شكراً لتحميلك هذا الملف من موقع المناهج الإماراتية

المعادلات التفاضلية

تاريخ نشر الملف على موقع المناهج: 2019-06-20 19:51:47 | اسم المدرس: محمود مراد

التواصل الاجتماعي بحسب الصف الثاني عشر المتقدم

روابط مواد الصف الثاني عشر المتقدم على تلغرام

التربية الاسلامية	اللغة العربية	اللغة الانجليزية	الرياضيات

المزيد من الملفات بحسب الصف الثاني عشر المتقدم والمادة رياضيات في الفصل الثالث

1	ملخص أهم القوانين في الحبر والهندسة
2	حل أسئلة الامتحان النهائي الالكتروني
3	حل أسئلة الامتحان النهائي الالكتروني
4	أسئلة الامتحان النهائي الورقي بريدج
5	أسئلة نموذج تدريبي ريفيل

Date:
No:

أولاً: حل المعادلات التفاضلية بطريقة فصل المتغيرات

$y' = 2xy$ (معادلة تفاضلية)

↓

نوجد حل المعادلة عن طريق التكامل بعد التكامل نفصل متغيراتها

$\frac{dy}{dx} = 2xy$.

$dy = 2xy \cdot dx \Rightarrow$ (عامل y) = (عامل x)

① نقسم على عامل فصل المتغيرات

$\frac{dy}{y} = 2x\,dx$

② نأخذ التكامل لطرفي المعادلة

$\int \frac{1}{y}\,dy = \int 2x\,dx$

http://alManahj.com/ae

$\ln|y| = \frac{2x^2}{2} + C$

③ إيجاد المتغير y

$\ln|y| = x^2 + C$

$e^{\ln(y)} = e^{x^2+C}$ ⟸ $e^{\ln n} = n$ خاصية

$y = e^{x^2} \cdot e^{C}$

$\boxed{y = Ce^{x^2}}$ حل المعادلة التفاضلية

أ/محمود مراد 0506565584

Scanned by CamScanner

Date:
No:

(2) $y' = 4xy \quad ; \quad y(2) = 1$

الشرط ابتدائي

$\frac{dy}{dx} = 4xy$

$dy = 4xy\,dx$ ← بتجزئة التكامل

$\frac{dy}{y} = 4x\,dx$ ⟸ $\int$

$\int \frac{1}{y}\,dy = \int 4x\,dx$

$\ln|y| = 2x^2 + C$ ⟸ ابتدائي

$x=2 \; , \; y=1$

$\ln|1| = 2(2)^2 + C$

$0 = 8 + C \rightarrow C = -8$

$\ln|y| = 2x^2 + C$

$e^{\ln|y|} = e^{2x^2+C}$

$y = e^{2x^2-8}$ ✓

(3) $y' = 6xy \quad , \quad y(1) = 1$

http://alManahj.com/ae

أ/ محمود مراد 0506565584

Scanned by CamScanner

Date:
No:

④ $y' = \frac{x^2+7x+3}{y^2}$ ← $y(0) = 3$

$dy = \frac{(x^2+7x+3)}{y^2} dx$

$y^2 dy = (x^2+7x+3) dx$

$\int y^2 dy = \int (x^2+7x+3) dx$

$\frac{1}{3}y^3 = \frac{1}{3}x^3 + \frac{7}{2}x^2 + 3x + C$ ×3

$y^3 = x^3 + \frac{21}{2}x^2 + 9x + 3C$ ← $x=0, y=3$

$27 = 3C \rightarrow C = 9$

$y^3 = x^3 + \frac{21}{2}x^2 + 9x + 27$

$y = \sqrt[3]{x^3 + \frac{21}{2}x^2 + 9x + 27}$

⑤ $y' = \frac{9x^2 - \sin x}{\cos y + 5e^y}$ $y(0) = \pi$

$dy = \frac{(9x^2 - \sin x)}{(\cos y + 5e^y)} dx$

$(\cos y + 5e^y) dy = (9x^2 - \sin x) dx$

$\int (\cos y + 5e^y) dy = \int (9x^2 - \sin x) dx$

$\sin y + 5e^y = 3x^3 + \cos x + C$

← $x=0, y=\pi$

$\sin(\pi) + 5e^{\pi} = 0 + 1 + C$

$C = 5e^{\pi} - 1$

$\sin y + 5e^y = 3x^2 + \cos x + 5e^{\pi} - 1$

أ/ محمود مدى
0506565584
http://alManahj.com/ae

Scanned by CamScanner

Date:
No:

⑤ حل المعادلات التفاضلية الآتية بالنسبة لـ x و y

① $y' = (3x+1)\cos y$

$\frac{dy}{dx} = (3x+1)\cdot\cos y$

$dy = (3x+1)\cdot\cos y\, dx$

$\frac{dy}{\cos y} = (3x+1)\,dx$

② $y' = 2x(\cos y - 1)$

$\frac{dy}{dx} = 2x(\cos y - 1)$

$dy = 2x\cdot(\cos y - 1)\,dx$

$\frac{dy}{\cos y - 1} = 2x\,dx$

http://alManahj.com/ae

③ $y' = (3x+y)\cos y$

$\frac{dy}{dx} = (3x+y)\cdot\cos y$

$dy = (3x+y)\cdot\cos y\, dx$

$\frac{dy}{\cos y} = (3x+y)\,dx = 3x\,dx + y\,dx$

Scanned by CamScanner

Date:
No:

④ $y' = (x^2y - x\cos y)$

$dy = (x^2y - x\cos y)\,dx$

$dy = x(xy - \cos y)\,dx$

$\frac{dy}{xy - \cos y} = x\,dx$

⑤ $y' = (x^3 + 2x + 1)$

$dy = (x^3 + 2x + 1)\,dx$

http://alManahj.com/ae

⑥ $y' = (y^3 - 2y - 3)$

$dy = (y^3 - 2y - 3)\,dx$

$\frac{dy}{y^3 - 2y - 3} = dx$

محمود مراد 0506565584

Scanned by CamScanner

Date:
No:

حل المعادلات التفاضلية بفصل المتغيرات

① $y' = \frac{2x}{y} \cdot e^{y-x}$

$dy = \frac{2x}{y} \cdot \frac{e^y}{e^x} dx$

$\frac{y}{e^y} dy = \frac{2x}{e^x} dx$

$\int y e^{-y} dy = \int 2x e^{-x} dx$

$-y e^{-y} - e^{-y} = -2x e^{-x} - 2e^{-x} + c$

$-\frac{y}{e^y} - \frac{1}{e^y} = \frac{-2x}{e^x} - \frac{2}{e^x} + c$

التكامل بالأجزاء

f	g
y	e^{-x}
1	$-1\ e^{-y}$
0	$+1\ e^{-y}$

f	g
$2x$	e^{-x}
2	$-1\ e^{-x}$
0	$+1\ e^{-x}$

http://alManahj.com/ae

② $y' = \frac{\sqrt{1-y^2}}{x \ln x}$

$dy = \frac{\sqrt{1-y^2}}{x \ln x} dx$

$\frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} = \frac{1}{x \ln x} dx$

$(\ln x)' = \frac{1}{x}$

$\int \frac{1}{\sqrt{1-y^2}} dy = \int \frac{\frac{1}{x}}{\ln x} dx$

$\sin^{-1}(y) = \ln|\ln x| + C$

(sin) ←

$y = \sin(\ln|\ln x| + c)$

~~$\sin^{-1}$ $\sin$~~

~~$\tan$ $\tan^{-1}$~~

$e^x \rightarrow \ln e^x$

$\ln x \rightarrow e^{\ln x}$

Scanned by CamScanner

Date:
No:

(3) $y' = \frac{\cos x}{\sin y}$

$dy = \frac{\cos x}{\sin y} dx \longrightarrow \sin y\, dy = \cos x\, dx$

$\int \sin y\, dy = \int \cos x\, dx$

$-\cos y = \sin x + c$ (x-1)

$\cos y = -\sin x - c$

$\cos^{-1} \leftarrow$

$y = \cos^{-1}(-\sin x - c)$

http://alManahj.com/ae

(4) $y' = \frac{x-1}{y^2}$, $y(0) = 2$

$dy = \frac{(x-1)}{y^2} dx$

$y^2 dy = (x-1) dx$

$\int y^2 dy = \int (x-1) dx$

$\frac{1}{3}y^3 = \frac{1}{2}x^2 - x + c$ ← c ?? ← $x=0$, $y=2$

$\frac{1}{3}(2)^3 = c \rightarrow \frac{8}{3} = c$

$\frac{1}{3}y^3 = \frac{1}{2}x^2 - x + \frac{8}{3}$ ← ×3

$y^3 = \frac{3}{2}x^2 - 3x + 8$ ← $\sqrt[3]{}$

$y = \sqrt[3]{\frac{3}{2}x^2 - 3x + 8}$

Scanned by CamScanner

Date:
No:

(5) $y' = 3(x+1)^2 \cdot y$, $y(0)=1$

$dy = 3(x+1)^2 y\, dx$

$\frac{dy}{y} = 3(x+1)^2 dx$

$\int \frac{1}{y} dy = \int 3(x+1)^2 dx$

$\ln|y| = 3\int (x+1)^2 dx$

$\ln|y| = \frac{3(x+1)^3}{3} + c$ ← c??, $y=1$, $x=0$

$\ln|1| = 1 + c$

$0 = 1 + c$

$c = -1$

$\ln|y| = (x+1)^3 - 1$

$e \Leftarrow (x+1)^3 - 1$

$y = e^{(x+1)^3 - 1}$

http://alManahj.com/ae

(6) $y' = \frac{4x}{\cos y}$, $y(0) = 0$

$dy = \frac{4x}{\cos y} dx$

$\cos y\, dy = 4x\, dx$

$\int \cos y\, dy = \int 4x\, dx$

$\sin y = 2x^2 + c$

$x=0, y=0$ ←

$c = 0$

$\sin y = 2x^2$ ← $\sin^{-1}$

$y = \sin^{-1}(2x^2)$

Scanned by CamScanner

Date:
No:

(7) $y' = \frac{2}{2xy+y}$

$dy = \frac{2}{2xy+y}\,dx$

$dy = \frac{2}{y(2x+1)}\,dx$

$y\,dy = \frac{2}{2x+1}\,dx$

$\int y\,dy = \int \frac{2}{2x+1}\,dx$

$\frac{1}{2}y^2 = \ln|2x+1| + C$

$y^2 = 2\ln|2x+1| + 2C$

$y = \sqrt{2\ln|2x+1| + 2C}$

http://alManahj.com/ae

(8) $y' = \frac{\tan y}{x}$ $\quad y(1) = \frac{\pi}{2}$

$dy = \frac{\tan y}{x}\,dx$

$\frac{dy}{\tan y} = \frac{1}{x}\,dx$

$\int \frac{dy}{\tan y} = \int \frac{1}{x}\,dx$

$\int \cot y\,dy = \int \frac{1}{x}\,dx$

$\ln|\sin y| = \ln|x| + C$

$x = 1$, $y = \frac{\pi}{2}$

$\ln|\sin\frac{\pi}{2}| = \ln|1| + C$

$\ln|1| = \ln|1| + C$

$0 = 0 + C$

$C = 0$

$\ln|\sin y| = \ln|x|$

$\sin y = x$

$y = \sin^{-1}(x)$

Scanned by CamScanner

Date:

No:

١٥

أ/ محمود مراد 0506565584
http://alManahj.com/ae

Scanned by CamScanner

Date:
No:

اجابة اسئلة الدرس

3) أوجد عدد الخلايا بعد مرور ساعة ونصف

دقيقة ساعة
$1\frac{1}{2} \rightarrow 90$

$y(t) = 100\, e^{0.025t}$

$= 100\, e^{0.025(90)}$

$= 948.7 \approx 949$ خلية

4) متى يصير عدد الخلايا 820 خلية

$y(t) = 100\, e^{0.025t}$

$820 = 100\, e^{0.025t}$

$t = 84.1$ MIN

http://alManahj.com/ae

أ/محمود مراد 0506565584

Scanned by CamScanner

Date:
No:

ثانياً نموذج المعادلات التفاضلية

① دالة النمو او التضاؤل الاسي

$$y(t) = A e^{k \cdot t}$$

- y هي كمية الشيء عند الزمن t
- k ثابت
- t الزمن
- A القيمة الابتدائية او الاستهلالية

اذا كانت $k > 0$ دالة نمو أسي
و $k < 0$ دالة تضاؤل أسي

http://alManahj.com/ae

مثال: مستنبت كمية من بكتيريا عددها 100 فإذا علمت أن عددها بعد 60 دقيقة أصبح 450 فما عدد البكتيريا بعد 3 ساعات؟

الحل: نفرض أن النمو أسي

① عدد البكتيريا ابتدائياً ② الزمن بالدقائق

$$\left.\begin{matrix} y = 100 \\ t = 0 \end{matrix}\right\} \quad y = A e^{kt} \Rightarrow 100 = A e^{0} \Rightarrow A = 100$$

$$\left.\begin{matrix} t = 60 \\ y = 450 \end{matrix}\right\} \quad y = 100 e^{kt} \Rightarrow 450 = 100 e^{k(60)} \Rightarrow k = 0.025$$

Solve

$$y = 100 e^{0.025 t}$$

t عدد البكتيريا بعد

100 البكتيريا عددها ابتدائياً كم الزمن t المضاعف ؟؟
200 مضاعف العدد

$$200 = 100 e^{0.025 t} \rightarrow t = 27.7 \approx 28$$

Solve

t = 28 دقيقة تضاعف عدد البكتيريا

Scanned by CamScanner

Date:
No:

② اذا كتلة المادة 50g من الكربون ^{14}C المشع فما مقدار الكمية المتبقية بعد 100 عام علماً بأن فترة نصف العمر لـ ^{14}C هي 5730 عام

ثم اوجد بعد كم تصبح الكمية ^{14}C 40g ؟؟؟

$$\left.\begin{matrix} y=50 \\ t=0 \end{matrix}\right\} y = A e^{kt} \Rightarrow 50 = A e^{0} \rightarrow A = 50$$

$$y = 50 e^{kt}$$

$$\left.\begin{matrix} t=5730 \\ y=25 \end{matrix}\right\} 25 = 50 e^{k(5730)} \Rightarrow k = -1.2 \times 10^{-4}$$

Solve

$$y = 50 e^{-1.2\times10^{-4} t}$$

http://alManahj.com/ae

كمية المتبقية بعد 100 عام

الكمية المتبقية لعينة 100

$$y = 50 e^{-1.2\times10^{-4}(100)}$$

$$= 49.4 \text{ g}$$

متى تصبح t ؟؟؟ الكمية $y = 40$ solve

$$40 = 50 e^{-1.2\times10^{-4} t}$$

$$t = 1859.5 \text{ سنة}$$

سيصبح عام 1960 تصبح الكمية 40g

Scanned by CamScanner

Date:

No:

قانون نيوتن للتبريد

$$y(t) = Ae^{kt} + T_a$$

T_a ← درجة حرارة الجسم

http://alManahj.com/ae

أ/محمود مراد 0506565584

Scanned by CamScanner

Date:
No:

تبلغ درجة حرارة فنجان القهوة الساخنة 80°C عندما يسكب لأول مرة بعد مرور دقيقتين تكون درجة حرارته 20°C
في غرفة درجة حرارتها 75°C

1. أوجد درجة حرارة فنجان القهوة كدالة في الزمن t
2. الزمن الذي تصل فيه درجة حرارة القهوة إلى 50°C
3. أوجد درجة حرارة فنجان القهوة بعد مرور 12min

$$y = 80 \quad t = 0 \quad \begin{cases} y = A e^{kt} + Ta \\ 80 - 20 = A \end{cases} \rightarrow 80 = A e^{0} + 20 \rightarrow A = 60$$

$$t = 2 \quad y = 75 \quad \begin{cases} y = 60 e^{kt} + 20 \\ 75 = 60 e^{k(2)} + 20 \end{cases} \rightarrow k = -0.04$$

http://alManahj.com/ae

Solve

$$Ta = 20 \qquad y = 60 e^{-0.04t} + 20$$

درجة حرارة القهوة عند أي زمن t

$$y = 60 e^{-0.04t} + 20$$

Solve

$$50 = 60 e^{-0.04(t)} + 20 \Rightarrow t = 17.3$$

$$y = 60 e^{-0.04t} + 20$$

$$y = 60 e^{-0.04(12)} + 20 = 57.1^{\circ}C$$

Scanned by CamScanner

Date:
No:

المراحة المركبة

- مراحة مركبة سنوية $n=1$
- = نصف سنوية $n=2$
- = ربع سنوية $n=4$
- = شهرية $n=12$
- = يومية $n=365$
- = مستمرة

http://alManahj.com/ae

المراحة المركبة

$$y = P\left(1+\frac{r}{n}\right)^{nt}$$

P مبلغ المال t الزمن بالسنوات

r معدل المراحة n عدد تنزيل الأرباح في السنة

المراحة المستمرة

$$y = P e^{rt}$$

Scanned by CamScanner

Date:
No:

إذا استثمر 7000 درهم كيف مراحة تربح 5.75% سنويا
فاسرع استثمار لهذا المبلغ سنوات
بأنواع مختلفة من نظام المراحة المركبة

$P=7000$
$r=\frac{5.75}{100}=0.0575$
$t=5$

① مراحة مركبة سنويا $n=1$

$$y=P\left(1+\frac{r}{n}\right)^{nt}=7000\left(1+\frac{0.0575}{1}\right)^{1(5)}=9257.6$$

② مراحة مركبة يوميا $n=365$

$$y=P\left(1+\frac{r}{n}\right)^{nt}=7000\left(1+\frac{0.0575}{365}\right)^{365(5)}=9331.4$$

http://alManahj.com/ae

③ مراحة مركبة كل شهر $n=12$

$$y=7000\left(1+\frac{0.0575}{12}\right)^{12(5)}=9325.2$$

④ مراحة مرتبة مستمرة

$$y=Pe^{rt}$$
$$=7000\,e^{0.0575(5)}$$
$$=9331.6$$

أفضل استثمار هو المراحة المركبة
المرتبة أفضل شهرية المرتبة أفضل سنوية

Scanned by CamScanner

Date:
No:

إضمحلال الإشعاع

$$y = A e^{-rt}$$

y هي كمية الإشعاع عند أي زمن t

r معدل اضمحلال الإشعاع (ثابت)

t الزمن

http://alManahj.com/ae

الاضمحلال الخطي للإشعاع

$$y - y_1 = m(t - t_1)$$

أ/محمود مراد 0506565584

Scanned by CamScanner

Date:
No:

مرض ما يتناقص الأصول في 10000 جنيه
تناقص بمعدل سنوي ثابت 24% فكم
① أصبح مبلغ الأصول بعد مائتين، 20 سنة
② فاحسب بسبب هذه المبلغ واحد الأصول كتبه 10000
وحكم ولن يكون لي بعد مرور 20 عام
تشرح الاحتمالات الخطي

$y = A e^{rt}$

$y = 10000$, $t = 0$

$10000 = A e^{0} \rightarrow$

$A = 10000$

$r = \frac{24}{100} = 0.24$

$y = 10000\, e^{-0.24t}$

معادلة مبلغ الأصول عند أي زمن t

$t = 10$

$y(10) = 10000\, e^{-0.24(10)}$

$= 907.17$ درهم

$t = 20$

$y(20) = 10000\, e^{-0.24(20)}$

$= 82.29$ درهم

الاحتمالات الخطي لأصول

نحتاج نقطتين من الخط

(t_1, y_1) , (t_2, y_2)

$(0, 10000)$, $(20, 0)$

$m = \frac{y_2 - y_1}{t_2 - t_1} = \frac{0 - 10000}{20 - 0} = -500$

$y - y_1 = m(t - t_1)$

$y - 10000 = -500(t - 0)$

$y = -500t + 10000$

http://alManahj.com/ae

Scanned by CamScanner