الصف : الثاني عشر متقدم

الدرس : 6-6

تطبيقات التكامل على الفيزياء والهندسة

نواتج التعلم :
- حساب الشغل المبذول لتمدد النابض .
- حساب الشغل المبذول لضخ ماء الخزان .
-
-

تغذية راجعة : درسنا التكامل بكل أشكاله التكامل المحدود وغير المحدود وطبقنا التكامل على حركة القذائف في الدرس السابق .

إذا كان $h''(x) = 2x$ و $h'(0) = 3$ أوجد $h'(x)$.

$$h'(x) = \int h''(x)\,dx = \int 2x\,dx = x^2 + C$$

$$h'(0) = 0^2 + C \Rightarrow 3 = 0 + C \Rightarrow C = 3$$

$$h'(x) = x^2 + 3$$

الشغل : هو ناتج ضرب المسافة d بالقوة F ونرمز له بالرمز W

$$W = F \cdot d$$

أما في حالة القوة غير الثابتة $F(x)$ المبذولة على الفترة $[a,b]$ نجزء الفترة $[a,b]$ الى فترات جزئية متساوية عرض كل منها

$$\Delta x = \frac{b-a}{n}$$

فتكون الفترات الجزئية $[x_{i-1}, x_i]$.

لتكن $c_i \in [x_{i-1}, x_i]$ فتكون القوة $F(c_i)$

فيكون الشغل حسب مجموع ريمان

$$W = \sum_{i=1}^{n} F(c_i)\Delta x$$

$$W = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} F(c_i)\Delta x = \int_a^b F(x)\,dx$$

وبالتالي :

$$\text{الشغل} = W = \int_a^b F(x)\,dx$$

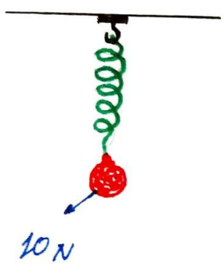
حساب الشغل المبذول لتمدد النابض :

في النابض . نلاحظ أنه كلما انكمش النابض أو (تمدد) عن طوله الطبيعي زادت القوة المطلوبة للإنكماش أو التمدد .

وحسب قانون هوك $F(x) = Kx$

حيث K ثابت النابض x المسافة $F(x)$ القوة المبذولة على النابض

مثال : تعمل قوة قدرها 10 نيوتن على تمدد نابض 0.08 متر من طوله الطبيعي أوجد الشغل المبذول في تمدد النابض 0.16 متراً أكثر من طوله الطبيعي .



الحل : نحدد قيمة ثابت النابض .

حسب قانون هوك :

$$F(x) = Kx$$

$$10 = K \times 0.08 \Rightarrow K = \frac{10}{0.08} = 125$$

وبالتالي $F(x) = 125x$

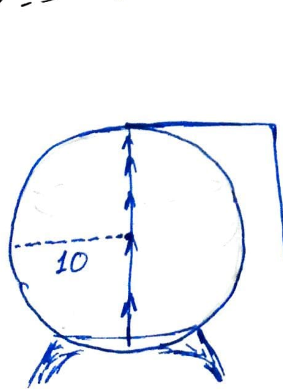
الشغل : $W = \int_a^b F(x)\,dx = \int_0^{0.16} 125x\,dx$

$$W = \left[62.5x^2\right]_0^{0.16} = 62.5(0.16)^2 - 62.5(0)^2 = 1.6\ N/m$$

حسب الشغل المطلوب لضخ ماء من الخزان :

مثال : يبلغ نصف قطر خزان كروي الشكل 10 أمتار مملوء بالماء أوجد الشغل المبذول في ضخ كل كمية الماء للخارج من خلال الجزء العلوي من الخزان

الحل : لا يمكن أن نطبق الصيغة الأساسية $W = F\,d$ مباشرة هنا .



لأن المسافة التي يقطعها الماء من كل جزء من الخزان مختلفة .

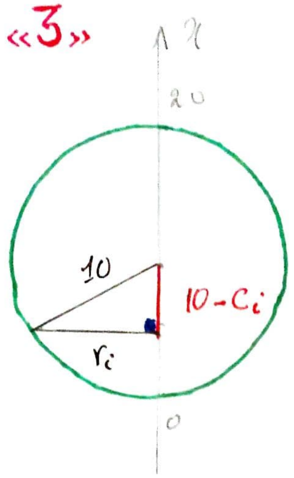
لتكن x المسافة فتكون $0 \leq x \leq 20$

نجزئ الفترة الى $0 = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = 20$

بحيث $\Delta x = \frac{20}{n}$

بهذا الشكل يكون قد تم تجزئة الخزان الى طبقات ارتفاعها Δx بحيث يمكن أن نعتبر كل طبقة عبارة عن اسطوانة ارتفاعها Δx .

«3»



ونصف قطر الطبقة r_i عندما $x = c_i$

نحسب r_i :

حسب فيثاغورث في المثلث القائم نجد

$$10^2 = r_i^2 + (10 - c_i)^2$$

$$\cancel{100} = r_i^2 + \cancel{100} - 20c_i + c_i^2$$

$$r_i^2 = 20c_i - c_i^2$$

القوة F_i المطلوبة لتحريك الطبقة i هي القوة المبذولة على الماء بواسطة الجاذبية :

نعلم أن كثافة الماء $1000\ Kg/m^3$

$F_i \simeq$ (حجم الشريحة الاسطوانية) (وزن الماء في وحدة الحجم)

$$F_i \simeq (\pi r_i^2 h)\ 1000 \qquad : h = \Delta x$$

$$= 1000\pi\ (20c_i - c_i^2)\ \Delta x$$

الشغل من أجل الطبقة i $W =$ القوة $\times$ المسافة $= 1000\pi\ (20c_i - c_i^2)\Delta x (20 - c_i)$

$$= 1000\pi\ c_i (20 - c_i)(20 - c_i)\ \Delta x$$

$$= 1000\pi\ c_i\ (20 - c_i)^2\ \Delta x$$

$$W = \sum_{i=1}^{n} 1000\pi\ c_i\ (20 - c_i)^2 \Delta x$$

$$W = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} 1000\pi\ c_i (20 - c_i)^2 \Delta x = \int_0^{20} 1000\pi\ x (20 - x)^2\, dx$$

$$= 1000\pi \int_0^{20} x (400 - 40x + x^2)\, dx$$

$$= 1000\pi \int_0^{20} (400x - 40x^2 + x^3)\, dx$$

$$= 1000\pi \left[200x^2 - \frac{40}{3} x^3 + \frac{1}{4} x^4 \right]_0^{20}$$

$$= 4.18 \times 10^7\ N/m$$

الدفع :

هو كمية فيزيائية تربط بين القوة والزمن لحساب التغيرات في السرعة المتجهة .

بفرض أنه تم بذل قوة ثابتة F على جسم من الزمن $t=0$ الى الزمن $t=T$

واذا كان موضع الجسم عند الزمن t هو $x(t)$ يكون التسارع $x''(t)$

حسب قانون نيوتن الثاني $F = ma = m\,x''(t)$

نكامل هذه المعادلة :

$$\int_0^T F\,dt = m\int_0^T x''(t)\,dt$$

$$F\int_0^T dt = m\int_0^T x''(t)\,dt \Rightarrow F[t]_0^T = [x'(t)]_0^T m$$

$$F(T-0) = (x'(T) - x'(0))\,m$$

بما أن $x'(t) = v(t)$ السرعة المتجهة فإن :

$$F\times(T) = (v(T) - v(0))\,m$$

بفرض $\Delta v = v(T) - v(0)$ فيكون

$$FT = m\Delta v$$

يطلق على الكمية FT الدفع وتسمى $m\,v(t)$ الزخم عند الزمن t

اذا رمزنا للدفع بالرمز J لقوة $F(t)$ مبذولة على الفترة $[a,b]$ فإن معادلة الدفع والزخم هي :

$$\boxed{J = m(v(b) - v(a))} \quad و \quad J = \int_a^b F(t)\,dt$$

مثال:

بفرض أن كرة البيسبول تنطلق بسرعة $130\ m/s$ لتصطدم بمضرب يبين الجدول التالي القوة المبذولة من المضرب على الكرة وفق فترات تبلغ $0.0001\ s$.

$t(s)$	0	0,0001	0,0002	0,0003	0,0004	0,0005	0,0006	0,0007
$F(t)(N)$	0	1250	4250	7500	9000	5500	1250	0

قدر دفع المضرب على الكرة وسرعة الكرة بعد التصادم

حيث $m = 0.01\ Kg$

الحل: في هذه الحالة يعطى الدفع بالقانون

$$J = \int_a^b F(t)\,dt = \int_0^{0.0007} F(t)\,dt$$

نحسب قيمة تقريبية للتكامل عدديا حسب سمبسون
اذا كانت $n = 8$ فإنه حسب قاعدة سمبسون .

$$\int_0^{0.0007} F(t)\,dt = \frac{b-a}{3n}\left[f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + 4f(x_3) + \cdots + f(x_n)\right]$$

وبما أن قاعدة سمبسون يجب أن يكون عدد زوجي فإننا نحتاج الى $n+1$ فردي من النقاط لتقسيم الفترة وباستخدام $n = 8$ واضافة دالة صفرية $t = 0{,}0008$

$$J = \frac{0.0008}{3 \times 8}\left[0 + 4(1250) + 2(4250) + 4(7500) + 2(9000) + 4(5500) + 2(1250) + 0\right] \simeq 2.867$$

وبالتالي معادلة الدفع والزخم هي :

$$J = m\,\Delta V$$

$$2.867 = 0.01\,\Delta V$$

$$\Delta V = \frac{2.867}{0.01} \Rightarrow \Delta V = 286.7 \ m/s$$

وبما أن الكرة قد بدأت بسرعة $130 \ m/s$ في اتجاه واحد .
ثم ارتدت بالاتجاه المعاكس .
تكون السرعة بعد التصادم هي

$$\Delta V = 286.7 - 130 = 156.7 \ m/s$$

مركز الكتلة :

بفرض أن طفلين على أرجوحة توازن في ملعب ونفرض أن أحد الطفلين أثقل من الآخر هنا يعني أن الارجوحة ستنخفض للأسفل عند الطفل الذي وزنه أثقل .

ولكن على الرغم من فرق الوزن يمكن توازن الارجوحة اذا كان بعد الطفل الأثقل أصغر من بعد الطفل الأخف من النقطة المحورية .

بفرض كتل الطفلين m_1 ، m_2 والمسافتين d_1 ، d_2 يحدث التوازن عندما

$$m_1 d_1 = m_2 d_2$$

اذا كان لدينا كتلتين نقطيتين عندئذٍ مركز الكتلة $\bar{x}$ هو :

$$\bar{x} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2}$$

نسمي البسط $m_1 x_1 + m_2 x_2$ العزم الأول للنظام .

أما اذا كان لدينا n كتلة نقطية على بعد x_n فإن مركز الكتلة :

$$\bar{x} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + \cdots + m_n x_n}{m_1 + m_2 + \cdots + m_n}$$

الكتلة :

لتكن $p(x)$ كثافة الجسم المتغيرة ويمتد الجسم على الفترة $[a, b]$ فإن كتلة الجسم تعطى بالقانون $m = pL$.

حيث $L = b - a$

أما اذا كانت الكثافة تتغير فإن $\Delta x = \frac{b-a}{n}$ والفترات الجزئية $[x_{i-1}, x_i]$ لتكن $c_i \in [x_{i-1}, x_i]$ عندئذٍ تكون القيمة التقريبية للكتلة

$$p(c_i)\,\Delta x$$

والكتلة الاجمالية حسب ريمان

$$m = \sum_{i=1}^{n} p(c_i)\,\Delta x$$

وبالتالي تكون الكتلة

$$m = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} p(c_i)\,\Delta x$$

$$m = \int_a^b p(x)\,dx$$

العزم الأول لجسم له كثافة $p(x)$ غير ثابتة

$$M_n = \sum_{i=1}^{n} c_i \, p(c_i) \, \Delta x$$

$$M = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} c_i \, p(c_i) \, \Delta x$$

$$M = \int_a^b x \, p(x) \, dx$$

ومنه مركز الكتلة يكون :

$$\bar{x} = \frac{M}{m} = \frac{\int_a^b x \, p(x) \, dx}{\int_a^b p(x) \, dx}$$

القوة الهيدروستاتيكية :

تخيل سد يحجم بحيرة مليئة بالمياه ماهي القوة التي يجب أن يصمد أمامها السد ؟

لتكن o نقطة الأصل و a عمق السد.

بفرض أن $w(x)$ عرض الجدار عند x .

نجزء الفترة $[o, a]$ الى n فترات جزئية متساوية العرض $\Delta x = \frac{a}{n}$

مما يؤدي الى تجزئة السد الى n شريحة

فتكون مساحة الشريحة عند $c_i \in [x_{i-1}, x_i]$ هي $w(c_i) . \Delta x$

وتكون القوة F_i المؤثرة على الشريحة

$$F_i = 1000 \, w(c_i) . \Delta x . c_i$$

حيث 1000 كثافة الماء.

$$= 1000 \, c_i \, w(c_i) \, \Delta x$$

$$F = \sum_{i=1}^{n} 1000 \, c_i \, w(c_i) \, \Delta x$$

$$F = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} 1000 \, c_i \, w(c_i) \, \Delta x$$

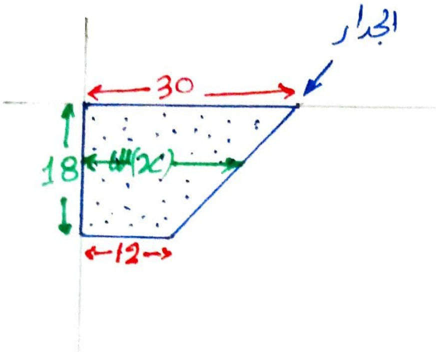
وبالتالي القوة الهيدروستاتيكية على السد هي :

$$F = \int_o^a 1000 \, x \, w(x) \, dx$$

مثال:

يتخذ سد شكلاً لشبه منحرف قائم ارتفاعه 18 متراً . يبلغ العرض في الجزء العلوي 30 متراً والعرض في الجزء السفلي 12 متراً .
أوجد القيمة العظمى للقوة الهيدروستاتيكية التي سيحتاج إليها السد لكي يصمد .
- اذا انخفض منسوب المياه 3 متر أوجد القوة الهيدروستاتيكية .

الحل:



(1) دالة العرض هي دالة خطية

لدينا $w(0) = 30$ $\quad w(18) = 12$

فيكون ميل الجدار :

$$m = \frac{30-12}{0-18} = \frac{18}{-18} = -1$$

ومنه $w(x) = -x + 30$

$$F = \int_a^b 1000\, x\, w(x)\, dx$$

$$F = \int_0^{18} 1000\, x(-x+30)\, dx = 1000\int_0^{18} (-x^2+30x)\, dx$$

$$= 1000\left[-\frac{1}{3}x^3 + 15x^2\right]_0^{18}$$

$$= 1000\left[-\frac{1}{3}(18)^3 + 15(18)^2 - \left(-\frac{1}{3}(0)^3 + 15(0)^2\right)\right] =$$

$$= 2916000 \overset{\times 9.8}{=} 28576800\ N$$

(2) عندما ينخفض مستوى المياه 3 أمتار يصبح العرض 27 والارتفاع 15 .

يكون $m = \frac{27-12}{0-15} = \frac{15}{-15} = -1$

$$w(x) = -x + 27$$

$$F = \int_0^{15} 1000\, x(-x+27)\, dx = 1000\int_0^{15} (-x^2+27x)\, dx$$

$$= 1000\left[-\frac{1}{3}x^3 + \frac{27}{2}x^2\right]_0^{15}$$

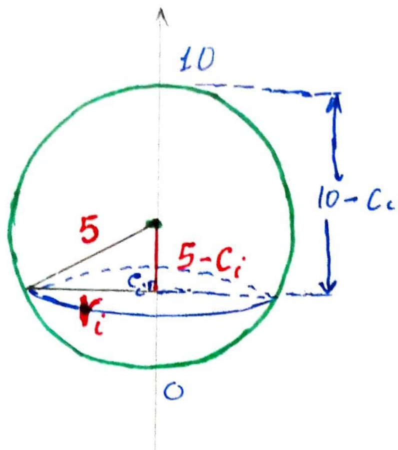
$$= 1000\left(-\frac{1}{3}(15)^3 + \frac{27}{2}(15)^2 - 0\right) = 1912500$$

$$= 1912500 \overset{\times 9.8}{=} 18742500\ N$$

«9»

تمرين :

يبلغ نصف قطر خزان كروي الشكل $5\ ft$ مملوء بالماء .
أوجد الشغل المبذول في ضخ كل كمية الماء للخارج من خلال الجزء العلوي من الخزان



الحل: نقسم الخزان الى طبقات ارتفاع كل منها Δx
لنحسب نصف قطر قاعدة الطبقة .
من المثلث القائم في الشكل المجاور
حسب فيثاغورث نجد .

$$5^2 = r_i^2 + (5-c_i)^2$$

$$\cancel{25} = r_i^2 + \cancel{25} - 10c_i + c_i^2$$

$$r_i^2 = 10c_i - c_i^2$$

ملاحظة :
اذا كانت المسافة ft (قدم) فان الوزن الحجمي للماء هو $62.4\ lb/ft^3$

القوة المبذولة لتحريك الطبقة i هي F_i

$F_i =$ (الوزن الحجمي للماء) (حجم الشريحة الاسطوانية)

$$F_i = (\pi r_i^2 h)(62.4)\,\Delta x$$

$$= \pi(10c_i - c_i^2)(62.4)\Delta x$$

الشغل المبذول للطبقة i بحيث $h_i = 10 - c_i$

$$W_i = F_i \times h_i = \pi c_i(10-c_i)(10-c_i)(62.4)\,\Delta x$$

$$= 62.4\pi c_i (10-c_i)^2 \Delta x$$

$$= \int_0^{10} 62.4\pi x(10-x)^2\,dx$$

$$= 62.4\pi \int_0^{10} x(100 - 20x + x^2)\,dx$$

$$= 62.4\pi \int_0^{10} (100x - 20x^2 + x^3)\,dx$$

$$= 62.4\pi \left[100\frac{x^2}{2} - 20\frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4}\right]_0^{10}$$

$$= 62.4\pi \left[\left(100\frac{(10)^2}{2} - 20\frac{(10)^3}{3} + \frac{10^4}{4}\right) - (0)\right]$$

$$= 163362.818$$

«10»

$\frac{1}{468}$:

احدثت قوة من 5 نيوتن تمدد على نابض 4 سنتمتر
أوجد الشغل المبذول في تمدد هذا النابض 6 سنتمتر أبعد من طوله الطبيعي

الحل: نحول الى متر

4 سنتمتر $= 4 \div 100 = 0.04\ m$

$6 = 0.06\ m$

حسب قانون هوك

$$F(x) = K\,x$$

$$5 = K \times 0.04 \Rightarrow K = \frac{5}{0.04} = 125$$

وبالتالي

$$F(x) = 125\,x$$

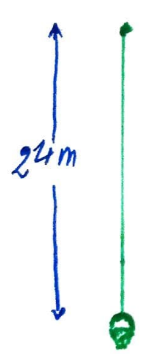
الشغل

$$W = \int_a^b F(x)\,dx = \int_0^{0.06} 125x\,dx$$

$$= \left[62.5\,x^2\right]_0^{0.06} = 62.5(0.06)^2 - 62.5(0) = 0.225\ N/m$$

$\frac{8}{468}$:

تم رفع دلو مسافة 24 مترًا بمعدل $1\ m/s$
يحتوي الدلو على 45 كيلوغرام من الرمال ، لكن تتسرب منه الرمال بمعدل 0.9 كيلوغرام بالثانية . احسب الشغل المبذول .



الحل: زمن السحب $24\ s$ لأن كل متر يستغرق 1 ثانية

خسارة التسرب $= 24 \times 0.9 = 21.6\ Kg$

وزن الرمل في الدلو بعد 24 متر $= 45 - 21.6 = 23.4\ Kg$

	لدينا	الوزن	الارتفاع
نقطة البداية $(0, 45)$ ⟸		45	0
نقطة النهاية $(24, 23.4)$ ⟸		23.4	24

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{23.4 - 45}{24 - 0} = \frac{-21.6}{24} = -0.9$$

$$y - y_1 = m(x - x_1) \Rightarrow y - 45 = -0.9(x - 0)$$

$$\Rightarrow y - 45 = -0.9x \Rightarrow y = -0.9x + 45$$

الشغل

$$W = \int_0^{24} F(x)\,dx = \int_0^{24} (-0.9x + 45)\,dx = \left[-0.9\frac{x^2}{2} + 45x\right]_0^{24}$$

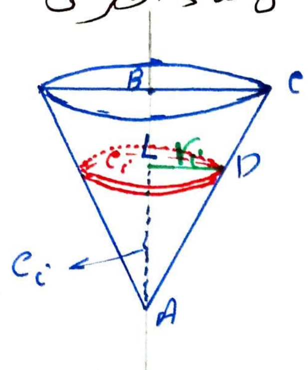
$$= -0.9\frac{(24)^2}{2} + 45(24) - \left(-0.9\frac{(0)^2}{2} + 45(0)\right)$$

$$= 820.8 = 8043.84\ N$$

«11»

$\frac{12}{468}$

خزان ماء على شكل مخروط دائري قائم ارتفاعه 3 أمتار وطول نصف قطر قاعدته 1.5 متراً حيث أن رأسه على الأرض.
إذا كان الخزان ممتلئاً فأوجد الشغل المبذول لضخ كل ماء الخزان انطلاقاً من الجزء العلوي للخزان.



الحل: نحسب نصف قطر الطبقة:

من تشابه المثلثين ABC ، ALD نجد

$$\frac{LD}{BC} = \frac{AL}{AB} \Rightarrow \frac{r_i}{1.5} = \frac{c_i}{3}$$

$$r_i = \frac{1.5\, c_i}{3} \Rightarrow r_i = \frac{1}{2} c_i$$

القوة F_i المبذولة لتحريك الطبقة i هي

$F_i =$ الوزن الحجمي للماء $\times$ حجم الشريحة الاسطوانية

$$F_i = \pi r_i^2 \Delta x \times 1000$$

$$= \pi \left(\frac{1}{2} c_i\right)^2 \Delta x \times 100 = 1000\pi \frac{1}{4} c_i^2 \Delta x$$

$$F_i = 250\pi c_i^2 \Delta x$$

الشغل من أجل الطبقة i $= W =$ القوة $\times$ المسافة $= 250\pi c_i^2 \Delta x \times (3 - c_i)$

$$= 250\pi (3c_i^2 - c_i^3) \Delta x$$

$$W = \int_0^3 250\pi (3x^2 - x^3)\, dx$$

$$= 250\pi \left[x^3 - \frac{1}{4}x^4\right]_0^3$$

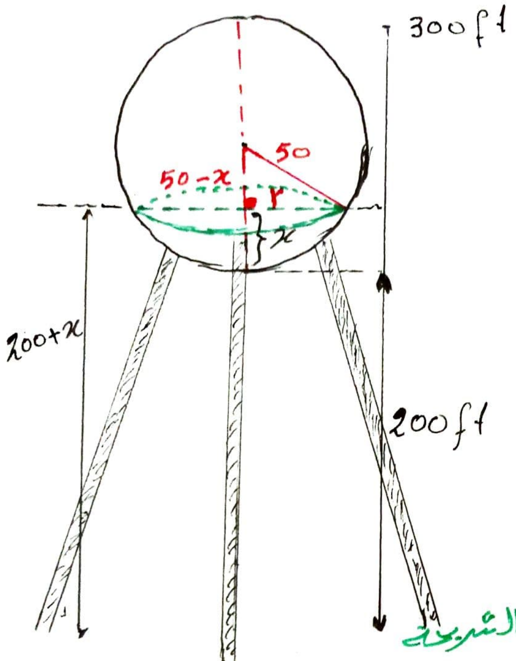
$$= 250\pi \left[3^3 - \frac{1}{4}(3)^4 - \left(0 - \frac{1}{4}(0)\right)\right]$$

$$= 5301.43$$

$$= 51954.088\ N$$

تمرين : يوجد برج مائي كروي الشكل نصف قطره 50 ft يمتد من 200 ft الى 300 ft فوق سطح الأرض a) احسب الشغل المبذول في ملء الخزان من الأرض

b) احسب الشغل المبذول في ملء الخزان من نصف المسافة .



الحل : بما أن الأطوال بالقدم فإن كثافة الماء هي $62.4\ lb/ft^3$

نأخذ شريحة من بعد أن نجزء الخزان الى شرائح

نعتبر الشريحة اسطوانة .

نحسب حجم الشريحة .

الحجم $= \pi r^2 \times$ الارتفاع

نحسب r :

من المثلث القائم حسب فيثاغورث .

$$50^2 = r^2 + (50-x)^2$$

حيث x بعد الشريحة من أسفل البرج.

$$\cancel{2500} = r^2 + \cancel{2500} - 100x + x^2$$

الحجم $= \pi(100x - x^2)\Delta x \Leftarrow r^2 = 100x - x^2$

القوة المطبقة على الشريحة هي الكثافة × الحجم $= F$

$$F = \pi(100x - x^2)\Delta x \times 62.4$$

الشغل المبذول على الشريحة هو $W = F \cdot d$

المسافة d هي $200 + x$ لأنه تم ملء الخزان من الأسفل .

$$W = \pi(100x - x^2)\Delta x \times 62.4 \times (200 + x)$$

$$W = \pi(100x - x^2)(200 + x)\Delta x \times 62.4$$

$$= 62.4\pi(100x - x^2)(200 + x)\Delta x$$

الشغل اللازم لملء الخزان هو التكامل :

$$W = \int_0^{100} 62.4\pi(100x - x^2)(200 + x)\, dx$$

ارتفاع الخزان 100 ft

$$= 8168140899\ lb$$

b) عند ملء الخزان من نصف المسافة يصبح الارتفاع $100 + x$ لأن $\frac{200}{2} = 100$