - x^2)\,dx = \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \boxed{\frac{1}{6}}$$

$$A_1 = A_2 \Longrightarrow \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{12} \Longrightarrow A_1 = \frac{1}{12},\quad A_2 = \frac{1}{12}$$

لايجاد المساحة من منحنى الدالة

$$y = x - x^2$$
$$y = kx$$

نجد نقاط التقاطع $\Leftarrow$ $x - x^2 = kx$

$$\cancel{x}(1 - x) = k\cancel{x} \Longrightarrow \boxed{x = 1 - k}$$

$$A_1 = \frac{1}{12} = \int_0^{1-k} (x - x^2 - kx)\,dx = \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{kx^2}{2}\right]_0^{1-k}$$

$$\left[\frac{x^2(1-k)}{2} - \frac{x^3}{3}\right]_0^{1-k} = \frac{(1-k)^2(1-k)^1}{2} - \frac{(1-k)^3}{3} = \frac{(1-k)^3}{2} - \frac{(1-k)^3}{3}$$

$$\frac{(1-k)^3}{6} = \frac{1}{12} \Longrightarrow \sqrt[3]{(1-k)^3} = \sqrt[3]{\frac{6}{12}} = 1 - k = \sqrt[3]{\frac{1}{2}}$$

$$k = 1 - \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$$