الملف أوراق عمل الوحدة الأولى والثانية

الرياضيات المتقدمة

الثاني عشر المتقدم

الفصل الدراسي الأول 2018/2019

الوحدة الأولى (تمهيدية)

كثيرات الحدود والدوال النسبية

الوحدة الثانية

النهايات والاتصال

اعداد وتقديم

مدرس الرياضيات صكبان صالح محمد

الوحدة الأولى(تمهيد)

سوف ندرس ونراجع المواضيع التالية

1) $[1-1]$ كثيرات الحدود والدوال النسبية
2) $[1-2]$ الدوال العكسية
3) $[1-3]$ الدوال المثلثية والدوال المثلثية العكسية
4) $[1-4]$ الدوال الأسية واللوغاريتمية
5) $[1-5]$ تحويلات الدوال

الوحدة الثانية

النهايات والاتصال

سوف ندرس في هذه الوحدة المواضيع التالية :-

1) $[2-1]$ مراجعة عامة مهمة
2) $[2-2]$ مفهوم النهاية
3) $[2-3]$ حساب النهايات
4) $[2-4]$ الاتصال ونتائجه
5) $[2-5]$ النهايات التي تتضمن اللانهاية وخطوط التقارب
6) $[2-6]$ التعريف الرسمي للنهاية
7) $[2-7]$ النهايات وأخطاء فقدان الدلالة

$[1-1]$ مراجعة عامة الوحدة الأولى

مراجعة مهمة :-

البعد بين نقطتين (طول قطعة مستقيمة) :-

$$1)\quad \boxed{d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}}$$

ميل القطعة المستقيمة (نقطتين)

$$2)\quad \boxed{m=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}}$$

س1: أوجد ميل القطعة المستقيمة المارة بالنقطتين $A=(3,8)\,,\,B=(-5,4)$

....

....

س 2 : لتكن النقطتين $A=(1,4)\,,\,B=(3,-6)$ أوجد **1):-** ميل $\overline{AB}$ **2):-** معادلة AB

....

....

....

س 3:- هل النقاط التالية $A=(1,2)\,,\,B=(3,10)\,,\,C=(4,14)$ تقع على إستقامة واحدة بين ذلك؟

....

....

....

س4:- مستقيم يمر بالنقطة $(2,1)$ وميله $\frac{2}{3}$ أوجد نقطة ثانية تقع على المستقيم ؟ ومثله بيانياً .

....

....

....

س5):- أوجد معادلة المستقيم المار بالنقطة $(-1,3)$ وميله 5 ؟

....

....

....

س6):- أوجد معادلة مستقيم يكون موازٍ للمستقيم $y=3x-1$ ويمر بالنقطة $(4,1)$ ؟

....

....

....

س7):- أوجد معادلة مستقيم عمودي على المستقيم $y-3=2x+2$ ويمر بالنقطة $(2,-3)$ ؟

....

....

....

مراجعة إيجاد مجال الدالة

3) $f(x)=\dfrac{x-4}{x^2+1}$

1) $f(x)=x^2+4$

....

....

4) $f(x)=\sin x$

2) $f(x)=3x-5$

....

....

ماذا تلاحظ :-

سؤال:- أي من الدوال التالية هي كثيرة حدود ؟

1) $f(x)=3x^5+5x-x^2-2$

2) $f(x)=x^2+22$

3) $f(x)=x^{-2}+4x-3$

4) $f(x)=x^{\frac{1}{2}}-4x+3$

5) $f(x)=4x$

•) أوجد المجال لكل من الدوال التالية :-

6) $f(x)=\dfrac{x+4}{x^2-16}$

5) $f(x)=\dfrac{x-1}{x^2-9}$

....

....

....

8) $f(x)=\dfrac{1}{x}$

7) $f(x)=\dfrac{3x-1}{x^2-9x+8}$

....

....

....

ماذا تلاحظ:-

10) $f(x)=\sqrt{5-x}$

9) $f(x)=\sqrt{x-4}$

....

....

....

12) $f(x)=\sqrt{x^2+x-12}$

11) $f(x)=\sqrt{x^2-2x}$

....

....

....

14) $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$

13) $f(x)=\sqrt{\dfrac{x-3}{x^2-4}}$

....

....

....

15) $f(x)=\ln(x+3)$

16) $f(x)=\dfrac{x-2}{\ln(x-2)}$

17) $f(x)=\dfrac{\sqrt{x-3}}{\sqrt{8-x}}$

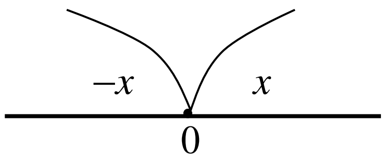
18) $f(x)=\dfrac{\sqrt{x+4}}{\sqrt{x}}$

س8):- حل المتباينة الخطية $3x-1<11$

س9):- حل المتباينة ثنائية الطرف $1\le 4x+5<13$

س10):- حل المتباينة $\dfrac{x-3}{x+5}\ge 0$

القيمة المطلقة absolute value



$$|ab|=|a|.|b|$$
$$|a+b|\neq|a|+|b|$$

$$|x|=\begin{cases}x & x\ge 0\\ -x & x<0\end{cases}$$

بعض خواص القيمة المطلقة :- لأي عددين حقيقين a,b

1) $|ab| = |a|.|b|$

2) $|a+b| \neq |a|+|b|$

3) $|a+b| \leq |a|+|b|$

س11):- حل المتباينة $|x-2|<5$

....

....

....

س12):- إذا كانت $|x-5|<3$ عبر عن x كفترة ؟

....

....

ملاحظــــــــــــة:- لإختبار أي شكل بياني فيما إذا كان يمثل دالة أم لا ؟

الجـــــــــــواب :- إختبار المستقيم الرأسي إذا قطع الشكل البياني في نقطتين فإن الشكل لا يمثل دالة

إيجاد الأصفار بالتحليل إلى العوامل أو من خلال القانون العام

س13):- أوجد الأصفار (نقاط التقاطع مع المحورين) للدالة $f(x)=x^2-x-72$

....

....

....

س14):- أوجد الأصفار للدالة $f(x)=x^2-5x-12$

....

....

....

س15):- أوجد نقاط تقاطع المستقيم $y = x + 3$ مع القطع المكافيء $y = x^2 - x - 5$

....

....

....

تركيب الدوال

1) $(f \pm g)(x) = f(x) \pm g(x)$

2) $(f . g)(x) = f(x) . g(x)$

3) $(\frac{f}{g})(x) = \frac{f(x)}{g(x)} \quad , g(x) \neq 0$

$$\boxed{(f \circ g)(x) = f(g(x))}$$

$$\boxed{(g \circ f)(x) = g(f(x))}$$

س16):- أذا كانت $g(x) = \sqrt{x - 2}$, $f(x) = x^2 + 1$ أوجد كل من $(g \circ f)$, $(f \circ g)$

ثم حدد مجال كل منهما .

....

....

....

س17): - صف التحويلات للحصول على التمثيل البياني للدالة $y = x^2 + 4x + 3$ من التمثيل البياني

للدالة $y = x^2$

....

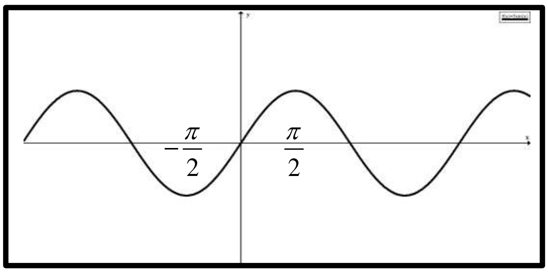
....

....

الفصل الدراسي الأول 2018/2019
الوحدة الأولى والثانية

اسم الطالب :-
المدرســـــة :-

الدوال المثلثية الأساسية والدوال المثلثية العكسية .

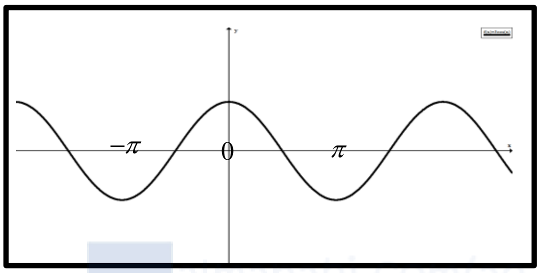


1) $f(x)=\sin x$

مجال الدالة :-

مدى الدالة :-

دورة الدالة :-

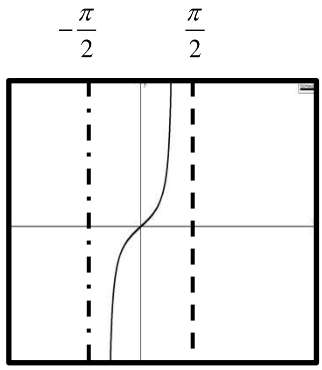


2) $f(x)=\cos x$

مجال الدالة :-

مدى الدالة :-

دورة الدالة :-



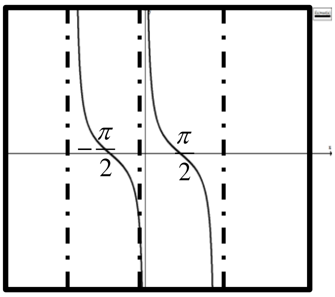
3) $f(x)=\tan x$

مجال الدالة :-

مدى الدالة :-

دورة الدالة :-

خطوط التقارب :-



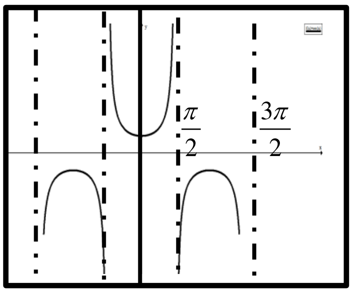
4) $f(x)=\cot x$

مجال الدالة :- تحذف لندرتها (فقط للتدريب

مدى الدالة :-

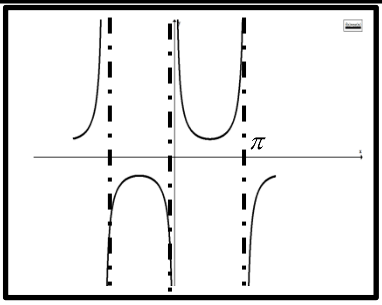
دورة الدالة :-

خطوط التقارب :-



5) $y = \sec x$　　المجال :-

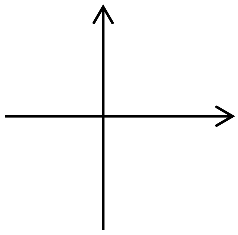
$\left[0,\frac{\pi}{2}\right)\cup\left(\frac{\pi}{2},\pi\right]$



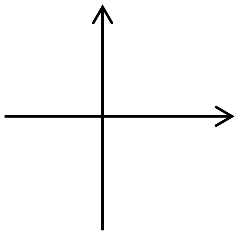
6) $y = \csc x$　　يحذف المجال

الدوال المثلثية المعكوسة

1) $y = \sin x \quad \to \quad x = \sin y \quad \to \sin^{-1}(x) = \sin^{-1}(\sin y)$



$\boxed{y = \sin^{-1} x}$　　$-\frac{\pi}{2} \le y \le \frac{\pi}{2}$



2) $\boxed{y = \cos^{-1} x}$　　$0 \le y \le \pi$

3) $\sin(\sin^{-1} x) = x \quad \to x \in [-1,1]$　　4) $\sin^{-1}(\sin x) = x \quad \to x \in \left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$

5) $\cos(\cos^{-1} x) = x \quad \to x \in [-1,1]$　　6) $\cos^{-1}(\cos x) = x \quad \to x \in [0,\pi]$

س1):- أوجد قيمة

1) $\sin^{-1}(-\frac{1}{2})$, $\sin^{-1}(\frac{\sqrt{3}}{2})$

....

....

....

....

2) $\sin(\cos^{-1} x)$, $\cos(\tan^{-1} x)$

....

....

....

....

س2):- استخدم مثلثاً لتحويل كل تعبير الى أبسط صورة :-

1) $\tan(\cos^{-1}\frac{3}{5})$

....

....

2) $\csc(\sin^{-1}\frac{2}{3})$

....

....

س3):- حل المعادلة المثلثية $2\cos x - 1 = 0$

....

....

....

س4):- حل المعادلات اللوغاريتمية $\ln x + \ln(x-1) = \ln 2$, $4\ln x = -8$

....

....

....

....

س5):- أعد صياغة التعبير كلوغاريتم منفرد (واحد). $\ln\frac{3}{4} + 4\ln 2$, $3\ln 2 - \ln\frac{1}{2}$

....

....

....

س6):- أوجد دالة بالشكل $f(x) = ae^{bx}$ حيث أن $f(3) = 4$, $f(0) = 3$

....

....

....

....

س7):- حدد عدد حلول المعادلة $\sqrt{x^2+1}=x^2-1$

....

....

....

س8):- حدد الدوال $f(x), g(x)$ وحدد المجال لكل منهما.

1) e^{x^2+1} 2) $\sqrt{\sin x+2}$ 3) $\dfrac{1}{x^2+1}$

....

....

....

س9):- لتكن الدالة $y=f(x)$ تمثل شكلاً بيانياً ، صف التحويلات التالية التي تحدث للدالة ؟

1) $f(x+2)$ 2) $f(x-4)$ 3) $2f(x)+5$

....

....

....

س10):- أكمل الى المربع الكامل لكل من الدوال التالية . ثم وضح طريقة التحويلات التي حدثت للدالة $y=x^2$

1) $f(x)=x^2+4x+6$ 2) $f(x)=x^2-4x+1$

....

....

....

س11):- بدون استخدام الآلة الحاسبة أوجد قيمة $\sin(2\cos^{-1}(-\frac{3}{5}))$

....

....

....

....

هذه النقاط الأساسية في مراجعة الوحدة الأولى التي سيحتاجها الطالب في حساب التفاضل والتكامل

الوحدة الثانية النهايات والاتصال

$$[2-1]$$

س1):- قدر طول قوس المنحنى $y=\sin x$ بالفترة $0\le x\le \pi$

....

....

....

....

س2):- قدر ميل المنحنى $y=x^2+1$ عند $x=1$

....

....

....

....

لكي تكون اي دالة معكوس لدالة أخرى يجب أن يكون $\boxed{f(g(x))=x \quad , \quad g(f(x))=x}$

سؤال :- متى يكون للدالة معكوس ؟ الجواب :- إذا كانت الدالة متصلة على الفترة وتكون إما متناقصة فعلاً أو متزايدة فعلاً على تلك الفترة ؟ وتسمى **(one to one)**

س3):- هل الدالتان $g(x)=\sqrt[3]{x+5} \quad , \quad f(x)=x^3-5$ متعاكستان بين ذلك ؟

....

....

....

....

س4):- لتكن $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1+x^3}}$ أوجد مجال الدالة ؟ هل لها دالة عكسية ؟ أوجد الدالة العكسية $f^{-1}(x)$

....

....

....

....

إيجاد قيمة النهايات $[2-2]$

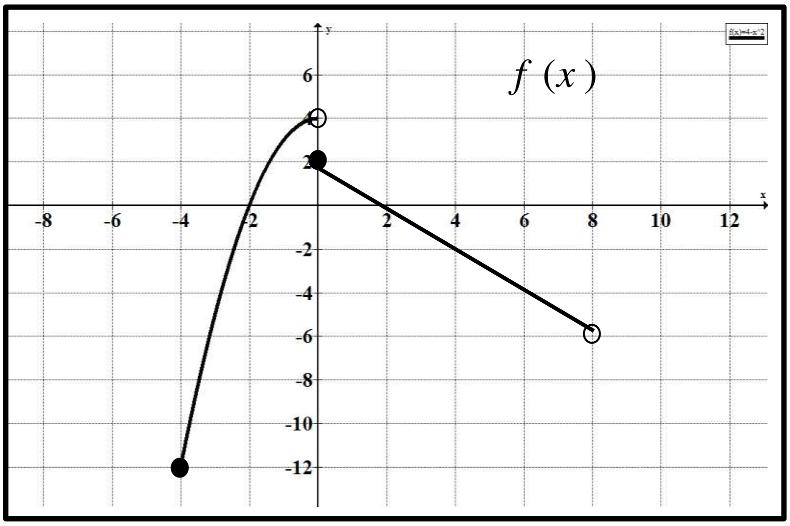
1):- نعبرعن النهاية من جهة اليمين بالشكل $\lim_{x \to a^+} f(x) = L$

2):- نعبرعن النهاية من جهة اليسار بالشكل $\lim_{x \to a^-} f(x) = L$

س): متى تكون النهاية موجودة عند نقطة ؟

الجواب :- .... **ونعبر عنها بالشكل :-** ....

س1):- من الشكل المجاور الذي يمثل بيان الدالة $f(x)$ **والمطلوب أيجاد :-**



1) $\lim_{x \to 0^-} f(x) =$

2) $\lim_{x \to 0^+} f(x) =$

3) $\lim_{x \to 0} f(x) =$

4) $\lim_{x \to 2} f(x) =$

5) $\lim_{x \to 2} \sqrt{f(x)} =$

6) $\lim_{x \to -4} f(x) =$

7) $\lim_{x \to 4} f(x) =$

س2): استخدم الدليل العددي وحدد إن كانت النهاية موجودة عند $x = a$ **لكل مما يلي :-**

1) $\lim_{x \to 3} \dfrac{x^2 - 9}{x - 3} =$

....

....

....

2) $\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{x^2 - 2x + 1} =$

....

....

....

3) $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} =$

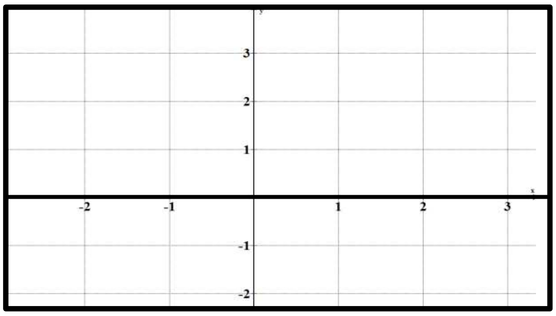
....

....

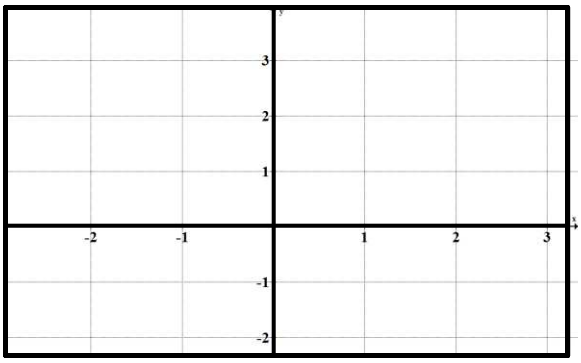
....

س3):- ارسم التمثيل البياني للدالة بالخواص التالية :-

1) $f(1) = 3$, $f(0) = -1$, $f(-1) = 2$, $\lim_{x \to 1} f(x)$ غير موجودة



2) $f(0) = 1$, $\lim_{x \to 0^+} f(x) = 3$ $\lim_{x \to 0^-} f(x) = 2$



$[2-3]$ حساب النهايات

قواعد لحساب النهايات :-

1) $\lim\limits_{x \to a} c = c$ حيث c عدد ثابت

نفرض أن $\lim\limits_{x \to a} f(x)\,,\ \lim\limits_{x \to a} g(x)$ موجودة

2) $\lim\limits_{x \to a} c f(x) = c \lim\limits_{x \to a} f(x)$

3) $\lim\limits_{x \to a} [f(x) \pm g(x)] =$

4) $\lim\limits_{x \to a} [f(x) \times g(x)] =$

5) $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} =$

لإيجاد أي نهاية نتبع ما يلي :-

1):- نعوض عن قيمة المتغير في النهاية إذا لم يظهر $\dfrac{0}{0}$ هذا يعني أن النهاية موجودة وقيمتها ظهرت مباشرةً

2):- إذا ظهرعندك $\dfrac{0}{0}$ سيكون أمامك ثلاث خطوات يجب أن تعملها وهي :-

* التحليل * الإختصار * ثم التعويض للحصول على قيمة النهاية

ملاحظـــــــــــة :- الحالة $\dfrac{0}{0}$ هي حالة من حالات عدم التعيين للنهايات والتي سنتعرف على جميعها .

س1):- أحسب قيمة النهايات التالية :-

1) $\lim\limits_{x \to 2} (5x^2 - 3x + 4) =$

....

....

2) $\lim\limits_{x \to -3} \dfrac{1 - 7x + x^3}{3 - x} =$

....

....

3) $\lim_{x \to -4} \frac{x^2 - 16}{x + 4} =$

....

....

4) $\lim_{x \to 4} \frac{x^2 + 7x - 44}{4 - x} =$

....

....

....

5) $\lim_{x \to 2} \frac{2x^2 - 8}{x - 2} =$

....

....

....

6) $\lim_{x \to 1} \frac{x^2 + x - 2}{x^2 - 3x + 2} =$

....

....

....

7) $\lim_{x \to 4} \frac{x^3 - 64}{4 - x} =$

....

....

....

8) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{(2+h)^2 - 4}{h} =$

....

....

....

9) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{(1+h)^3 - 1}{h} =$

....

....

....

في حالة وجود الجذر التربيعي (لا تنسى) الضرب في المرافق

•) $\sqrt{x} - 3 \rightarrow$ المرافق $\sqrt{x} + 3$ الناتج $(\sqrt{x} - 3)(\sqrt{x} + 3) = x - 9$

•) $\sqrt{x + 5} + 7 \quad \rightarrow$

10) $\lim\limits_{x \to 4} \dfrac{\sqrt{x} - 2}{x - 4} =$

....

....

....

11) $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{\sqrt{x + 1} - 2}{x^2 - 9} =$

....

....

....

12) $\lim_{x \to 0} \frac{2x}{3-\sqrt{x+9}} =$

....

....

....

....

....

13) $\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{x+2}-\sqrt{2}}{x} =$

....

....

....

....

14) $\lim_{x \to 0} \frac{x^2+x}{\sqrt{x^4+2x^2}} =$

....

....

....

....

....

15) $\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt[3]{1+2x}-1}{x} =$

....

....

....

....

16) $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{\sqrt{x^2+8}-3}{x+1} =$

....

....

....

....

....

في حالة وجود المطلق Absolute value

17) $\lim\limits_{x \to 5} \dfrac{|x-5|}{x^2-25} =$

....

....

....

18) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{|x-5|-4}{x-1} =$

....

....

....

....

....

19) $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{2x-6}{|3-x|} =$

....

....

....

$$\boxed{|x-a| = |a-x|}$$

دالة أكبر عدد صحيح

20) $\lim\limits_{x \to 3^+} \dfrac{x - [x]}{x^2 - 9} =$

....

....

....

21) $\lim\limits_{x \to 5} [x] =$

....

....

إذا كانت النهاية على شكل كسور

22) $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{\frac{1}{x} - \frac{1}{3}}{x - 3} =$

....

....

....

23) $\lim\limits_{x \to 5} \dfrac{\frac{1}{x-2} - \frac{1}{3}}{5 - x} =$

....

....

....

24) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{\frac{1}{2x} - \frac{1}{4}}{4 - x^2} =$

....

....

....

نهايات الدوال المثلثية:-

(الزاوية مقدرة بالراديان)

$$\bullet)\quad \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin x}=1$$

1) أثبت أن $\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}=1$

....

....

....

2) $\lim_{x\to 0}\frac{3x+\tan x}{5x-3\sin x}$

....

....

....

3) $\lim_{x\to 0}\frac{\tan(\sin 5x)}{3x}$

....

....

....

4) $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{\sin x}$

....

....

....

5) $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 2x}{\sin^2 x}$

....

....

....

6) $\lim_{x \to 0} \frac{x - x\cos x}{\sin^2 3x}$

....

....

....

7) $\lim_{x \to 0} 6x^2(\cot x)(\csc 2x)$

....

....

....

8) $\lim_{x \to 0} \frac{\tan 3x}{\sin 8x}$

....

....

....

9) $\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{x - \frac{\pi}{2}}$

....

....

....

10) $\lim_{x \to 1} \frac{\cos \frac{\pi}{2} x}{x - 1}$

....

....

....

11) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x\ \tan 3x}{x^2}$

....

....

....

12) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1-4\sin^2\frac{\pi}{6}x}{1-x^2}$ **للمتفوقين**

....

....

....

....

....

....

13) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(2x-3)(\sqrt{x}-1)}{2x^2+x-3}$

....

....

....

....

....

....

14) $\lim\limits_{x\to 4^+}([x]-x)$

....

....

....

15) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \dfrac{1-\sin x}{1-\cos 4x}$ **للمتفوقين فقط**

....

....

....

....

....

....

16) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x - \tan x}{x^3}$ **للمتفوقين فقط**

....

....

....

....

....

....

17) $\lim\limits_{x \to \frac{-1}{2}} \dfrac{\tan(\sin(2x+1))}{2x+1}$

....

....

....

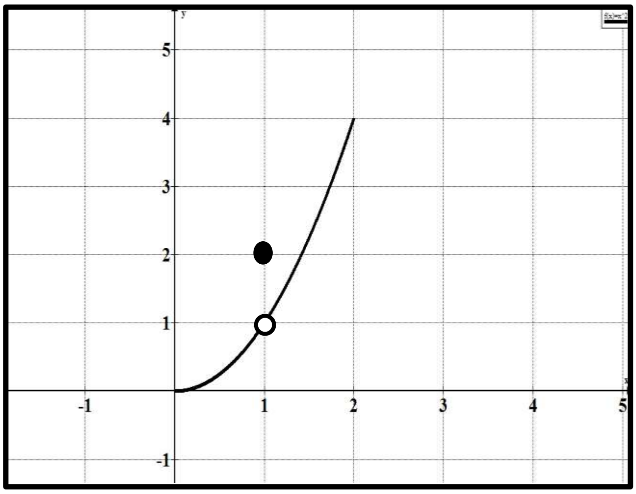
....

....

....

$[2-4]$ الاتصال ونتائجه

س):- الشكل المجاور يمثل بيان الدالة $f\ (x\ )$ والمطلوب :-



1) $\lim\limits_{x\to 1^+} f\ (x\ ) =$

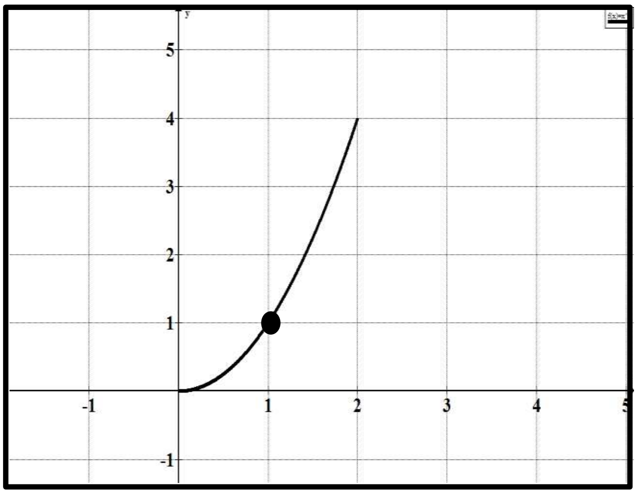
2) $\lim\limits_{x\to 1^-} f\ (x\ ) =$

3) $\lim\limits_{x\to 1} f\ (x\ ) =$

4) $f\ (1) =$

هل $\lim\limits_{x\to 1} f\ (x\ ) = f\ (1)$

نستنتج أن :-



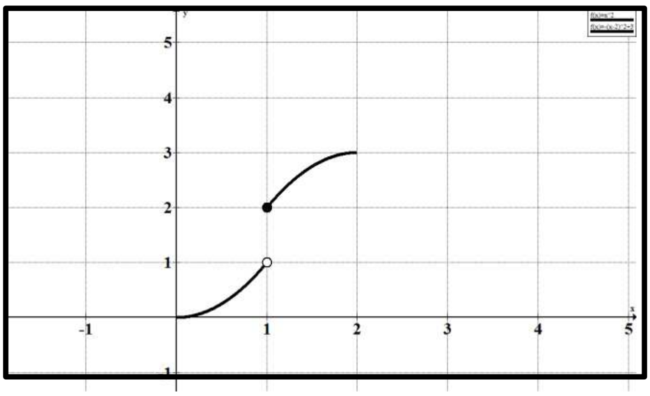
1) $\lim\limits_{x\to 1^+} f\ (x\ ) =$

2) $\lim\limits_{x\to 1^-} f\ (x\ ) =$

3) $\lim\limits_{x\to 1} f\ (x\ ) =$

4) $f\ (1) =$

هل $\lim\limits_{x\to 1} f\ (x\ ) = f\ (1)$



1) $\lim\limits_{x\to 1^+} f\ (x\ ) =$

2) $\lim\limits_{x\to 1^-} f\ (x\ ) =$

3) $\lim\limits_{x\to 1} f\ (x\ ) =$

4) $f\ (1) =$

ماذا تلاحظ :-

الثاني عشر المتقدم | الفصل الدراسي الأول 2018/2019 | اسم الطالب :-

الرياضيات | الوحدة الأولى والثانية | المدرســـة :-

شرط إتصال الدالة عند نقطة :-

تكون الدالة f متصلة عند النقطة $x=a$ إذا تحقق الشرط

$$\boxed{\lim_{x\to a} f(x)=f(a)}$$

أي يجب أن تكون الدالة معرفة عند $x=a$

وكذلك النهاية موجودة عند هذه النقطة .

ملاحظـــــــــــة:- كل دالة (كسرية ، جذرية ، لوغاريتمية ، دائرية ....) تكون متصله على مجالها .

أما الدالة كثيرة الحدود فهي متصله على مجالها R دائماً .

نظرية 4.2 إذا كانت الدالتان f, g متصلتان عند $x=a$. عندها يكون :-

1) $(f \pm g)$ متصلة عند $x=a$

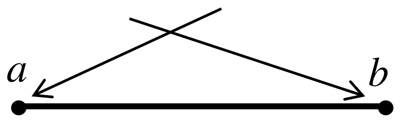
2) $(f \cdot g)$ متصلة عند $x=a$

3) (f / g) متصلة عند $x=a$

نظرية 4.3 إذا كانت $\lim_{x\to a} g(x)=L$ و f دالة متصلة عند L فيكون :-

$$\boxed{\lim_{x\to a} f(g(x))=f(\lim_{x\to a} g(x))=f(L)}$$

شروط اتصال الدالة على فترة مغلقة $[a,b]$:-



1):- أن تكون متصلة على الفترة المفتوحة (a,b)

2):- أن تكون الدالة متصلة من جهة اليسار للنقطة b ....

3):- أن تكون الدالة متصلة من جهة اليمين للنقطة a ....

ملاحظة :- إذا لم تكن الدالة متصلة عند نقطة فإنها منفصلة عند هذه النقطة .

أنواع الانفصال :- فجوة ، قفزه ، لانهائي ، تذبذبي .

الفجوة النوع الوحيد الذي يمكن التخلص منه (إصلاحه ، إزالته) وبذلك تكون الدالة متصلة عند هذه النقطة.

الثاني عشر المتقدم | الفصل الدراسي الأول 2018/2019 | اسم الطالب :-
الرياضيات | الوحدة الأولى والثانية | المدرســـــة :-

س1):- حدد نقاط إنفصال الدالة f ثم اذكر نوع هذا الإنفصال .

1) $f(x) = \dfrac{1}{x+3}$

....

....

2) $f(x) = \dfrac{x^2 + x - 20}{x - 4}$

....

....

3) $f(x) = \dfrac{x-3}{x^2 - 9}$

....

....

4) $f(x) = \dfrac{x^2 - 25}{x^2 - x - 20}$

....

....

5) $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$

....

....

6) $f(x) = \sec x$

....

....

7) $f(x) = \dfrac{x+2}{x^2 + 4}$

....

....

س2):- حدد الفترات التي تكون عندها الدالة $f(x)$ متصلة .

1) $f(x)=\sqrt{x-5}$

....

....

2) $f(x)=\sqrt[3]{x+1}$

....

....

3) $f(x)=\dfrac{\ln(x^2-1)}{\sqrt{x^2-2x}}$

....

....

4) $f(x)=\sin^{-1}(x+2)$

....

....

5) $f(x)=\ln(\sin x)$

....

....

6) $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

....

....

....

س3):- ادرس إتصال كل من الدوال التالية عند النقاط المؤشرة أزائها .

1) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2+|x|}{|x|} & , \quad x\neq 0 \\ 1 & , \quad x=0 \end{cases}$　　$x=0$

....

....

....

....

....

2) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2-3x-4}{|x-4|} & , \quad x\neq 4 \\ 4 & , \quad x=4 \end{cases}$　　$x=4$

....

....

....

....

....

3) $f(x)=\begin{cases} (x^2-1)\sin\dfrac{1}{x-1} & , \quad x\neq 1 \\ 0 & , \quad x=1 \end{cases}$

....

....

....

....

....

س3):- اوجد قيمة b لتكون الدالة متصلة عند $x=5$

1) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x-5}{\sqrt{2x-1}-3} & , \quad x\neq 5 \\ b & , \quad x=5 \end{cases}$

....

....

....

....

....

س5):- اوجد قيمة a لتكون الدالة متصلة عند $x=1$

1) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2-(2a+1)+2a}{x-1} & , \quad x\neq 1 \\ -3 & , \quad x=1 \end{cases}$

....

....

....

....

....

س6):- الدالة $f(x)=\cot 2x.\sin 3x$ غير متصلة عند $x=0$ أعد تعريف الدالة لتكون الدالة متصلة عند $x=0$

....

....

....

....

....

س7):- حدد قيم a,b التي تجعل الدالة متصلة .

$$f(x)=\begin{cases} ae^{x}+1 & , \quad x<0 \\ \sin^{-1}\dfrac{x}{2} & ,0\le x\le 2 \\ x^{2}-x+b & , \quad x>2 \end{cases}$$

....

....

....

....

....

....

س8):- أوجد قيمة a,b التي تجعل الدالة متصلة .

$$f(x)=\begin{cases} ax+2b & , \quad x\le 0 \\ x^{2}+3a-b & ,0<x\le 2 \\ 3x-5 & , \quad x>2 \end{cases}$$

....

....

....

....

....

....

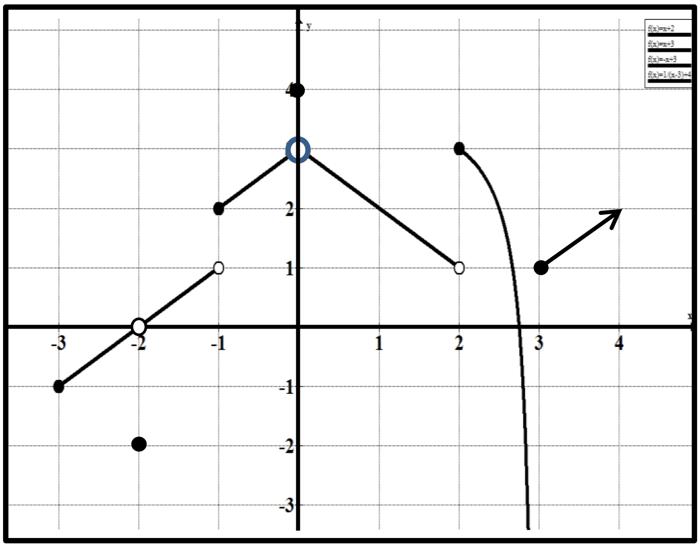
س9):-حدد نقاط إتصال الدالة التالية $f(x)=\dfrac{\sqrt{x+1}}{\ln(x+2)}$

....

....

....

س10):- الشكل المجاور يمثل بيان الدالة $f(x)$ والمطلوب إيجاد قيم x التي عندها الدالة منفصلة ؟ ثم بين نوع هذا الإنفصال . وأي من نقاط الإنفصال يمكن أن نجعل الدالة عندها متصلة ولماذا ؟



....

....

....

....

....

....

....

نظرية الشطيرة:- إذا كانت $f(x) \le g(x) \le h(x)$ وكانت $\lim_{x \to a} h(x) = L$, $\lim_{x \to a} f(x) = L$

فإن $\boxed{\lim_{x \to a} g(x) = L}$

س1):- استخدم نظرية الشطيرة لتحدد قيمة النهاية $\lim_{x \to 0} (5 + 3\sin^2 x)$

....

....

....

....

س2):- لتكن $x \cos x + \sin 2x \le f(x) \le x^2 + 3x \quad , \quad x \ne 0$

باستخدام نظرية (الإحاطة) الشطيرة أوجد $\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{x}$

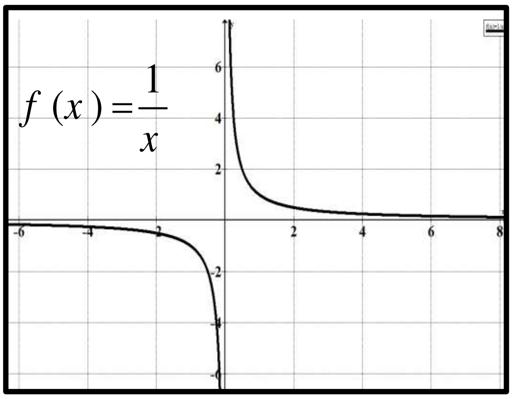
....

....

....

....

$[2-5]$ النهايات التي تتضمن اللانهاية : وخطوط التقارب الرأسية والأفقية



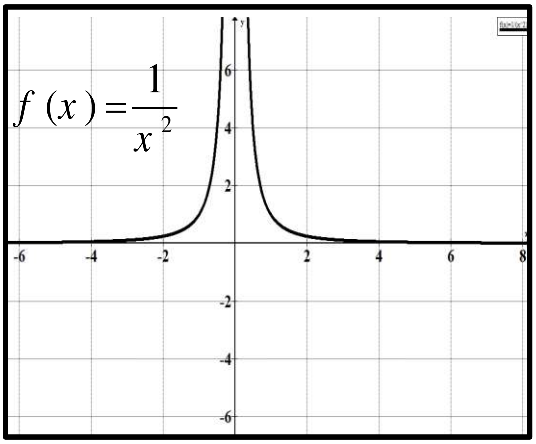
1) $\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{1}{x} =$

2) $\lim\limits_{x \to 0^-} \frac{1}{x} =$

•) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1}{x} =$

3) $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{1}{x} =$

4) $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{1}{x} =$



1) $\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{1}{x} =$

2) $\lim\limits_{x \to 0^-} \frac{1}{x} =$

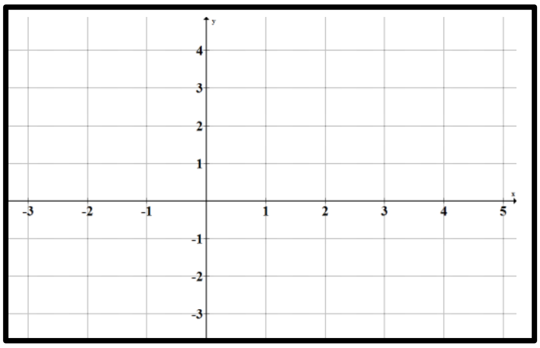
•) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1}{x} =$

3) $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{1}{x} =$

4) $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{1}{x} =$

خطوط التقارب (الرأسية والأفقية والمائلة) :-

س1):- حدد خطوط التقارب الرأسية لكل من الدوال التالية :-



1) $f(x)=\frac{2-x}{x+1}$

....

....

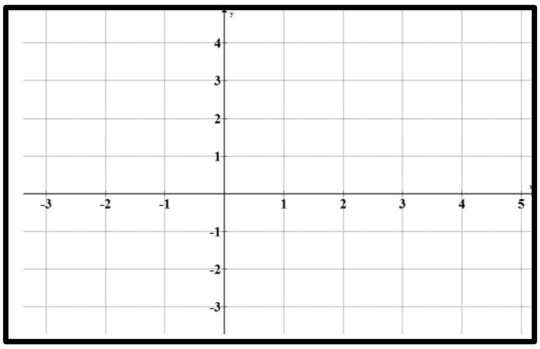
....

....

الثاني عشر المتقدم | الفصل الدراسي الأول 2018/2019 | اسم الطالب :-

الرياضيات | <u>الوحدة الأولى والثانية</u> | المدرســــة :-

2) $f(x)=\dfrac{x^2-9}{x^2-2x-3}$

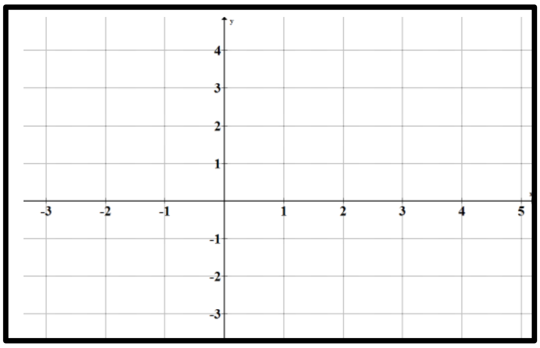


....

....

....

3) $f(x)=\ln(x-3)$



....

....

....

<u>ملاحظة على شكل سؤال :-</u> كيف تجد المقارب رأسي للدالة الكسرية (كما في السؤال رقم 2) أعلاه ؟؟

<u>الجواب</u> :- اذا كانت الدالة كسرية :- نجد مجالها ثم نلاحظ هل يوجد إختصار بين عوامل البسط والمقام / ثم بعد ذلك نحدد أصفار المقام والتي تمثل مقاربات رأسية .

س2):- أوجد قيمة النهايات التالية . وحدد المقاربات الرأسية .

1) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{1}{(x-3)^3}=$

2) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x+1}{(x-3)(x+2)}=$

....

....

....

3) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}\tan x=$

4) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{1-x}{(x+1)^2}=$

....

....

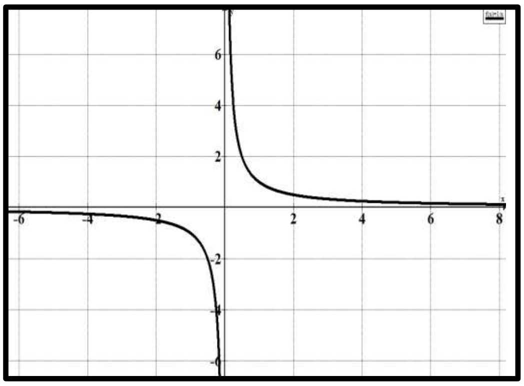
....

المقاربات الأفقية :-

1) $\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} =$

2) $\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x} =$

المقارب الأفقي　•) $y =$



3) $\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} =$

المقارب الرأسي　•) $x =$

4) $\lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x} =$

تعريف :- يكون $\boxed{y=b}$ مقارب أفقي للدالة $y=f(x)$ إذا كان $\lim_{x\to\infty} f(x)=b$, $\lim_{x\to-\infty} f(x)=b$

س3):- أوجد النهايات التالية :-

1) $\lim_{x\to-\infty} (6+\frac{1}{x}) =$

....

....

2) $\lim_{x\to\infty} \frac{\pi\sqrt{5}}{x^2} =$

....

....

3) $\lim_{x\to\infty} \frac{5x-3}{3x^2+2} =$

....

....

4) $\lim_{x\to-\infty} \frac{11x+2}{2x^3-1} =$

....

....

ملاحظـــــــة :- في التمارين أعلاه كانت درجة البسط أصغر من درجة المقام .ولذلك $\boxed{y=0}$ مقارب أفقي

س4):- أوجد النهايات التالية .

1) $\lim_{x\to\infty}\dfrac{5x^2+8x-3}{3x^2+2}=$

....

....

....

2) $\lim_{x\to\infty}\dfrac{x^2}{4-x^2}=$

....

....

....

3) $\lim_{x\to\infty}\dfrac{x}{\sqrt{5+x^2}}=$

....

....

....

4) $\lim_{x\to-\infty}\dfrac{3x^2+1}{x^2-2x-3}=$

....

....

....

5) $\lim_{x\to-\infty}\dfrac{x-1}{x+2}=$

....

....

....

ملاحظـــــــة:- في التمارين أعلاه كانت درجة البسط تساوي درجة المقام . ولذلك يجب قسمة حدود البسط وحدود المقام على أكبر أس (موجود في المقام) . هنا يوجد مقارب أفقي $y=b$: (المعامل على المعامل)

الثاني عشر المتقدم — الفصل الدراسي الأول 2018/2019 — اسم الطالب :-

الرياضيات — **الوحدة الأولى والثانية** — المدرســـــة :-

س5):- أوجد النهايات التالية :-

1) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^3}{x^2-4} =$

....

....

....

2) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1-12x^3}{4x^2+12} =$

....

....

....

ملاحظــــــة:- في النهايات أعلاه كانت درجة البسط أكبر من درجة المقام . ولذلك لايوجد مقارب أفقي .

تعريف :- يكون للدالة مقارب مائل *oblique asymptote* **إذا كانت درجة البسط أكبر من درجة المقام بـ (واحد) .**

س6):- حدد خطوط التقارب الرأسية والمائلة .

1) $f(x) = \dfrac{x^3}{4-x^2}$

2) $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x-2}$

....

....

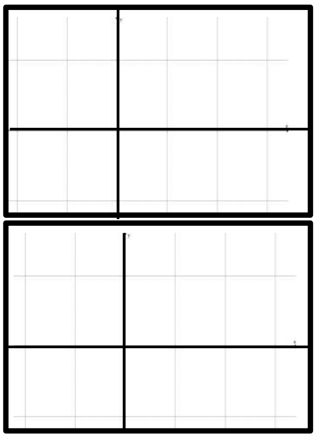
....

....

ملحوظة):- النهاية للدالة الأسية ولدالة مثلثية معكوسة .

•) $\lim\limits_{x\to 0^+} e^{\frac{1}{x}} = \infty$, •) $\lim\limits_{x\to 0^-} e^{\frac{1}{x}} = 0$, •) $\lim\limits_{x\to\infty} e^{x} = \infty$

•) $\lim\limits_{x\to -\infty} \tan^{-1} x = -\dfrac{\pi}{2}$, •) $\lim\limits_{x\to\infty} \tan^{-1} x = \dfrac{\pi}{2}$



س7):- لتكن $f(x)=\dfrac{160x^{0.4}+90}{4x^{-0.5}+15}$ أوجد $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$, $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$

....

....

....

....

....

....

س8):- أوجد قيمة النهايات التالية :-

1) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1-2x}{x^2-1}$

2) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x-4}{x^2-4x+4}$

....

....

....

....

3) $\lim\limits_{x\to 0}\cot x$

4) $\lim\limits_{x\to\infty}\sin(\tan^{-1}x)$

....

....

....

....

5) $\lim\limits_{x\to 0^+}\tan^{-1}(\ln x)$

6) $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{2x^3+7x^2+1}{x^3-x\sin x}$

....

....

....

....

7) $\lim\limits_{x\to\infty} \ln\left(\dfrac{x^2+1}{x-3}\right)$

....

....

....

س9):- أوجد دالة تربيعية $q(x)$ بحيث يكون $f(x)=\dfrac{x^2-4}{q(x)}$ له خط تقاربي واحد $y=-\dfrac{1}{2}$ وخط تقاربي رأسي واحد بالضبط $x=3$ ؟

....

....

....

ملاحظات وخواص مهمة :-

a) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}=0,\ \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}=0 \to \boxed{y=0}$ المقارب الأفقي

إذا كانت

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=L \quad , \quad \lim_{x\to\pm\infty} g(x)=M$$

1) $\lim\limits_{x\to\pm\infty}(f(x)\pm g(x))=\lim\limits_{x\to\pm\infty}f(x)\pm\lim\limits_{x\to\pm\infty}g(x))=L+M$

2) $\lim\limits_{x\to\pm\infty}(f(x).\,g(x))=\lim\limits_{x\to\pm\infty}f(x).\lim\limits_{x\to\pm\infty}g(x))=L.M$

3) $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{\lim\limits_{x\to\pm\infty}f(x)}{\lim\limits_{x\to\pm\infty}g(x)}=\dfrac{L}{M} \quad ,g(x)\neq 0 \quad ,M\neq 0$

4) $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\sqrt{f(x)}=\sqrt{\lim\limits_{x\to\pm\infty}f(x)}=\sqrt{L} \quad ,f(x)\geq 0$

نلاحظ أن هذه الخواص سبق وإن مرت علينا في موضوع النهايات

b) $\lim\limits_{x\to\infty}x^n=\infty, n\in i^+$

c) $\lim\limits_{x\to-\infty}x^n=\begin{cases}\infty & :n \text{ عدداً زوجياً} \\ -\infty & :n \text{ عدداً زوجياً}\end{cases}$

d) $\lim\limits_{x\to a}x^n=a^n$

e) $\boxed{\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{\sin x}{x}=0 \quad , \quad \lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{\cos x}{x}=0}$

f) $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1}{x}=\infty \ , \ \lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{1}{x}=-\infty$

مقارب رأسي $\boxed{x=0}$

التعريف الرسمي للنهاية $[2-6]$

تعريف:- لتكن الدالة $f(x)$ معرفة على فترة محذوف مركزها (أو غير محذوف) . فإنه يقال أن لها نهاية $L \in R$ عندما $x \to a$. إذا وفقط إذا كانت $\lim_{x \to a^-} f(x) = L$, $\lim_{x \to a^+} f(x) =$

$$\varepsilon > 0 \quad , \quad \delta > 0$$

$$\boxed{|x-a| < \delta \leftrightarrow |f(x)-L| < \varepsilon}$$

س1:- عبر عن x وعن $f(x)$ كفترة ؟

2) $|f(x)-4| < 0.1$ 1) $|x-2| < 0.01$

....

....

....

س2:- أوجد بالرموز δ بدلالة ε (يعني مقارنة) .

2) $\lim_{x \to 1} (4-5x) = -1$ 1) $\lim_{x \to 0} 5x = 0$

....

....

....

....

4) $\lim_{x \to 1} (x^2 - 1) = 0$ 3) $\lim_{x \to 1} \frac{x^2+x-2}{x-1} = 3$

....

....

....

....

س3):- أوجد قيم x التي تكون لها $(2x+3)$ ضمن مسافة $\frac{1}{200}$ من 7 .

....

....

....

....

....

س4):- اثبت أن $\lim_{x\to 1}(5x+6)=11$ وذلك باستخدام تعريف النهاية .

....

....

....

....

....

س5):- استخدم تعريف النهاية لإثبات أن $\lim_{x\to 1}(x^2+3)=4$

....

....

....

....

....

س6):- استخدم التعريف لإثبات أن $\lim_{x\to 2} x^2=4$

....

....

....

....

الثاني عشر المتقدم | الفصل الدراسي الأول 2018/2019 | اسم الطالب :-
الرياضيات | الوحدة الأولى والثانية | المدرســـــة :-

استخدام تعريف النهاية عندما تكون النهاية لا نهائية

تعريف :- إذا كانت الدالة $f(x)$ معرفة في الفترة (a,∞) . فإن للدالة $f(x)$ النهاية L عند $x \to \infty$

أي $\lim_{x \to \infty} f(x) = L$

عندما نجعل $|f(x)-L|$ صغيراً بالقدر الذي نريده بإختيار x كبيرة كبراً كافياً الذي يضمن

$$|f(x)-L| < \varepsilon$$

تعريف:- إذا كانت الدالة $f(x)$ معرفة في الفترة $(-\infty,a)$. فإن للدالة $f(x)$ النهاية L عند $x \to -\infty$

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = L$$

عندما نجعل $|f(x)-L|$ صغيراً بالقدر الذي نريده بإختيار x صغيرة صغراً كافياً الذي يضمن

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = L$$

س1):- اثبت أن $\lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x} = 0$

....

....

....

س2):- اثبت أن $\lim_{x \to 0} \frac{1}{x^2} = \infty$

....

....

....

س3):- أوجد M أو N المناظرة لـ $\varepsilon = 0.1$ لكل نهاية عند اللانهاية $\lim_{x \to -\infty} \frac{x^2+3}{4x^2-4} = \frac{1}{4}$

....

....

....

....

مع تمنياتي للجميع بالتوفيق ولا تنسونا من صالح دعاؤكم / الوحدة الثالثة قادمة إن شاء الله