الوحدة السادسة المساحة السطحية وطول قوس المنحني

فيديوهات الوحدة السادسة <u>الجزء الثاني</u>

الوحدة السادسة

المساحة السطحية وطول قوس المنحنى

الصف الثاني عشر متقدم

إعداد

د: حيدر عامر السعافين

حصة 1

تعريف:طول قوس: طول منحنى ممهد :

إذا بدأ منحنى ممهد عند النقطة (a,c) وانتهى عند (b,d) ، $a<b$ فإن طول قوس المنحنى هو

$L=\int_a^b\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx$ إذا كانت y دالة ممهدة في x على $[a,b]$

أوجد طول المنحنى $y=\frac{2}{3}(x+1)^{3/2}$ حيث $-1\le x\le 3$

$$L=\int_a^b\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx$$

$$y'=\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{2}(x+1)^{\frac{1}{2}}\cdot 1=\sqrt{x+1}$$

$$(y')^2=\left(\sqrt{x+1}\right)^2=x+1$$

$$L = \int_{-1}^{3} \sqrt{1 + x + 1}\, dx$$

$$L = \int_{-1}^{3} (2 + x)^{\frac{1}{2}}\, dx$$

$$= \frac{2}{3} \left([2 + x]^{\frac{3}{2}} \right)_{-1}^{3}$$

$$= \frac{2}{3} \left(5^{\frac{3}{2}} - 1 \right) = 6.8\, u$$

حصة 2

<u>مثال 1</u> : $y = -\int_x^{-2} \sqrt{4t^4 - 1}\ dt$ على $[-2, -1]$

الحل:

$$y = \int_{-2}^{x} \sqrt{4t^4 - 1}\ dt$$

$$y' = \sqrt{4x^4 - 1}$$

$$(y')^2 = \left(\sqrt{4x^4 - 1}\right)^2 = 4x^4 - 1$$

$$S = \int_a^b \sqrt{1 + (y')^2}\ \ dx$$

$$S = \int_{-2}^{-1} \sqrt{1 + 4x^4 - 1}\, dx = \int_{-2}^{-1} \sqrt{4x^4\, dx}$$

$$S = \int_{-2}^{-1} 2x^2 dx = \left[\frac{2x^3}{3}\right]_{-2}^{-1} = \frac{2}{3}\left[(-1)^3 - (-2)^3\right] = \frac{14}{3} u$$

<u>حصة 3</u>

أوجد طول المنحنى للدالة $f(x)$ في الفترة $[1,2]$ حيث $f'(x)=\sqrt{x-1}$

$$(f'(x))^2=\left(\sqrt{x-1}\right)^2=x-1$$

$$S=\int_a^b \sqrt{1+(y')^2}\;dx$$

$$L=\int_1^2 \sqrt{1+x-1}dx$$

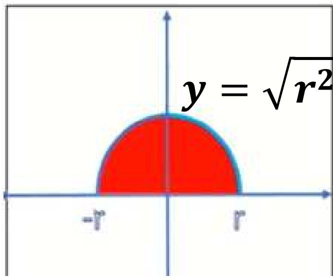
$$=\int_1^2 \sqrt{x}dx=\frac{2}{3}\left[x^{\frac{3}{2}}\right]_1^2$$

$$=\frac{2}{3}\left[2^{\frac{3}{2}}-1\right]=1.22u$$

طول قوس المنحنى (المساحة السطحية) حصة (4)

مثال 1 : اثبت ان مساحة سطح الكرة $A = 4\pi r^2$

الحل: الكرة تتولد من دوران نصف دائرة



$y = \sqrt{r^2 - x^2}$

$$x^2 + y^2 = r^2$$

$$y^2 = r^2 - x^2 \ \rightarrow y = \sqrt{r^2 - x^2}$$

$$y' = \frac{-2x}{2\sqrt{r^2 - x^2}} = \frac{-x}{\sqrt{r^2 - x^2}}$$

$$(y')^2 = \left(\frac{-x}{\sqrt{r^2 - x^2}}\right)^2 = \frac{x^2}{r^2 - x^2}$$

$$S = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + (y')^2} \ dx$$

$$y' = \frac{-2x}{2\sqrt{r^2 - x^2}} = \frac{-x}{\sqrt{r^2 - x^2}}$$

$$(y')^2 = \left(\frac{-x}{\sqrt{r^2 - x^2}}\right)^2 = \frac{x^2}{r^2 - x^2}$$

$$S = 2\pi \int^{b} f(x) \sqrt{1 + (y')^2} \; dx$$

$$y' = \frac{-2x}{2\sqrt{r^2 - x^2}} = \frac{-x}{\sqrt{r^2 - x^2}}$$

$$(y')^2 = \left(\frac{-x}{\sqrt{r^2 - x^2}}\right)^2 = \frac{x^2}{r^2 - x^2}$$

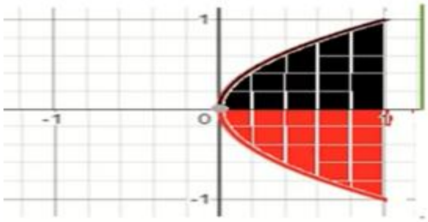
$$S = 2\pi \int^{b} f(x) \sqrt{1 + (y')^2} \; dx$$

$$S = 2\pi \int_{-r}^{r} \sqrt{r^2 - x^2} \cdot \sqrt{1 + \frac{x^2}{r^2 - x^2}}\, dx = 2\pi \int_{-r}^{r} \sqrt{r^2 - x^2} \cdot \sqrt{\frac{r^2 - x^2 + x^2}{r^2 - x^2}}\, dx$$

$$S = 2\pi \int_{-r}^{r} \sqrt{r^2 - x^2} \cdot \frac{\sqrt{r^2}}{\sqrt{r^2 - x^2}}\, dx = 2\pi \int_{-r}^{r} r\, dx$$

$$S = 2\pi r[x]_{-r}^{r} = 2\pi r[r - (-r)] =$$

$$S = 2\pi r(r + r) = 2\pi r(2r) = 4\pi r^2$$



مثال 2 :احسب مساحة السطح المتولد من دوران قطعة المنحنى

$y = \sqrt{x}$ حيث $0 \le x \le 1$ وذلك بالدوران حول محور x

الحل:

$$y^{/} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$\left(y^{/}\right)^2 = \left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)^2 = \frac{1}{4x}$$

$$S = 2\pi \int_a^b y \,.\, \sqrt{1 + (y^{/})^2}\; dx$$

$$S = 2\pi \int_0^1 \sqrt{x} \,.\, \sqrt{1 + \frac{1}{4x}}\; dx$$

$$S = 2\pi \int_0^1 \sqrt{x} \,.\, \sqrt{\frac{4x+1}{4x}}\; dx$$

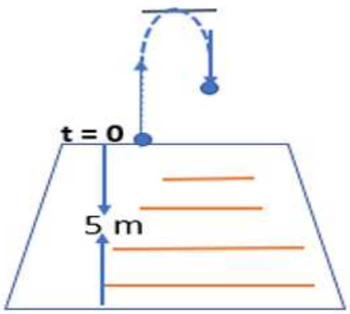
$$S = 2\pi \int^1 \sqrt{x} \,.\, \frac{\sqrt{4x+1}}{2\sqrt{x}}\; dx$$

$$S = \pi \int_0^1 \sqrt{4x+1}\; dx = \pi \int_0^1 (4x+1)^{\frac{1}{2}}\; dx$$

$$S = \frac{\pi}{4} \int_0^1 4(4x+1)^{\frac{1}{2}}\; dx = \frac{\pi}{4}\left(\frac{2}{3}\right)\left[(4x+1)^{\frac{3}{2}}\right]_0^1 = \frac{\pi}{6}\left[5^{\frac{3}{2}} - 1\right] u$$

حركة المقذوفات

حصة 1



اطلقت قذيفة ثقيلة رأسياً إلى اعلى من منصة ترتفع 5 m فوق سطح الأرض

بسرعة ابتدائية 160 m / s . اوجد :

(1) سرعة القذيفة كدالة في الزمن t .

(2) ارتفاع القذيفة فوق سطح الأرض كدالة في الزمن t.

الحل :

$$\mathbf{v(0) = 160}\boldsymbol{m/s} \quad , \quad \mathbf{S(0) = 5\ m}$$

$$a(t) = -9.8\ m/s^2$$

$$* \int a(t)dt = \int -9.8dt$$

$$V(t) = -9.8t + c_1$$

$$* \int V(t)dt = \int(-9.8t + 160)dt \qquad \textbf{(b)}$$

$$S(t) = \frac{-9.8t^2}{2} + 160t + c_2$$

$$S(0) = \frac{-9.8(0)^2}{2} + 160(0) + c_2 \Rightarrow 5 = c_2$$

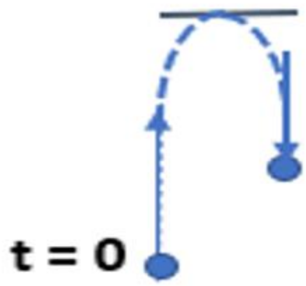
$$S(t) = -4.9t^2 + 160t + 5$$

$$V(0) = -9.8(0) + c_1$$

$$160 = c_1$$

$$V(t) = -9.8t + 160$$

حركة المقذوفات (حصة 2)



تم قذف كرة للأعلى رأسياً بسرعة متجهة ابتدائية 19.6 m/s مع تجاهل مقاومة الهواء

اوجد :1)معادلة لارتفاع الكرة بدلالة الزمن t

2)القيمة العظمى لارتفاع الكرة

3) الزمن الذي قطعته الكرة في الهواء .

الحل:

$$h^{//}(t) = -9.8 \quad , \qquad h^{/}(t) = 19.6$$

$$* \int h^{//}(t)dt = \int -9.8\, dt \qquad , \quad h^{/}(0) = 19.6$$

$$h^{/}(t) = -9.8t + c_1$$

$$h^{/}(0) = -9.8(0) + c_1$$

$$19.6 = 0 + c_1 \longrightarrow c_1 = 19.6$$

$$\therefore h^{/}(t) = -9.8(t) + 19.6$$

$$* \int h^{/}(t)dt = \int (-9.8t + 19.6)\, dt$$

$$h(t) = -\frac{9.8t^2}{2} + 19.6t + c_2$$

$$h(0) = -4.9\,(0)^2 + 19.6(0) + c_2 \quad , \quad h(0) = 0$$

$$0 = 0 + c_2 \longrightarrow c_2 = 0$$

$$\therefore h(t) = -4.9t^2 + 19.6t$$

(b) $h'(0) = 0$ القيمة العظمى للارتفاع عندما

نضع : $h'(t) = -9.8(t) + 19.6 = 0$

-9.8 t =-19.6

$-9.8(t) = -19.6 \qquad t = \frac{-19.6}{-9.8} = 2\ s$

$$\therefore h(2) = -4.9(2)^2 + 19.6(2) = 19.6\ m$$

نجعل الارتفاع = 0

$$-4.9t^2 + 19.6t = 0$$

$$t(-4.9t + 19.6) = 0$$

$$t = 0$$

$$-4.9 + 19.6 = 0$$

$$t = \frac{19.6}{4.9} = 4\ s$$

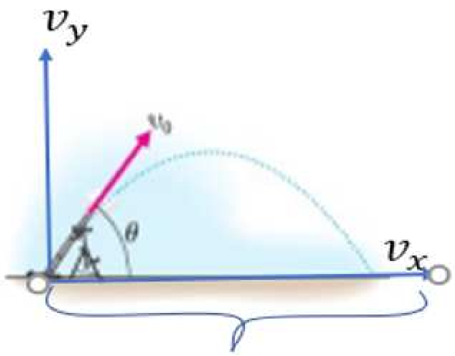
طريقة اخرى: زمن الصعود = زمن الهبوط

استغرقت الكرة للوصول لاقصى ارتفاع 2 ثانية

بالتالي يكون زمن الهبوط = 2 ثانية

الزمن الكلى لوجود الكرة بالهواء = 2 + 2 = 4 ثواني

حركة مقذوف في بعدين (حصة 3)



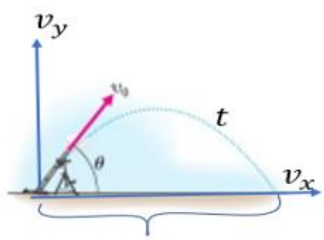
رأسية	افقية
$sin\theta = \frac{v_y}{v_0}$	$cos\theta = \frac{v_x}{v_0}$
$v_y = v_o . sin\theta$	$v_x = v_o . cos\theta$

إذا كانت زاوية $45^\circ \geq \theta$ اكبر المدى ما يمكن

إذا كانت زاوية $45^\circ < \theta$ المدى يصغر

* يطلق جسم ما بزاوية $\theta = \frac{\pi}{3}$ راديان من الأفق مع سرعة ابتدائية $v_0 = 98\frac{m}{s}$. اوجد :

(1)زمن التحليق (2) المدى الأفقي



$$y^{//}(t) = -9.8\ m/s^2$$

$$* \int y^{//}(t)dt = \int -9.8dt$$

$$y^{/}(t) = -9.8t + c \Rightarrow c = v_y = v_0 . sin\theta$$

$$v_y = 98 \sin\frac{\pi}{3} = 98\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 49\sqrt{3}$$

$$y^{/}(t) = -9.8t + 49\sqrt{3}$$

* $\int y^{/}(t)dt = \int(-9.8t + 40\sqrt{3})dt$: لإيجاد الموقع

$$S(t) = y(t) = -4.9t^2 + 40\sqrt{3}t$$

عند اصطدام الجسم بالارض $y(t) = 0$

$$-4.9t^2 + 40\sqrt{3}t = 0$$

$t(-4.9t + 49\sqrt{3}) = 0 \Longrightarrow t = 0$ او $t = \dfrac{-49\sqrt{3}}{-4.9} = 10\sqrt{3} = 17.3\ s$

ب)المدى الافقي (المركبة الافقية) المسافة عند الاصطدام بالارض

$$x^{//}(t) = 0 \longrightarrow \int x^{//}dt = \int 0dt \longrightarrow x^{/}(t) = c$$

$$v_x = v_o.\,cos\theta = 98.\cos(60) = 98\left(\frac{1}{2}\right) = 49$$

$$x^{/}(t) = 49$$

$$x(t) = 49\,t \longrightarrow x\left(10\sqrt{3}\right) = 49\left(10\sqrt{3}\right) = 490\sqrt{3} \approx 848.7\,m$$

الشـــغـل <u>(حصة 1)</u>

إذا كانت القوة (ثابتة)

$$\mathbf{W = F \cdot d}$$

الشغل

القوة المبذولة

المسافة

$\mathbf{F(x) = k \cdot x}$ القوة المبذولة من النابض

k (ثابت المرونة)

x

(المسافة التي ينكمش او يتمد إليها النابض الحلزوني عن طوله)

الطاقة الحركية = طاقة الجهد

الانتباه الى تحويل الوحدات

إذا كانت القوة (غيرثابتة)

الشغل

$$W = \int_a^b F(x)\,dx$$

القوة المبذولة على الفترة $[\mathbf{a, b}]$

ملاحظات:

1) الشغل يساوي صفرا إذا كانت المسافة d = 0

أو a = b فيصبح

$$\int_a^b = \int_a^a = 0$$

(1) أحدثت قوة قدرها 5 lb على تمدد نابض 4 in .أوجد :

الشغل المبذول في تمدد هذا النابض 6 in أبعد من طوله الطبيعي :

الحل:

نحول: $4\ in = 4 \div 12 = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}\ ft$

$$F(x) = kx$$

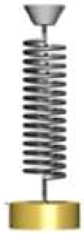
$$5 = k\left(\frac{1}{3}\right) \longrightarrow k = 15$$

$$F(x) = 15x$$

نحول: $6\ in = 6 \div 12 = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}\ ft$

$$W = \int_a^b F(x)dx = \int_0^{0.5} 15x dx =$$

$$= \left[\frac{15x^2}{2}\right]_0^{0.5} = \frac{15}{2}[(0.5)^2 - 0] = \frac{15}{2} \times \frac{1}{4} = \frac{15}{8}\ ft/lb$$



(2) أحدثت قوة قدرها 7 lb على تمدد نابض $\frac{1}{3}$ ft .أوجد :

الشغل المبذول في تمدد هذا النابض 6 in أبعد من طوله الطبيعي :

الحل:

$$F(x) = 7$$

$$F\left(\frac{1}{3}\right) = 7$$

$$k(x) = 7 \longrightarrow 7 = k\left(\frac{1}{3}\right) \longrightarrow k = 21$$

$$F(x) = 21x$$

نحول: $6\ in = 6 \div 12 = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}\ ft$

$$W = \int_a^b F(x)dx = \int_0^{0.5} 21x dx =$$

$$= \left[\frac{21x^2}{2}\right]_5^{0.5} = \frac{21}{2}\left[(0.5)^2 - 0\right] = \frac{21}{2} \times \frac{1}{4} = \frac{21}{8}\ ft/lb$$

(3) تزن سلسلة طولها 40 ft, وزنها 1000 lb يتم سحبها لاعلى على سطح قارب السلسلة وجهة رأسيا .والجزء العلوي من السلسلة يبدأ في المياه 30 ft أسفل السطح :

الحل :

<u>الطول</u> <u>الوزن</u>

$40\,ft$ $W = 1000\,lb$

$30\,ft$ $F = ?$

$$40\,F = 1000 \times 30 \Longrightarrow F = \frac{1000 \times 30}{40} = 750\ lb$$

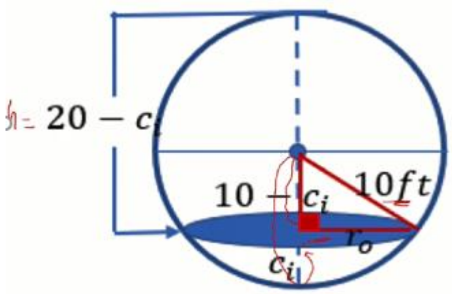
$$W = F\,.\,d = 750 \times 30 = 750\ \text{ft/lb}$$

الشغل الخزان(حصة 2)

مثال 1: يبلغ نصف قطرخزان كروي 10 ft مملوء بالماء .أوجد :

الشغل المبذول في ضخ كل كمية الماء للخارج من خلال الجزء العلوي.

الحل:



نقسم الخزان إلى شرائح اسطوانية

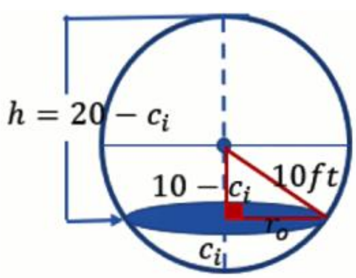
ثم نحسب حجم شريحة واحدة

ثم نوجد التكامل من 0 إلى 20

ثم نحسب الشغل المبذول للمسألة المعطاة

كثافة الماء : $1000\ kg/m^3$

أو $62.4\,\dfrac{Lb}{ft^3}$



نوجد نصف قطر الشريحة: r_D , $r_0^2 = 10^2 - (10^2 - c_i)^2$:

$$r_0^2 = 100 - (100 - 2c_i + c_i^2)$$

$$r_0^2 = \cancel{100} - \cancel{100} + 2c_i - c_i^2 = 2c_i - c_i^2$$

كثافة الماء × حجم الشريحة = F_i للقوة اللازمة الشريحة

$$F_i = \pi r_o^2\, h \times 62.4 = 62.4\pi(2c_i - c_i^2).\Delta x$$

$$W = F_i\,.\,d = 62.4\pi(20c_i - c_i^2).(20 - c_i).\Delta x$$

$$W = 62.4\pi c_i(20 - c_i).(20 - c_i).\Delta x$$

$$W = 62.4\pi c_i(20 - c_i)^2.\Delta x$$

$$W = \sum_{i=1}^{n} 62.4\,\pi c_i(20 - c_i)^2.\Delta x$$

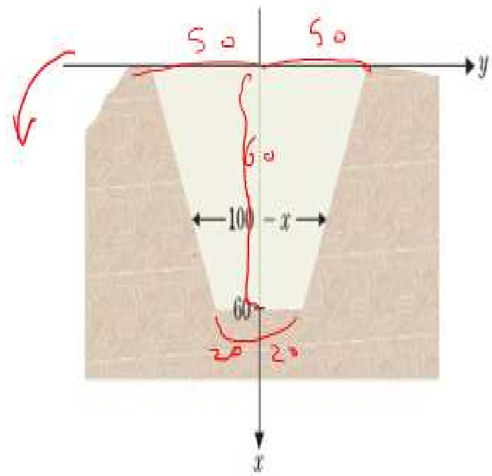
$$W = \int_0^{20} 62.4\pi \; x(20 - x)^2 \, dx$$

$$W = 62.4\pi \int_0^{20} x\,(400 - 40x + x^2)\, dx$$

$$W = 62.4\pi \int_0^{20} (400x - 40x^2 + x^3)\, dx$$

$$W = 62.4\pi \left[\frac{400x^2}{2} - \frac{40x^3}{3} + \frac{x^4}{4}\right]_0^{20} = 2.61 \times 10^6 \; lb\,/ft$$

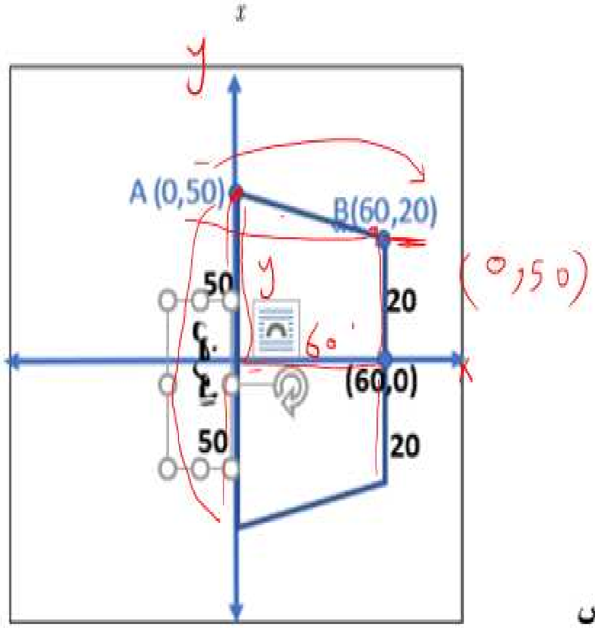
الشغل السد (حصة 3)



القوة الهيدروستاتيكية للسد

مثال: يتخذ السد شكلاً لشبه منحرف بارتفاع 60 ft يبلغ العرض في الجزء العلوي100 ft والعرض في الجزء السفلي 40 ft.اوجد القيمة العظمى للقوة الهيدروستاتيكية كي يصمد السد

الحل:



نوجد معادلة AB

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{50 - 20}{0 - 60} = -\frac{1}{2}$$

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y - 50 = -\frac{1}{2}(x - 0)$$

$$y = -\frac{1}{2}x + 50$$

العرض $W = 2y$

العرض $W = 2\left(50 - \frac{1}{2}x\right) = 100 - x$

كثافة

القوة الهيدروستاتيكية

وزن الماء

العمق

العرض

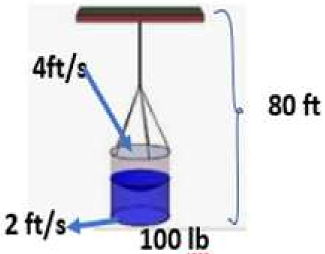
$$F = \int_{0}^{60} 62.4 \quad x \quad (w(x))\, dx$$

العمـ

$$F = \int_{0}^{60} 62.4\, x\, (100 - x)dx = \int_{0}^{60} 62.4(100x - x^2)dx$$

$$F = 62.4 \left[50x^2 - \frac{x^3}{3} \right]_0^{60} = 6.739 \times 10^4 \ lb$$

الشغل الدلو (حصة 4)



الشغل المبذول لدلو تسرب رمل

تم رفع دلو مسافة 80 ft بمعدل 4 ft/s يحتوي الدلو على 100 lb من الرمال لكن يتسرب منه الرمال بمعدل 2 lb/s .احسب الشغل المبذول .

الحل:

يصعد الدلو لمدة : $80 \div 4 = 20\ s$

خسارة $20 \times 2 = 40\ lb$

الذي يصل لأعلى : $100 - 40 = 60\ lb$

	الوزن بالباوند	الارتفاع بالقدم
كان ما في الدلو	(100 ,	0)
	(60 ,	80)

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{100 - 60}{0 - 80} = -\frac{1}{2}$$

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y - 100 = -\frac{1}{2}(x - 0)$$

$$y = -\frac{1}{2}x + 100$$

$$W = \int_0^{80} F.dx = \int_0^{80} \left(100 - \frac{1}{2}x\right) dx$$

$$W = \left[100x - \frac{x^4}{4}\right]_0^{80} = 6400\ lb/ft$$

العزم ومركز الكتلة (حصة 5)

تمرين 3: يزن صاروخ ممتلئ بالوقود 4500 كيلو جرام عند الإطلاق . وبعد الإطلاق يحظى الصاروخ بارتفاع ويفقد وزناً حيث يتم حرق الوقود . على فرض ان ان الصاروخ فقد 0.45 كيلو جرام من الوقود لكل 4.5 متر من الارتفاع المكتسب .احسب الشغل المبذول ليصل الصاروخ إلى ارتفاع 9000 متر .

$$0.45kg \leftrightarrow 4.5m,$$

$$x^{kg} \leftrightarrow 1\ m$$

$$x = \frac{0.45}{4.5} = 0.1^{lb}/m$$

$$1\ m \rightarrow 0.1\ \ lb$$

$$x\ m \rightarrow 0.1\ x\ \ lb$$

$$F = F_g = 90000 - 0.1\ x$$

$$W = \int_0^{9000} \underbrace{(4500 - 0.1x)}_{F(x)}dx = \left[4500x - 0.05x^2\right]_0^{9000}$$

$$= \left(4500 \times 9000 - 0.05 \times 9000^2\right) = 36,450,000$$

الدفع : $J = \int_a^b F(t)dt$ حيث $F(x)$ هي القوة المبذولة على الفترة الزمنية $[a,b]$

معادلة الدفع والزخم $J = m[v(b) - v(a)]$

تمرين 4: على فرض ان كرة البيسبول كانت تنطلق بسرعة $30m/s$ تصطدم بمضرب . ستتغير القوة المبذولة من المضرب على الكرة إلى القيم الموجودة بالجدول . قدر دفع وسرعة الكرة بعد الاصطدام .

$t(s)$	0	0.0001	0.0002	0.0003	0.0004
$F(N)$	0	1000	2100	4000	5000

$n = 4$ استخدم قاعدة سيمبسون :

$$J = \int_0^{0.0004} F(N)dN = (F(0) + 4F(0.0001) + 2F(0.0002) + 4F(0.0003) + F(0.0004))\left(\frac{0.0004 - 0}{3(4)}\right)$$
$$= (0 + 4000 + 4100) + 16000 + 5000)\left(\frac{0.0001}{3}\right)$$
$$= 0.97$$

الكتلة: $m = \lim_{x\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \rho(c_i)\Delta x = \int_a^b \rho(x)dx$ حيث $\rho(x)$ كثافة الجسم

كثافة

العزم الأول: $M = \lim_{x\to\infty} \sum_{i=1}^{n} c_i \rho(c_i)\Delta x = \int_a^b x\rho(x)dx$

مركز الكتلة : $\bar{x} = \frac{M}{m} = \frac{\int_a^b x\rho(x)dx}{\int_a^b \rho(x)}$

احسب الكتله ومركز الكتلة في كل مما يأتي :

- جسم تبلغ كثافته $\rho(x) = \left(\frac{x}{6} + 2\right) kg/m$ ، $0 \le x \le 6$

الكتلة

$$m = \int_0^6 \left(\frac{x}{6} + 2\right)dx = \left[\frac{x^2}{12} + 2x\right]_0^6 = \left(\frac{36}{12} + 12\right) - 0 = 15$$

العزم

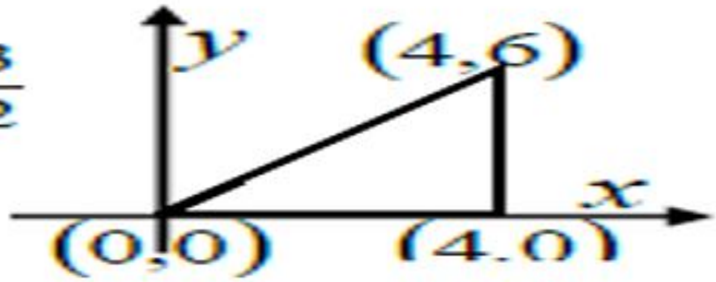
$$M = \int_0^6 x\left(\frac{x}{6} + 2\right)dx = \int_0^6 \left(\frac{x^2}{6} + 2x\right)dx = \left[\frac{x^3}{18} + x^2\right]_0^6 = \left(\frac{216}{18} + 36\right) - 0 = 48$$

$$\boxed{\bar{x} = \frac{M}{m} = \frac{48}{15} = 3.2}$$

تمرين 7: اوجد مركز الكتلة لمنطقة لها كثافة ثابتة إذا كانت المنطقة محدودة بالمثلث الذي رؤوسه $(0,0)$ و $(4,0)$ و $(4,6)$

$$m=\frac{6-0}{4-0}=\frac{3}{2}$$

$$f(x)=\frac{3}{2}x$$



$$m=\int_0^4 \frac{3}{2}x\,dx$$

$$=\left[\frac{3}{4}x^2\right]_0^4$$

$$=\frac{3}{4}(16)-0=12$$

$$M=\int_0^4 x\left(\frac{3x}{2}\right)dx=\int_0^4 \frac{3}{2}x^2\,dx$$

$$=\left[\frac{1}{2}x^3\right]_0^4$$

$$=32$$

$$\bar{x}=\frac{M}{m}$$

$$=\frac{32}{12}=\frac{8}{3}$$

الاحتمالات (1)

الاحتمالات

التعريف:

على فرض ان X هي متغير عشوائي له فرضية اي قيمة x لكل $a \le x \le b$ تكون دالة كثافة الاحتمال لـ X

دالة $f(x)$ تحقق :

(i) $f(x) \ge 0$ لكل $a \le x \le b$ لا تكون كثافة الاحتمال سالبة أبداً

(ii) $\int_a^b f(x)dx = 1$ الاحتمال الكلي 1

على تلك الفترة . أي أن : pdf بالمساحة تحت التمثيل البياني لـ c و d (المرنية) بين X يعطى الاحتمال الذي تقع فيه قيمة

(1) أثبت أن $f(x) = 3x^2$ تعرف pdf على الفترة $[0,1]$ باستخدام الخاصيتين $(i),(ii)$

(1) $$f(x) \ge 0$$

(2) $$\int_0^1 3x^2 dx = \left[x^3\right]_0^1 = 1^3 - 0 = 1$$

تحقق الشرطان فهي دالة كثافة احتمال pdf

(2) أثبت أن $f(x) = \frac{8}{3}e^{-2x}$ هي pdf على الفترة $[0, ln2]$

(أ) $f(x) = \frac{8}{3}e^{-2x} > 0$ على الفترة $[0, ln2]$ لانها دالة أسية

(ب) $\int_a^b f(x)dx = \int_0^{ln2} \frac{8}{3}e^{-2x}dx = \frac{8}{3}.\left[\frac{e^{-2x}}{-2}\right]_0^{ln2} = \frac{-4}{3}.\left(e^{-2ln2} - e^0\right)$

$$=\frac{-4}{3}.\left(\frac{1}{e^{2ln2}} - 1\right) = \frac{-4}{3}.\left(\frac{1}{e^{ln4}} - 1\right) =$$

$$= \frac{-4}{3}\left(\frac{1}{4} - 1\right) = \left(\frac{-4}{3}\right).\left(\frac{-3}{4}\right) = 1$$

لأن الدالة حققت الشرطين فهي دالة *pdf*

استخدام pdf لتقدير الاحتمالات

(1)على فرض ان $f(x)=\dfrac{0.4}{\sqrt{2\pi}}e^{-0.08(x-68)^2}$ هي دالة كثافة الاحتمال لاطوال ذكور بالغين بالسنتيمترات .

اوجد احتمال ان يكون طول ذكر بالغ تم اختياره عشوانيا بين**174cm** و $176\ cm$

كذلك احتمال ان يكون الطول بين **168cm** و $169\ cm$

$$P(168 \le X \le 169) = \int_{168}^{169} \frac{0.4}{\sqrt{2\pi}} e^{-0.08(x-68)^2} dx \approx 0.1554$$

$$P(174 \le X \le 176) = \int_{174}^{176} \frac{0.4}{\sqrt{2\pi}} e^{-0.08(x-68)^2} dx \approx 0.0751$$

حساب احتمال مع pdf أسية:

على فرض ان العمر الافتراضي بالاعوام لعلامة تجارية معينة لمصباح يتم توزيعه أسياً بواسطة

pdf و $f(x) = 4e^{-4x}$.أوجد احتمال أن يدوم مصباح لمده 3 أشهر أو أقل .

$$P\left(0 \le X \le \frac{1}{4}\right) = \int_0^{1/4} 4\bar{e}^{4x} dx = 4\left[\frac{-1}{4}e^{-4x}\right]_0^{1/4}$$

$$= -e^{-1} + e^{0} = 1 - e^{-1} \approx 0.63212$$

إيجاد قيمة الثابت C

(1)على فرض أن pdf **لمتغير عشوائي صيغتها** $f(x)=ce^{-3x}$ **لبعض الثوابت** c **مع** $0 \le x \le 1$

أوجد قيمة c **الي تجعل هذه الدالة** pdf

لتكون pdf **نحتاج إلى أن تكون** $f(x)=ce^{-3x} \ge 0$ **لكل** $x \in [0,1]$ **(ستكون هي هذه الحالة ما دام** $c \ge 0$**)**

.

$$1=\int_0^1 ce^{-3x}dx=c\left[\frac{-1}{3}e^{-3x}\right]_0^1=\frac{c}{3}\left(1-e^{-1}\right)$$

$$1=\int_0^1 ce^{-3x}dx=c\left[\frac{-1}{3}e^{-3x}\right]_0^1=\frac{c}{3}\left(1-e^{-1}\right)$$

$$3 = c(1 - e^{-1})$$

$$c=\frac{3}{1-e^{-1}}=3.1572$$

(2) أوجد قيمة لـ c التي تكون عندها $f(x)$ هي pdf على

الفترة $[0,1]$, $f(x) = \frac{c}{\sqrt{1-x^2}}$

الحل:

$$\int_0^1 f(x)\,dx = 1$$

$$\int_0^1 \frac{c}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = 1 \rightarrow \quad c\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = 1$$

(2) أوجد قيمة لـ c التي تكون عندها $f(x)$ هي pdf على

الفترة $[0,1]$, $f(x) = \frac{c}{\sqrt{1-x^2}}$

الحل:

$$\int_0^1 f(x)\,dx = 1$$

$$c.\ \ [\sin^{-1}x]_0^1 = 1$$

$$\int_0^1 \frac{c}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = 1 \rightarrow \quad c\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = 1$$

$$c\,.\,sin^{-1}(1) - \; sin^{-1}(0) = 1 \rightarrow \quad c\,.\left[\frac{\pi}{2} - 0\right] = 1$$

$$c.\frac{\pi}{2} = 1 \qquad \rightarrow \qquad c = \frac{2}{\pi}$$

دالة كثافة الاحتمال

إيجاد المتوسط الحسابي والوسيط

مثال 1 : أوجد (1) المتوسط μ و (2) الوسيط

لكل من المتغيرات العشوائية من pdf

$$* \; f(x) = 3x^2 \qquad [0,1]$$

الحل:

$$\text{(الوسط)} \quad \mu = \int_a^b x \, . \, f(x) dx$$

$$\mu = \int_0^1 x \, . \, 3x^2 dx = \int_0^1 3\, x^3 \, dx$$

$$\mu = \left(\frac{3x^4}{4}\right)_0^1 = \frac{3}{4}(1-0) = \frac{3}{4}$$

$$Median\ (\text{الوسيط}) \quad \rightarrow \frac{1}{2} = \int_{0}^{m(\text{الوسيط})} 3x^2\,dx \rightarrow \frac{1}{2} = \left[\frac{3x^3}{3}\right]_0^m$$

$$\frac{1}{2} = [x^3]_0^m = m^3 - 0 \rightarrow m^3 = \frac{1}{2} \rightarrow m = \sqrt[3]{\frac{1}{2}} \approx 0.797$$

$$2) * f(x) = \frac{\frac{4}{\pi}}{1+x^2} \qquad [0,1]$$

أوجد المتوسط ثم الوسيط

الحل:

$$(\text{المتوسط})\mu = \int^{b} x \,.\, f(x)dx$$

$$\mu = \int_0^1 x \cdot \frac{\frac{4}{\pi}}{1+x^2} dx = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{\pi} \int_0^1 \frac{2(x)}{1+x^2} dx = \frac{2}{\pi} \left[ln\left|1 + x^2\right| \right]_0^1$$

$$\mu = \frac{2}{\pi}[ln2 - ln1] = \frac{2}{\pi}(ln2 - 0) = \frac{2ln2}{\pi} \approx = 0.44127$$

edian (الوسيط) $\rightarrow \frac{1}{2} = \int_0^{m(\text{الوسيط})} \frac{\frac{4}{\pi}}{1+x^2} dx \rightarrow \frac{1}{2} = \frac{4}{\pi}[tan^{-1}x]_0^m$

$$\frac{1}{2} = \frac{4}{\pi}[tan^{-1}m - tan^{-1}0] = \frac{4}{\pi}tan^{-1}m$$

$$\frac{1}{2} = \frac{4}{\pi}tan^{-1}m \rightarrow \frac{\pi}{8} = tan^{-1}m$$

$$m = tan\frac{\pi}{8} = 0.414$$