الوحدة الخامسة

التكامل

مع تمنياتي لكم بالنجاح والتفوق

إعداد : محمد عمر الخطيب

الدالة الاصلية

اذا كانت الدالة $f(x)=x^2+c$ حيث c عدد ثابت فان مشتقتها الدالة $f'(x)=2x$.

نقول ان الدالة $f(x)=x^2+c$ هي الدالة الاصلية للدالة $f'(x)=2x$

ونعبرعما سبق بالرموز

$$\int 2x\ dx = x^2 + c$$

ويقرء التكامل غيرالمحدود للدالة $f(x)=2x$ بالنسبة للمتغير x هو $f(x)=x^2+c$

(1) اوجد الدالة الاصلية للدالة $f(x)=3x^2$ وعبرها عن ذلك بالرموز

نعلم ان مشتقة الدالة $F(x)=x^3+c$ حيث c عدد ثابت هي الدالة $f(x)=3x^2$

لذلك فان الدالة الاصلية للدالة $f(x)=3x^2$ هي الدالة $F(x)=x^3+c$

ونكتب ذلك بالرموز

$$\int 3x^2\ dx = x^3 + c$$

---

(2) اوجد الدالة الاصلية للدالة $f(\theta)=\cos\theta$ وعبر عن ذلك بالرموز

الدالة الاصلية للدالة $f(\theta)=\cos\theta$ هي الدالة $F(\theta)=\sin\theta+c$ حيث c عدد ثابت يسمى ثابت التكامل

ونكتب ذلك بالرموز

$$\int \cos\theta\ d\theta = \sin\theta + c$$

(1) اذا كانت $F(x)=\ln(\sec x+\tan x)$

(أ) اوجد $F'(x)$

$$F'(x)=\frac{\sec x\tan x+\sec^2 x}{\sec x+\tan x}$$

$$=\frac{\sec x(\tan x+\sec x)}{\sec x+\tan x}=\sec x.$$

(ب) ما هي الدالة الاصلية للدالة $f(x)=\sec x$

$\ln|\sec x+\tan x|+c$ | $\int \sec x\,dx=\ln|\sec x+\tan x|+c$

---

(2) بين ان الدالة $F(x)=2x\ln(ex)-3x$ هي الدالة الاصلية للدالة $f(x)=1+\ln x^2$

$$F'(x)=2\cdot\ln(ex)+2x\cdot\frac{e}{ex}-3$$

$$=2[\ln e+\ln x]+2-3$$

$$=2[1+\ln x]-1$$

$$=2+2\ln x-1$$

$$=1+2\ln x$$

$$=1+\ln x^2\quad,\quad x>0$$

#

---

(3) بين ان $\int \underbrace{x e^x}_{f(x)} dx=\underbrace{x e^x-e^x}_{F(x)}+c$

$$\frac{d}{dx}(xe^x-e^x+c)$$

$$=1\cdot e^x+xe^x-e^x.$$

$$=xe^x\Rightarrow\int xe^x\,dx=xe^x-e^x+c$$

تعريف : التكامل غير المحدود

مجموعة كل الدوال الاصلية للدالة $f(x)$ هي التكامل غير المحدود للدالة f بالنسبة إلى x

ويرمز لها بالرمز $\int f(x)\,dx$

أي أن $\int f(x)\,dx = F(x) + C$

ملاحظة : التكامل هو العملية العكسية للمشتقة اي ان المشتقة تلغي التكامل والتكامل يلغي المشتقة

$$\frac{d}{dx}\int f(x)\,dx = f(x) \quad \text{و} \quad \int \frac{d}{dx} f(x)\,dx = f(x) + c$$

(1) اذا كان $\frac{d}{dx} g(x) = x\sin x$ ، اوجد $\int x\sin x\,dx$

$$\int x\sin x\,dx = \int\left[\frac{d}{dx} g(x)\right]dx = g(x) + c$$

نظرية

اذا كانت الدالة $F(x)$ هي الدالة الاصلية للدالة $f(x)$ ، و الدالة $G(x)$ هي الدالة الاصلية للدالة $f(x)$ على الفترة I فان

$G(x) = F(x) + c$ او $G(x) - F(x) = c$ حيث c عدد ثابت.

(2) بين ان الدالتان $F(x) = x^2(x^2+4)$ ، $G(x) = \frac{1}{4}(2x^2+4)^2$ هما دالتان كل منهما الدالة الاصلية لنفس الدالة

$G(x) - F(x)$

$= \frac{1}{4}(2x^2+4)^2 - x^2(x^2+4)$

$= \frac{1}{4}(4x^4+16x^2+16) - x^4 - 4x^2$

$= x^4 + 4x^2 + 4 - x^4 - 4x^2 = 4$

الفرق بينهما ثابت .

قواعد التكامل

ملاحظة: راجع قواعد الاشتقاق

قبل البدأ بالتكامل ...اسئل نفسك

(1) هل الدالة التي نريد ايجاد تكاملها هي ناتج جمع اوطرح حدود وكل حد قابل للتكامل

(2) هل الدالة التي نريد ايجاد تكاملها هي ناتج ضرب او قسمة ويمكن تحويلها ال جمع او طرح حدود وكل حد قابل للتكامل

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c \quad , n \neq -1$$

$$* \int (a x + b)^n dx = \frac{(a x + b)^{n+1}}{a(n+1)} + c$$

$$\int \sin x \, dx = -\cos x + c$$

$$* \int \sin kx \, dx = -\frac{\cos kx}{k} + c$$

$$\int \cos x \, dx = \sin x + c$$

$$\int \sec^2 x \, dx = \tan x + c$$

$$\int \csc^2 x \, dx = -\cot x + c$$

$$\int \sec x \tan x \, dx = \sec x + c$$

$$\int \csc x \cot x \, dx = -\csc x + c$$

$$\int e^x \, dx = e^x + c$$

$$* \int e^{ax+b} \, dx = \frac{1}{a} e^{ax+b} + c$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + c$$

$$* \int a^x \, dx = \frac{a^x}{\ln a} + c$$

$$\int \frac{1}{x^2+1} dx = \tan^{-1} x + c$$

$$* \int f'(x) \, e^{f(x)} \, dx = e^{f(x)} + c$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \sin^{-1} x + c$$

$$* \int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln|f(x)| + c$$

$$\int \frac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}} dx = \sec^{-1} x + c$$

خواص التكامل غير المحدود

(1) $\int k \; f(x) \, dx = k \int f(x) \, dx$

(2) $\int (f(x) \pm g(x)) \, dx = \int f(x) \, dx \pm \int g(x) \, dx$

اوجد التكاملات التالية (اوجد الدالة الاصلية)

(1) $\int (3x^2 - \sqrt{x} + 2)\ dx$ $\quad \sqrt{x} \rightarrow x^{1/2}$

$= 3\dfrac{x^3}{3} - \dfrac{2}{3}x^{3/2} + 2x + c$

$= x^3 - \dfrac{2}{3}x^{3/2} + 2x + c.$

(2) $\int (\dfrac{1}{\sqrt{x}} - \dfrac{5}{x^4} + \dfrac{1}{x})\ dx$ $= \int x^{-1/2} - 5x^{-4} + \dfrac{1}{x}\ dx$

$= 2x^{1/2} - 5\dfrac{x^{-3}}{-3} + \ln|x| + c$

$= 2\sqrt{x} + \dfrac{5}{3x^3} + \ln|x| + c$

(3) $\int t^2(t^3 - \dfrac{1}{t^2})\ dt$ $= \int t^5 - 1\ dt$

$= \dfrac{1}{6}t^6 - t + c.$

(4) $\int \dfrac{x^4 - 3x + 1}{x^2}\ dx$ $= \int \dfrac{x^4}{x^2} - \dfrac{3x}{x^2} + \dfrac{1}{x^2}\ dx$

$= \int x^2 - \dfrac{3}{x} + x^{-2}\ dx$

$= \dfrac{1}{3}x^3 - 3\ln|x| + \dfrac{x^{-1}}{-1} + c.$

(5) $\int \dfrac{x^2 - 3x - 4}{x - 4}\ dx$ $= \int \dfrac{\cancel{(x-4)}(x+1)}{\cancel{x-4}}\ dx = \int x + 1\ dx$

$= \dfrac{1}{2}x^2 + x + c.$

(6) $\int \dfrac{x-4}{\sqrt{x} - 2}\ dx$ $\times \dfrac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}+2}$ $= \int \dfrac{(x-4)(\sqrt{x}+2)}{x-4}\ dx$

$= \int \sqrt{x} + 2\ dx$

$= \int x^{1/2} + 2\ dx$

$= \dfrac{2}{3}x^{3/2} + 2x + c$

أوجد التكاملات التالية

(1) $\int (3\sin x - \cos 4x) \quad dx$ $= -3\cos x - \dfrac{\cos 4x}{4} + c$

(2) $\int \sec x(\tan x - \sec x) \quad dx$ $= \int \sec x \tan x - \sec^2 x \; dx$

$= \sec x - \tan x + c.$

(3) $\int (\sec 2x \tan 2x + \csc^2 5x) \quad dx$ $= \dfrac{\sec 2x}{2} - \dfrac{\cot 5x}{5} + c$

(4) $\int \dfrac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\cos x \cot x} \quad dx$ $= \int \dfrac{1}{\cos x \cot x} dx$

$= \int \sec x \tan x \, dx = \sec x + c$

(5) $\int \csc x(\sec x \tan x - \cot x) \quad dx$ $= \int \dfrac{1}{\sin x}\left(\dfrac{1}{\cos x} \cdot \dfrac{\sin x}{\cos x} - \dfrac{\cos x}{\sin x}\right) dx$

$= \int (\sec^2 x - \csc x \cot x) dx = \tan x + \csc x + c$

(6) $\int \left(\dfrac{2\sin x}{\cos^2 x} + \dfrac{\cos x}{\sin^2 x}\right) \quad dx$

$= \int (2\sec x \tan x + \csc x \cot x) dx$

$= 2\sec x - \csc x + c$

توضيح

$\dfrac{2\sin x}{\cos^2 x} = \dfrac{2\sin x}{\cos x} \cdot \dfrac{1}{\cos x}$

$= 2\tan x \sec x.$

$= 2\sec x \tan x.$

$\dfrac{\cos x}{\sin^2 x} = \dfrac{\cos x}{\sin x} \cdot \dfrac{1}{\sin x}$

$= \cot x \csc x$

$= \csc x \cot x.$

أوجد التكاملات التالية:

(1) $\int (e^x + \frac{1}{x} - \cos 2x + 1) \quad dx$

$= e^x + \ln|x| - \frac{\sin 2x}{2} + x + c$

---

(2) $\int (2x + x\sqrt{x} + e^{2x} - \sin 3x) \quad dx$

$= \int 2x + x^{3/2} + e^{2x} - \sin 3x \quad dx$

$= x^2 + \frac{2}{5} x^{5/2} + \frac{e^{2x}}{2} + \frac{\cos 3x}{3} + c.$

---

(3) $\int (\frac{2}{x} + \frac{1}{\sqrt{e^{2x}}} - x) \quad dx$

$\star \; \frac{1}{\sqrt{e^{2x}}} = \frac{1}{(e^{2x})^{1/2}}$

$= \frac{1}{e^x}$

$= e^{-x}$

$= \int \frac{2}{x} + e^{-x} - x \; dx$

$= 2\ln|x| + \frac{e^{-x}}{-1} - \frac{x^2}{2} + c$

$= 2\ln|x| - \frac{1}{e^x} - \frac{1}{2}x^2 + c.$

---

(4) $\int \frac{e^x + 3}{e^x} \quad dx = \int \frac{e^x}{e^x} + \frac{3}{e^x} \, dx$

$= \int 1 + 3e^{-x} \, dx$

$= x + \frac{3e^{-x}}{-1} + c = x - \frac{3}{e^x} + c.$

أوجد التكاملات التالية:

البسط = مشتقة المقام $\Rightarrow$ Ln المقام

(1) $\int \frac{e^x}{e^x+1}\, dx = \ln|e^x+1| + c$

(2) $\int \frac{\sec^2 x}{\tan x}\, dx = \ln|\tan x| + c$

(3) $\int \frac{x}{x^2+1}\, dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x}{x^2+1} = \frac{1}{2}\ln|x^2+1| + c$

(4) $\int \frac{-7}{2x+1}\, dx = -7\int \frac{1}{2x+1}\, dx = -\frac{7}{2}\int \frac{2}{2x+1}\, dx = -\frac{7}{2}\ln|2x+1| + c$

(5) $\int \frac{2x+1}{x(x+1)}\, dx = \int \frac{2x+1}{x^2+x}\, dx = \ln|x^2+x| + c.$

(6) $\int \frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}\, dx = \ln|e^x+e^{-x}| + c.$

(7) $\int (\cot x+\tan x)\, dx = \int \frac{\cos x}{\sin x} + \frac{\sin x}{\cos x}\, dx$

$= \int \frac{\cos x}{\sin x} - \frac{-\sin x}{\cos x}\, dx = \ln|\sin x| - \ln|\cos x| + c$

(8) $\int e^{2x+1}\, dx = \frac{e^{2x+1}}{2} + c$

(9) $\int \cos x\, e^{\sin x}\, dx = e^{\sin x} + c$

(10) $\int x\, e^{x^2}\, dx = \frac{1}{2}\int 2x\, e^{x^2} = \frac{1}{2} e^{x^2} + c$

اوجد التكاملات التالية

(1) $\int e^x(2e^x-3)\;dx = \int 2e^{2x}-3e^{x}\,dx = 2\frac{e^{2x}}{2}-3e^{x}+c$

(2) $\int (e^x-e^{-x})^2\;dx$

$(e^x-e^{-x})^2 = (e^x)^2-2e^x\cdot e^{-x}+(e^{-x})^2 = e^{2x}-2+e^{-2x}$

$= \int e^{2x}-2+e^{-2x}\,dx$

$= \frac{e^{2x}}{2}-2x+\frac{e^{-2x}}{-2}+c.$

(3) $\int \frac{e^{\tan x}}{1-\sin^2 x}\;dx = \int \frac{e^{\tan x}}{\cos^2 x}\,dx$

$= \int \sec^2 x\, e^{\tan x}\,dx = e^{\tan x}+c$

(4) $\int e^{x^2+\ln x}\;dx = \int e^{x^2}\cdot e^{\ln x}\,dx = \int e^{x^2}\cdot x\,dx$

$= \int x e^{x^2}\,dx = \frac{1}{2}\int 2x\,e^{x^2}\,dx = \frac{1}{2}e^{x^2}+c$

(5) $\int \frac{1}{e^{-x}+1}\;dx = \int \frac{1}{\frac{1}{e^x}+1}\,dx$

$= \int \frac{1}{\frac{1+e^x}{e^x}}\,dx$

$= \int \frac{e^x}{1+e^x}\,dx = \ln|1+e^x|+c.$

أوجد التكاملات التالية

(1) $\int \frac{3}{x^2+1}\,dx = 3\tan^{-1}x + c$

(2) $\int \frac{x}{x^3+x}\,dx = \int \frac{x}{x(x^2+1)}\,dx = \int \frac{1}{x^2+1}\,dx = \tan^{-1}x + c$

(3) $\int \frac{1}{\sqrt{4-4x^2}}\,dx = \int \frac{1}{2\sqrt{1-x^2}}\,dx = \frac{1}{2}\sin^{-1}x + c$

(4) $\int \frac{5}{|x|\sqrt{x^2-1}}\,dx = 5\sec^{-1}x + c$

(5) $\int \frac{-1}{\sqrt{x^4-x^2}}\,dx = \int \frac{-1}{|x|\sqrt{x^2-1}}\,dx = -\sec^{-1}x + c$

او $= \csc^{-1}x + c$

(6) $\int \sqrt{(x-\frac{1}{x})^2+4}\,dx$

$= \int \sqrt{x^2-2+\frac{1}{x^2}+4}\,dx$

$= \int \sqrt{x^2+2+\frac{1}{x^2}}\,dx$

$= \int \sqrt{(x+\frac{1}{x})^2}\,dx = \int x+\frac{1}{x}\,dx$

$= \frac{1}{2}x^2 + \ln|x| + c$

$(x-\frac{1}{x})^2$

$= x^2 - 2x\cdot\frac{1}{x} + (\frac{1}{x})^2$

$= x^2 - 2 + \frac{1}{x^2}$

هذه الصيغة تعتمد على المتطابقات.

اوجد التكاملات التالية

(1) $\int \tan^2 x \ dx = \int \sec^2 x - 1 \ dx = \tan x - x + c$

(2) $\int \cos^2 x - \sin^2 x \ dx = \int \cos 2x \, dx = \frac{\sin 2x}{2} + c$

(3) $\int 2\sin x \cos x \ dx = \int \sin 2x \, dx = -\frac{\cos 2x}{2} + c$

★ (4) $\int \sin^2 x \ dx = \int \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)\, dx$

$= \frac{1}{2}\left(x - \frac{\sin 2x}{2}\right) + c$

(5) $\int \cos^2 3x \ dx = \int \frac{1}{2}(1 + \cos 6x)\, dx$

$= \frac{1}{2}\left(x + \frac{\sin 6x}{6}\right) + c$

(6) $\int \frac{1}{1+\cos 2x} \ dx = \int \frac{1}{2\cos^2 x} \, dx$

★ $\cos^2 x = \frac{1}{2}(1+\cos 2x)$

$2\cos^2 x = 1 + \cos 2x$

$= \frac{1}{2}\int \sec^2 x \, dx$

$= \frac{1}{2}\tan x + c$

(7) $\int \frac{1+\sin 2x}{\sin x + \cos x} \ dx = \int \frac{\sin^2 x + \cos^2 x + 2\sin x \cos x}{\sin x + \cos x} dx$

$= \int \frac{\sin^2 x + 2\sin x \cos x + \cos^2 x}{\sin x + \cos x} dx$

$= \int \frac{(\sin x + \cos x)^2}{\sin x + \cos x} dx = \int \sin x + \cos x \, dx = -\cos x + \sin x + c$

أوجد التكاملات التالية

(1) $\int \frac{\sin^2 x}{1-\cos x}\,dx = \int \frac{1-\cos^2 x}{1-\cos x}\,dx$

$= \int \frac{(1-\cancel{\cos x})(1+\cos x)}{1-\cancel{\cos x}}\,dx$

$= \int (1+\cos x)\,dx = x + \sin x + c$

(2) $\int \frac{1}{1+\sin x}\,dx \times \frac{1-\sin x}{1-\sin x}$

$= \int \frac{1-\sin x}{1-\sin^2 x}\,dx$

$= \int \frac{1-\sin x}{\cos^2 x}\,dx$

مرافق

$= \int \frac{1}{\cos^2 x} - \frac{\sin x}{\cos^2 x}\,dx$

$= \int \sec^2 x - \sec x \tan x\,dx$

$= \tan x - \sec x + c$

(3) $\int \sec x\,dx \times \frac{\sec x + \tan x}{\sec x + \tan x}$

حفظ لشكل
+ حفظ الطريقة.

$= \int \frac{\sec^2 x + \sec x \tan x}{\sec x + \tan x}\,dx$

$= \ln|\sec x + \tan x| + c$

(4) $\int \csc x\,dx \times \frac{\csc x - \cot x}{\csc x - \cot x}$

$= \int \frac{\csc^2 x - \csc x \cot x}{\csc x - \cot x}$

$= \ln|\csc x - \cot x| + c$

1) أوجد التكاملات التالية

★

$(a)\quad \int \frac{x+1}{x^2+1}\,dx = \int \frac{x}{x^2+1} + \frac{1}{x^2+1}\,dx$

$= \frac{1}{2}\ln|x^2+1| + \tan^{-1}x + c$

$(b)\quad \int \frac{2x+3}{x+7}\,dx$

يمكن كتابة الدالة النسبية $f(x)$ التي فيها درجة البسط اكبر من او تساوي درجة المقام على الشكل التالي

$f(x) =$ الناتج $+ \dfrac{\text{الباقي}}{\text{المقسوم عليه}}$

$$\begin{array}{r|l} & 2 \\ x+7 & 2x+3 \\ \ominus & 2x+14 \\ \hline & -11 \end{array}$$

$= \int 2 + \frac{-11}{x+7}\,dx$

$= 2x - 11\ln|x+7| + c.$

---

2) اوجد الدالة الاصلية $F(x)$ للدالة $f(x)$

$(a)\quad f(x) = 2x\cos x^2 =$

$\int 2x\cos x^2\,dx = \int \frac{d}{dx}(\sin x^2)\,dx = \sin x^2 + c$

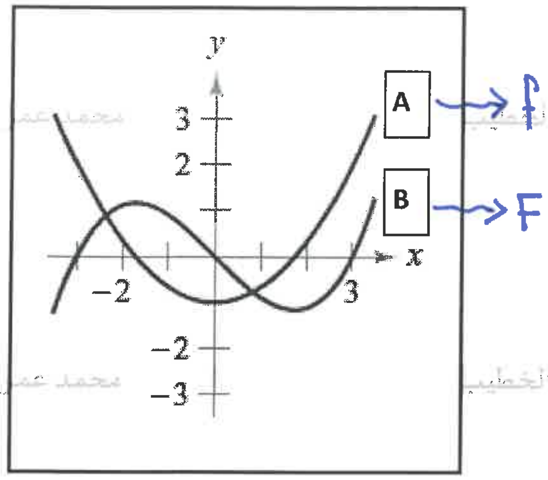
$(b)\quad f(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}\sin x + \sqrt{x}\cos x$

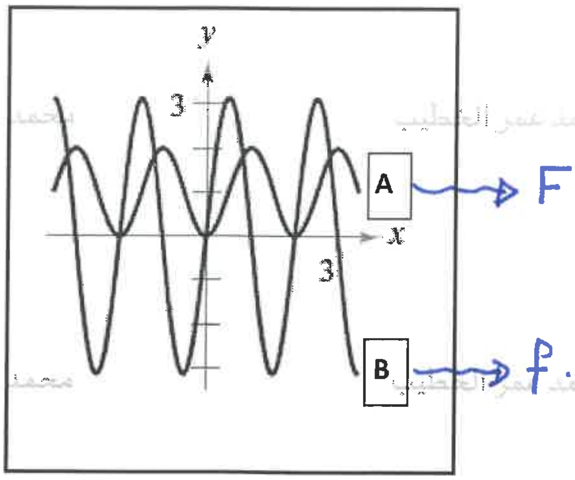
$\int \frac{1}{2\sqrt{x}}\sin x + \sqrt{x}\cos x\,dx$

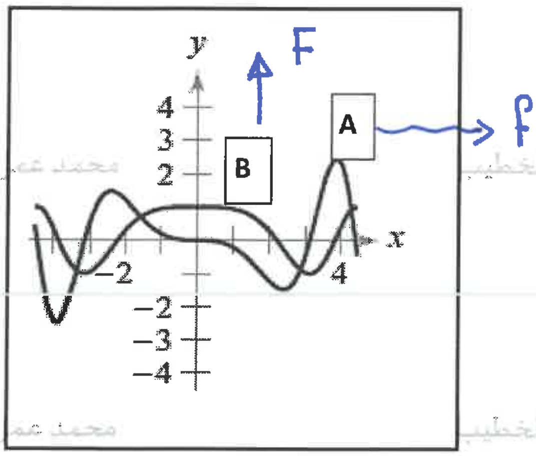
$= \int \left[\frac{d}{dx}(\sqrt{x}\sin x)\right]dx$

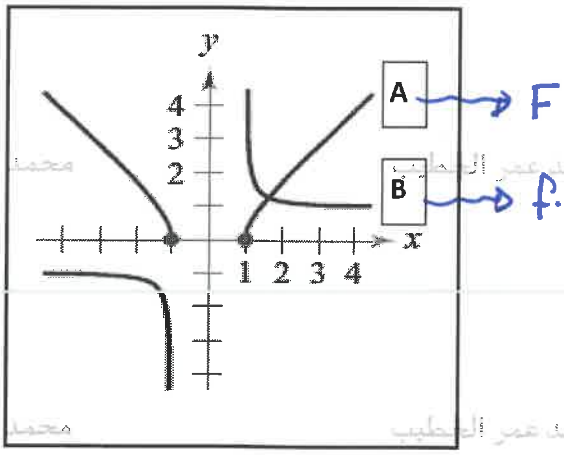
$= \sqrt{x}\sin x + c.$

عين الدالة f وعين الدالة الاصلية لها في كل شكل من الأشكال التالية









اوجد كل الدوال $f(x)$ التي تحقق

(1) $f'(x) = 3x^2 - e^x$

$$f(x) = \int 3x^2 - e^x \, dx = x^3 - e^x + c.$$

(2) $f'(x) = \sqrt{x} + \sin 2x$

$$f(x) = \int \sqrt{x} + \sin 2x \, dx = \int x^{1/2} + \sin 2x \, dx$$

$$= \frac{2}{3} x^{3/2} - \frac{\cos 2x}{2} + c.$$

(3) $f'(x) = \sec^2 x - \csc^2 x$

$$f(x) = \int \sec^2 x - \csc^2 x \, dx$$

$$= \tan x + \cot x + c.$$

(4) $f''(x) = 12x + \cos 3x$

$$f'(x) = \int 12x + \cos 3x \, dx$$

$$= 6x^2 + \frac{1}{3} \sin 3x + c_1$$

$$f(x) = \int 6x^2 + \frac{1}{3} \sin 3x + c_1 \, dx$$

$$= 2x^3 - \frac{1}{9} \cos 3x + c_1 x + c_2.$$

أوجد الدالة $f(x)$ التي تحقق الشروط التالية

(1) $f'(x)=3e^x+2x \qquad f(0)=4$

$x \uparrow \quad f \uparrow$

$f(x)=\int 3e^x+2x\ dx$

$=3e^x+x^2+c$

لايجاد قيمة c نستخدم الشرط.

$f(0)=4$

$3e^0+0^2+c=4 \Rightarrow c=1$

$\therefore f(x)=3e^x+x^2+1$

---

(2) $f'(x)=\frac{1}{x^2}+2x \qquad f(1)=4$

$f(x)=\int \frac{1}{x^2}+2x\ dx$

$=\int x^{-2}+2x\ dx$

$=\frac{x^{-1}}{-1}+x^2+c$

$f(x)=\frac{-1}{x}+x^2+c$

$f(1)=4$ الشرط

$-1+1+c=4 \Rightarrow c=4$

$f(x)=\frac{-1}{x}+x^2+4$

---

(3) $f'(x)=\sec^2 x \qquad f(\frac{\pi}{4})=-1$

$f(x)=\int \sec^2 x\ dx$

$=\tan x+c$

$f(\frac{\pi}{4})=-1$

$\tan\frac{\pi}{4}+c=-1$

$1+c=-1 \Rightarrow c=-2$

$f(x)=\tan x-2$

---

(4) $f'(x)=\cos x+\sin x \qquad f(\pi)=1$

$f(x)=\int \cos x+\sin x\ dx$

$=\sin x-\cos x+c$

$f(\pi)=1$

$\sin\pi-\cos\pi+c=1$

$1+c=1 \Rightarrow c=0$

$f(x)=\sin x-\cos x$

اوجد الدالة $f(x)$ التي تحقق الشروط التالية

(1) $f''(x) = 12x^2 + 4e^{2x}$ $\quad f(0) = 3 \quad , \quad f'(0) = 2$

$f'(x) = \int 12x^2 + 4e^{2x}\, dx$

$= 4x^3 + 2e^{2x} + c_1$.

نستخدم الشرط $f'(0) = 2$

$0 + 2 + c_1 = 2$

$\Rightarrow c_1 = 0$

$f'(x) = 4x^3 + 2e^{2x}$.

$f(x) = \int 4x^3 + 2e^{2x}\, dx$

$= x^4 + e^{2x} + c_2$

$f(0) = 3$

$0 + 1 + c_2 = 3 \rightarrow c_2 = 2$

$\therefore f(x) = x^4 + e^{2x} + 2$.

(2) $f''(t) = 2t + 2$ $\quad f(0) = 2 \quad , \quad f(3) = 2$

$f'(t) = \int 2t + 2\, dt$

$= t^2 + 2t + c_1$.

لا نستطيع استخدام الشرط الآن

$f(t) = \int t^2 + 2t + c_1\, dt$

$= \frac{1}{3}t^3 + t^2 + c_1 t + c_2$.

$f(0) = 2$

$c_2 = 2$

$f(3) = 2$

$9 + 9 + 3c_1 + 2 = 2$

$\Rightarrow c_1 = -6$

$f(t) = \frac{1}{3}t^3 + t^2 - 6t + 2$

(3) $f'''(x) = \frac{6}{x^3}$ $\quad f(1) = 1 \quad , \quad f'(1) = 3 \quad f''(1) = 2$

$f''(x) = \int \frac{6}{x^3}\, dx = \int 6x^{-3}\, dx$

$= \frac{6x^{-2}}{-2} + c_1. = -3x^{-2} + c_1$.

$f''(1) = 2$

$-3 + c_1 = 2 \rightarrow c_1 = 5$

$f''(x) = -3x^{-2} + 5$

$f'(x) = \int -3x^{-2} + 5\, dx$

$= 3x^{-1} + 5x + c_2$

$f'(1) = 3$

$3 + 5 + c_2 = 3 \Rightarrow c_2 = -5$

$f'(x) = 3x^{-1} + 5x - 5$

$f(x) = \int 3x^{-1} + 5x - 5\, dx$

$= 3\ln|x| + 5\frac{x^2}{2} - 5x + c_3$

$f(1) = 1 \Rightarrow c_3 = 7/2$

$f(x) = 3\ln|x| + 5\frac{x^2}{2} - 5x + \frac{7}{2}$.

التطبيقات

الدالة المكانية ⟸ دالة السرعة المتجهة ⟸ دالة التسارع

بالاشتقاق

الدالة المكانية ⟹ دالة السرعة المتجهة ⟹ دالة التسارع

بالتكامل

(1) حدد الدالة المكانية $s(t)$ لدالة السرعة المتجهة $v(t)=10t+5$ حيث $s(0)=10$

$S(t)=\int v(t)\,dt$

$=\int 10t+5\ dt$

$=5t^2+5t+c.$

$S(0)=10$

$\Rightarrow c=10$

$S(t)=5t^2+5t+10$

(2) حدد الدالة المكانية $s(t)$ لدالة السرعة المتجهة $v(t)=3e^{-t}-2$ حيث $s(0)=0$

$S(t)=\int 3e^{-t}-2\ dt$

$=-3e^{-t}-2t+c$

$S(0)=0$

$-3+c=0 \Rightarrow c=3.$

$S(t)=-3e^{-t}-2t+3.$

(3) اوجد $s(5)$ لدالة التسارع $a(t)=12t^2+4$ حيث $s(0)=1, v(0)=4$

$v(t)=\int a(t)\,dt$

$=\int 12t^2+4\ dt$

$=4t^3+4t+c_1.$

$v(0)=4. \Rightarrow c_1=4.$

$v(t)=4t^3+4t+4.$

$S(t)=\int 4t^3+4t+4\ dt$

$=t^4+2t^2+4t+c_2$

$S(0)=1 \Rightarrow c_2=1$

$S(t)=t^4+2t^2+4t+1$

$S(5)=696\ m.$

(1) سقط جسم من ارتفاع برج خليفة عن ارتفاع $828m$ اذا كان تسارع الجسم بعد t ثانية يعطى بالعلاقة $a(t)=-9.8\ m/s^2$ و السرعة الابتدائية للجسم هي $-30m/s$ ، اوجد الدالة المكانية للجسم ثم اوجد ارتفاع الجسم عن الارض بعد 10 ثواني من بدء الحركة.

$a(t)=-9.8$, $v(0)=30$, $S(0)=828$.

$v(t)=\int -9.8\,dt$

$=-9.8t+c_1$.

$v(0)=30 \Rightarrow c_1=30$.

$v(t)=-9.8t+30$.

$s(t)=\int -9.8t+30\,dt$.

$=-4.9t^2+30t+c_2$

$S(0)=828 \Rightarrow c_2=828$

$S(t)=-4.9t^2+30t+828$

$S(10)=38\ m$.

---

(2) اذا كانت سيارة تتسارع من $20m/s$ الى $60m/s$ في 4 ثواني ، اوجد المسافة التي تقطعها السيارة خلال اول 5 ثواني ، علماً بان التسارع ثابت وبداية الحركة عند الموضع صفر.

$v(0)=20$, $v(4)=60$, $S(0)=0$

$v(t) \to S'(t)$, $\frac{\Delta S}{\Delta t}$

$a(t) \to v'(t)$, $\frac{\Delta v}{\Delta t}$.

$a(t)=\frac{\Delta v}{\Delta t}$.

$=\frac{60-20}{4-0}=10$

$v(t)=\int 10\,dt$

$=10t+c_1$

$v(0)=20 \Rightarrow c_1=20$

$v(t)=10t+20$

$S(t)=\int 10t+20\,dt$

$=5t^2+20t+c_2$

$S(0)=0 \Rightarrow c_2=0$

$S(t)=5t^2+20t$.

$S(5)=225\ m$.

☆ (3) اذا كانت دالة السرعة المتجهة لجسم يتحرك على خط مستقيم يعطى بالعلاقة $v(t)=-s(t)$ حيث $s(0)=e$ فاوجد دالة الوضع $s(t)$

$v(t)=-S(t)$

$S'(t)=-S(t)$

بالقسمة على $S(t)$

$\frac{S'(t)}{S(t)}=-1$

$\int \frac{S'(t)}{S(t)}\,dt=\int -1\,dt$

$\ln|S(t)|=-t+c$

$S(t)=e^{-t+c}$.

$S(0)=e$

$e^c=e \to c=1$

$\therefore S(t)=e^{-t+1}$

(1) اوجد الدالة $f(x)$ التي لها ميل المماس عند اي نقطة $m=2x$ و تمر بالنقطة $(2,5)$

$f'(x) = m = 2x$

$f(x) = \int 2x \, dx$

$= x^2 + c$

$f(2) = 5$

$4 + c = 5 \Rightarrow c = 1$

$\therefore f(x) = x^2 + 1$

---

(2) اوجد الدالة $f(x)$ التي تمر بالنقطة $(0,1)$ ولها مماس افقي عند نفس النقطة حيث $f''(x) = 6x$

$f''(x) = 6x \;,\; f'(0) = 0 \;,\; f(0) = 1$

$f'(x) = \int 6x \, dx$

$= 3x^2 + c_1$

$f'(0) = 0 \Rightarrow c_1 = 0$

$f'(x) = 3x^2$

$f(x) = \int 3x^2 \, dx$

$= x^3 + c_2$

$f(0) = 1 \longrightarrow c_2 = 1$

$f(x) = x^3 + 1$

---

(3) يكلف طباعة كتاب واحد 1600 درهم وتعطى التكلفة الحدية بالعلاقة $c'(x) = \dfrac{200}{\sqrt{x}}$

لطباعة x نسخة من نفس النوع ، اوجد تكلفة طباعة 400 كتاب.

$c'(x) = \dfrac{200}{\sqrt{x}} \;,\; c(1) = 1600$

$c(x) = \int \dfrac{200}{\sqrt{x}} \, dx$

$= \int 200 \, x^{-1/2} \, dx$

$= 400 \, x^{1/2} + c$

$= 400\sqrt{x} + c$

$c(1) = 1600$

$400 + c = 1600$

$c = 1200$

$c(x) = 400\sqrt{x} + 1200$

$c(400) = 9200$

درهم

اذا كان معدل تغير كمية الماء في خزان ماء هو $f(t)=4t-t^2$ لتر في الدقيقة وكمية الماء بالخزان تساوي 288 لتر عند الزمن صفر

(أ) اكتب المعادلة التي تنمذج كمية الماء $v(t)$ بالخزان عند الزمن t مع الشروط

$$v'(t)=4t-t^2 \quad , \quad v(0)=288$$

(ب) اوجد كمية الماء بالخزان بعد 9 دقائق.

$$v(t)=\int v'(t)\,dt$$
$$=\int 4t-t^2\,dt$$
$$=2t^2-\frac{1}{3}t^3+c.$$
$$v(0)=288 \Rightarrow c=288$$
$$\Rightarrow v(t)=2t^2-\frac{1}{3}t^3+288$$

(ج) حدد الزمن الذي يصبح فيه الخزان فارغ.

$$v(t)=0$$
$$2t^2-\frac{1}{3}t^3+288=0$$
$$t^3-6t^2-864=0 \Rightarrow t=12.$$

(د) حدد الفترة التي يتزايد فيها مستوى الماء ومتى يتناقص

$$v'(t)=4t-t^2$$
$$v'(t)=0$$
$$\Rightarrow t=0 \ , \ t=4.$$

إشارة v': 0 + + + 4 − − − 12

يتزايد $(0,4)$ دقيقة

يتناقص $(4,12)$ دقيقة

ويبلغ الخزان قمته العظمى عند $t=4$.

قبل البدأ بالتكامل ...اسئل نفسك

1) هل الدالة التي نريد ايجاد تكاملها هي ناتج جمع وطرح حدود وكل حدد قابل للتكامل

2) هل الدالة التي نريد ايجاد تكاملها هي ناتج ضرب او قسمة ويمكن تحويلها ال جمع او طرح حدود وكل حدد قابل للتكامل

3) هل الدالة التي نريد ايجاد تكاملها هي حاصل ضرب او قسمة دالتين ،احدى الدالتين او جزء منها يساوي ثابت في مشتقة الدالة الاخرى

يعتبر التكامل بالتعويض العملية العكسية للاشتقاق باستخدام قاعدة السلسلة

ويمكن استخدام هذه القاعدة

$$\int f(g(x))\, g'(x)\, dx = f(g(x)) + c$$

غالباً يستخدم التكامل بالتعويض عندما نريد ايجاد تكامل حاصل ضرب او قسمة دالتين ، احدى الدالتين او جزء منها يساوي ثابت في مشتقة الدالة الاخرى

ويكون التعويض عادة (1) ما بداخل القوس (2) ما تحت الجذر (3) الزاوية (4) الأس

ويعتبر هو الخيار الاقوى في التكامل

اوجد التكاملات التالية

(1) $\int (2x+1)^5\, dx \quad = \dfrac{(2x+1)^6}{(2)(6)} + c = \dfrac{1}{12}(2x+1)^6 + c$

الكل ← مباشر.
لدينا داله قوى خطية

(2) $\int x^2 (x^3+1)^5\, dx$

الفرض (التعويض)

① $u = x^3 + 1$

$\dfrac{du}{dx} = 3x^2$

$\dfrac{du}{3x^2} = dx$

$= \int \cancel{x^2}\, u^5 \dfrac{du}{3\cancel{x^2}}$

$= \dfrac{1}{3} \int u^5\, du$

$= \dfrac{1}{3} \dfrac{u^6}{6} + c$

استرجاع الفرض

$= \dfrac{1}{18} (x^3+1)^6 + c$

اوجد التكاملات التالية

(1) $\int e^x \sqrt{e^x+1}\, dx$

$u = e^x + 1$

$\frac{du}{dx} = e^x$

$\frac{du}{e^x} = dx$

$= \int \cancel{e^x} \sqrt{u} \frac{du}{\cancel{e^x}}$

$= \int u^{1/2} du = \frac{2}{3} u^{3/2} + c = \frac{2}{3} (e^x+1)^{3/2} + c$

---

(2) $\int \frac{x^3}{\sqrt{4-x^4}}\, dx = \int x^3 (4-x^4)^{-1/2} dx$

$u = 4 - x^4$

$\frac{du}{dx} = -4x^3$

$\frac{du}{-4x^3} = dx$

$= \int \cancel{x^3}\, u^{-1/2} \frac{du}{-4\cancel{x^3}}$

$= \frac{-1}{4} \int u^{-1/2} du$

$= \frac{-1}{4}\, 2u^{1/2} + c = \frac{-1}{2} (4-x)^{1/2} + c$

---

(3) $\int \frac{1}{\sqrt{x}(1+\sqrt{x})}\, dx$

$u = 1 + \sqrt{x}$

$\frac{du}{dy} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

$2\sqrt{x}\, du = dx$

$= \int \frac{1}{\sqrt{x}\;\; u} 2\sqrt{x}\, du$

$= 2\int \frac{1}{u} du = 2 \ln|u| + c$

$= 2 \ln|1+\sqrt{x}| + c$

---

(4) $\int x e^{-x^2/2}\, dx$

$u = \frac{-x^2}{2} = \frac{-1}{2} x^2$

$\frac{du}{dx} = -x$

$\frac{du}{-x} = dx$

$= \int \cancel{x}\, e^u \frac{du}{-x}$

$= -\int e^u du$

$= -e^u + c$

$= -e^{-x^2/2} + c$

اوجد التكاملات التالية

(1) $\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx$

$u = \sqrt{x}$

$\frac{du}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

$2\sqrt{x}\,du = dx.$

$= \int \frac{e^{u}}{\cancel{\sqrt{x}}}\, 2\cancel{\sqrt{x}}\, du$

$= 2\int e^{u}\,du = 2e^{u} + c$

$= 2e^{\sqrt{x}} + c.$

(2) $\int \frac{\sqrt{\ln x}}{x}\,dx = \int \frac{\sqrt{u}}{x}\cdot x\,du$

$u = \ln x$

$\frac{du}{dx} = \frac{1}{x}$

$x\,du = dx$

$= \int u^{1/2}\,du$

$= \frac{2}{3}u^{3/2} + c = \frac{2}{3}(\ln x)^{3/2} + c$

(3) $\int \frac{1}{x\ln\sqrt{x}}\,dx = \int \frac{1}{x\ln x^{1/2}}\,dx = \int \frac{1}{\frac{1}{2}x\ln x}\,dx.$

$= \int 2\frac{1}{x\ln x}\,dx$

$u = \ln x$

$\frac{du}{dx} = \frac{1}{x}$

$x\,du = dx$

$= \int 2\frac{1}{\cancel{x}\,u}\,\cancel{x}\,du = 2\ln|u| + c$

$= 2\ln|\ln x| + c.$

(4) $\int (x-1)\sqrt{x^2-2x+2}\,dx$

$u = x^2 - 2x + 2$

$\frac{du}{dx} = 2x - 2$

$\frac{du}{2x-2} = dx$

$= \int (x-1)\sqrt{u}\,\frac{du}{2x-2}$

$= \int \cancel{(x-1)}\sqrt{u}\,\frac{du}{2\cancel{(x-1)}}$

$= \frac{1}{2}\int u^{1/2}\,du = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}u^{3/2} + c = \frac{1}{3}(x^2-2x+2)^{3/2} + c.$

اوجد التكاملات التالية

(1) $\int e^{\ln x}(x^2-1)^3\,dx$ $= \int x(x^2-1)^3\,dx$

$U = x^2-1$

$\frac{du}{dx} = 2x$

$\frac{du}{2x} = dx$

$= \int x\, U^3 \frac{du}{2x}$

$= \frac{1}{2}\int U^3\,du = \frac{1}{2}\,\frac{U^4}{4} + c$

$= \frac{1}{8}(x^2-1)^4 + c.$

(2) $\int e^{\tan x + 2\ln \sec x}\,dx$ $= \int e^{\tan x}\cdot e^{2\ln \sec x}\,dx$

$= \int e^{\tan x}\cdot e^{\ln \sec^2 x}\,dx$

$= \int e^{\tan x}\cdot \sec^2 x\,dx$

$U = \tan x.$

$\frac{du}{dx} = \sec^2 x$

$\frac{du}{\sec^2 x} = dx.$

$= \int e^{U}\cdot \cancel{\sec^2 x}\,\frac{du}{\cancel{\sec^2 x}}$

$= \int e^{U}\,du = e^{U} + c = e^{\tan x} + c.$

(3) $\int \frac{e^{\cot x}}{1-\cos^2 x}\,dx$

$= \int \frac{e^{\cot x}}{\sin^2 x}\,dx$

$= \int \csc^2 x\, e^{\cot x}\,dx$

$U = \cot x.$

$\frac{du}{dx} = -\csc^2 x.$

$\frac{du}{-\csc^2 x} = dx.$

$= \int \cancel{\csc^2 x}\, e^{U}\,\frac{du}{-\cancel{\csc^2 x}}$

$= -\int e^{U}\,du$

$= -e^{U} + c = -e^{\cot x} + c.$

اوجد التكاملات التالية

(1) $\int \frac{\cot x}{\ln \sin x}\, dx$

$u = \ln \sin x$

$\frac{du}{dx} = \frac{\cos x}{\sin x}$

$\frac{du}{dx} = \cot x$

$\frac{du}{\cot x} = dx$

$= \int \frac{\cot x}{u} \frac{du}{\cot x}$

$= \int \frac{1}{u}\, du$

$= \ln|u| + c$

$= \ln|\ln \sin x| + c$

---

(2) $\int \sec x\, dx \times \frac{\sec x + \tan x}{\sec x + \tan x}$

ونكمل

$u = \sec x + \tan x$

$= \int \frac{\sec^2 x + \sec x \tan x}{\sec x + \tan x}\, dx$

$= \ln|\sec x + \tan x| + c$

بدون تعويض.

---

(3) $\int \csc x\, dx \times \frac{\csc x - \cot x}{\csc x - \cot x}$

$= \int \frac{\csc^2 x - \csc x \cot x}{\csc x - \cot x}\, dx$

$= \ln|\csc x - \cot x| + c$

اوجد التكاملات التالية

(1) $\int x\cos x^2\, dx$

$u = x^2$

$\frac{du}{dx} = 2x$

$\frac{du}{2x} = dx$

$= \int \cancel{x} \cos u \frac{du}{2\cancel{x}}$

$= \frac{1}{2}\int \cos u\, du = \frac{1}{2}\sin u + c = \frac{1}{2}\sin x^2 + c.$

(2) $\int \frac{\cos(\ln x)}{x}\, dx$

$u = \ln x$

$\frac{du}{dx} = \frac{1}{x}$

$x\, du = dx$

$= \int \frac{\cos u}{\cancel{x}} \cancel{x}\, du$

$= \int \cos u\, du$

$= \sin u + c = \sin(\ln x) + c.$

(3) $\int x^2 \sec^2 x^3\, dx$

$u = x^3$

$\frac{du}{dx} = 3x^2$

$\frac{du}{3x^2} = dx$

$= \int \cancel{x^2} \sec^2 u \frac{du}{3\cancel{x^2}}$

$= \frac{1}{3}\int \sec^2 u\, du$

$= \frac{1}{3}\tan u + c = \frac{1}{3}\tan x^3 + c$

(4) $\int e^x \cos e^{x+1}\, dx$

$u = e^{x+1}$

$\frac{du}{dx} = e^{x+1}$

$\frac{du}{e^{x+1}} = dx.$

$= \int e^x \cos u \frac{du}{e^{x+1}}$

$= \int \cancel{e^x} \cos u \cdot \frac{du}{\cancel{e^x} \cdot e^1}$

$= \frac{1}{e}\int \cos u\, du = \frac{1}{e}\sin u + c = \frac{1}{e}\sin e^{x+1} + c.$

اوجد التكاملات التالية

(1) $\int \sin x \cos x \, dx$

وحكم $\cos x$. $\quad U = \sin x$

$= \int U \cos x \frac{du}{\cos x}$ $\quad \frac{du}{dx} = \cos x$

$= \int U \, du$ $\quad \frac{du}{\cos x} = dx$

$= \frac{U^2}{2} + c = \frac{1}{2} \sin^2 x + c.$

---

(2) $\int \cos x \sin^3 x \, dx$

$U = \cos x$ و أصعب $\quad U = \sin x$

$= \int \cancel{\cos x} \, U^3 \frac{du}{\cancel{\cos x}}$ $\quad \frac{du}{dx} = \cos x.$

$= \int U^3 du = \frac{1}{4} U^4 + c = \frac{1}{4} \sin^4 x + c.$ $\quad \frac{du}{\cos x} = dx$

---

(3) $\int \sin 2x \cos x \, dx$

توحيد الزاوية

$\int 2 \sin x \cos x \cos x dx$

$= \int 2 \sin x \cos^2 x \, dx$ $\quad U = \cos x$

$= 2 \int \sin x \, U^2 \frac{du}{-\sin x}$ $\quad \frac{du}{dx} = -\sin x$

$= -2 \int U^2 du = -2 \frac{U^3}{3} + c = -\frac{2}{3} \cos^3 x + c$ $\quad \frac{du}{-\sin x} = dx$

---

(4) $\int \sec^2 x \sqrt{\tan x} \; dx$

$U = \tan x$

$= \int \cancel{\sec^2 x} \sqrt{U} \frac{du}{\cancel{\sec^2 x}}$ $\quad \frac{du}{dx} = \sec^2 x$

$= \int U^{1/2} du$ $\quad \frac{du}{\sec^2 x} = dx$

$= \frac{2}{3} U^{3/2} + c$

$= \frac{2}{3} \tan^{3/2} x + c.$

اوجد التكاملات التالية

(1) $\int \frac{(\sin x+1)^3}{\sec x}\,dx = \int \cos x(\sin x+1)^3\,dx$

$U = \sin x+1$

$\frac{du}{dx} = \cos x.$

$\frac{du}{\cos x} = dx$

$= \int \cancel{\cos x}\; U^3 \frac{du}{\cancel{\cos x}}$

$= \int U^3\,du$

$= \frac{U^4}{4} + c = \frac{1}{4}(\sin x+1)^4 + c.$

---

(2) $\int \sqrt{\tan x}(\sec x \tan x)^2\,dx = \int \tan^{1/2} x \sec^2 x \tan^2 x\,dx$

$= \int \sec^2 x \tan^{5/2} x.\,dx$

$U = \tan x.$

$\frac{du}{dx} = \sec^2 x.$

$\frac{du}{\sec^2 x} = dx$

$= \int \sec^2 x \; U^{5/2} \frac{du}{\sec^2 x}$

$= \int U^{5/2}\,du = \frac{2}{7} U^{7/2} + C$

$= \frac{2}{7} \tan^{7/2} x + c.$

---

(3) $\int \sin 3x \cos^5 3x\,dx$

$U = \cos 3x.$

$\frac{du}{dx} = -\sin 3x \cdot 3$

$\frac{du}{-3\sin 3x} = dx.$

$= \int \sin 3x \; U^5 \frac{du}{-3\sin 3x}$

$= \int \frac{-1}{3} U^5\,du$

$= \frac{-1}{3}\frac{U^6}{6} + c$

$= \frac{-1}{18}\cos^6 3x + c.$

اوجد التكاملات التالية

(1) $\int \frac{(\tan^{-1} x)^2}{x^2+1}\,dx$

$u = \tan^{-1} x$

$\frac{du}{dx} = \frac{1}{x^2+1}$

$(x^2+1)\,du = dx$

$= \int \frac{u^2}{\cancel{x^2+1}} \cancel{(x^2+1)}\,du$

$= \int u^2\,du$

$= \frac{1}{3}u^3 + c = \frac{1}{3}(\tan^{-1} x)^3 + c.$

---

(2) $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}\,\sin^{-1} x}\,dx$

$u = \sin^{-1} x$

$\frac{du}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$\sqrt{1-x^2}\,du = dx.$

$= \int \frac{1}{\cancel{\sqrt{1-x^2}} \cdot u} \cancel{\sqrt{1-x^2}}\,du$

$= \int \frac{1}{u}\,du$

$= \ln|u| + c = \ln|\sin^{-1} x| + c.$

---

(3) $\int \frac{\sec^{-1} 2x}{|x|\sqrt{4x^2-1}}\,dx$

$u = \sec^{-1} 2x$

$\frac{du}{dx} = \frac{\cdot \cancel{2}}{|\cancel{2}x|\sqrt{(2x)^2-1}}$

$|x|\sqrt{4x^2-1}\,du = dx$

$= \int \frac{u}{\cancel{|x|\sqrt{4x^2-1}}} \cdot \cancel{|x|\sqrt{4x^2-1}}\,du$

$= \int u\,du$

$= \frac{u^2}{2} + c = \frac{1}{2}(\sec^{-1} 2x)^2 + c$

اوجد التكاملات التالية

(1) $\int \frac{1}{x^2+4}\,dx$ $= \int \frac{1}{4\left(\frac{x^2}{4}+1\right)}\,dx = \frac{1}{4}\int \frac{1}{\left(\frac{x}{2}\right)^2+1}\,dx$

$= \frac{1}{4}\int \frac{1}{u^2+1}\cdot 2\,du$

$= \frac{1}{2}\int \frac{1}{u^2+1}\,du = \frac{1}{2}\tan^{-1}u + c = \frac{1}{2}\tan^{-1}\left(\frac{x}{2}\right) + c.$

$u = \frac{x}{2} = \frac{1}{2}x.$

$\frac{du}{dx} = \frac{1}{2}$

$2\,du = dx.$

---

(2) $\int \frac{e^x}{1+e^{2x}}\,dx$ $= \int \frac{e^x}{1+(e^x)^2}\,dx$

$= \int \frac{\cancel{e^x}}{1+u^2}\,\frac{du}{\cancel{e^x}}$

$= \int \frac{1}{1+u^2}\,du = \tan^{-1}u + c = \tan^{-1}e^x + c.$

$u = e^x$

$\frac{du}{dx} = e^x$

$\frac{du}{e^x} = dx$

---

(3) $\int \frac{\cos x}{1+\sin^2 x}\,dx$

$= \int \frac{\cancel{\cos x}}{1+u^2}\,\frac{du}{\cancel{\cos x}}$

$= \tan^{-1}u + c = \tan^{-1}(\sin x) + c$

$u = \sin x$

$\frac{du}{dx} = \cos x.$

$\frac{du}{\cos x} = dx$

---

(4) $\int \frac{1}{|x|\sqrt{x^2-25}}\,dx$ $= \int \frac{1}{|x|\,5\sqrt{\frac{x^2}{25}-1}}\,dx$

$= \frac{1}{5}\int \frac{1}{|x|\sqrt{\left(\frac{x}{5}\right)^2-1}}\,dx.$

$= \frac{1}{\cancel{5}}\int \frac{1}{|x|\sqrt{u^2-1}}\,\cancel{5}\,du$

$= \int \frac{1}{|5u|\sqrt{u^2-1}}\,du$

$= \frac{1}{5}\sec^{-1}u + c = \frac{1}{5}\sec^{-1}\left(\frac{x}{5}\right) + c$

$u = \frac{x}{5}$

$\frac{du}{dx} = \frac{1}{5}$

$5\,du = dx.$

الخطوة الرابع

$x = 5u.$

التخلص من x.

أوجد التكاملات التالية

* أكمال المربع * اضافه ، طرح 2 معامل $\left(\frac{x}{2}\right)^2$.

(1) $\int \frac{1}{x^2+4x+5}\,dx$

$x^2+4x+5 =$

$x^2+4x+4+5-4 =$

$= (x+2)^2+1.$

بالتعويض $u = x+2$

$\frac{du}{dx} = 1$

$du = dx.$

$= \int \frac{1}{(x+2)^2+1}\,dx.$

$= \int \frac{1}{u^2+1}\,du$

$= \tan^{-1} u + c = \tan^{-1}(x+2)+1.$

---

(2) $\int \frac{1}{x^2-8x+25}\,dx = \int \frac{1}{(x-4)^2+9}\,dx$

$x^2-8x+25 = x^2-8x+16+25-16$

$= (x-4)^2+9$

$u = \frac{x-2}{3}$

$\frac{du}{dx} = \frac{1}{3}$

$3\,du = dx$

$= \frac{1}{9}\int \frac{1}{\frac{(x-4)^2}{9}+1}\,dx. = \frac{1}{9}\int \frac{1}{\left(\frac{x-2}{3}\right)^2+1}\,dx.$

$= \frac{1}{9}\int \frac{1}{u^2+1}\,3\,du$

$= \frac{1}{3}\tan^{-1} u + c = \frac{1}{3}\tan^{-1}\left(\frac{x-2}{3}\right)+c.$

---

(3) $\int \frac{1}{\sqrt{6x-x^2}}\,dx$

$6x-x^2 = -(x^2-6x)$

$= -(x^2-6x+9-9)$

$= -((x-3)^2-9)$

$= 9-(x-3)^2$

$u = \frac{x-3}{3}$

$du = \frac{1}{3}dx$

$3\,du = dx$

$= \int \frac{1}{\sqrt{9-(x-3)^2}}\,dx$

$= \frac{1}{3}\int \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{x-3}{3}\right)^2}}\,dx$

$= \frac{1}{3}\int \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\,3\,du$

$= \sin^{-1} u + c = \sin^{-1}\left(\frac{x-3}{3}\right)+c.$

اوجد التكاملات التالية

(1) $\int \sqrt[3]{x^5 - x^3}\, dx = \int \sqrt[3]{x^3(x^2-1)}\, dx$

$u = x^2 - 1$

$\frac{du}{dx} = 2x$

$\frac{du}{x} = dx$

$= \int x \sqrt[3]{x^2-1}\, dx$

$= \int x \sqrt[3]{u}\, \frac{du}{2x}$

$= \frac{1}{2}\int u^{1/3}\, du = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} u^{4/3} + c = \frac{3}{8}(x^2-1)^{4/3} + c.$

★

(2) $\int \frac{x^2}{x^6+1}\, dx = \int \frac{x^2}{(x^3)^2+1}\, dx$

$u = x^3$

$\frac{du}{dx} = 3x^2$

$\frac{du}{3x^2} = dx$

$= \int \frac{\cancel{x^2}}{u^2+1}\, \frac{du}{3\cancel{x^2}}$

$= \frac{1}{3}\int \frac{1}{u^2+1}\, du$

$= \frac{1}{3} \tan^{-1} u + c = \frac{1}{3} \tan^{-1}(x^3) + c.$

---

(3) $\int \frac{1}{x\sqrt{x^4 - 1}}\, dx = \int \frac{1}{x\sqrt{(x^2)^2-1}}\, dx$

$u = x^2$

$\frac{du}{dx} = 2x$

$\frac{du}{2x} = dx$

$(4) \rightarrow x^2 = u.$

التخلص من x .

$= \int \frac{1}{x\sqrt{u^2-1}}\, \frac{du}{2x}$

$= \int \frac{1}{2x^2\sqrt{u^2-1}}\, du$

$= \int \frac{1}{2u\sqrt{u^2-1}}\, du$

$= \frac{1}{2} \sec^{-1} u + c = \frac{1}{2} \sec^{-1} x^2 + c.$

اوجد التكاملات التالية

(1) $\int x(x-2)^5\,dx$

$u = x-2$

$\frac{du}{dx} = 1$

$du = dx$

$x-2 = u$

$x = u+2$

$= \int x\, u^5\, du$

$= \int (u+2)\, u^5\, du$

$= \int u^6 + 2u^5\, du$

$= \frac{u^7}{7} + 2\frac{u^6}{6} + c = \frac{1}{7}(x-2)^7 + \frac{1}{3}(x-2)^6 + c.$

(2) $\int x^3\sqrt{x^2-1}\,dx$

$u = x^2 - 1$

$\frac{du}{dx} = 2x$

$\frac{du}{2x} = dx$

$x^2 = u+1$

$= \int \cancel{x^3}^{\,2} \sqrt{u}\, \frac{du}{2x}$

$= \frac{1}{2}\int x^2 \sqrt{u}\, du$

$= \frac{1}{2}\int (u+1)\sqrt{u}\, du =$

$= \frac{1}{2}\int (u^{3/2} + u^{1/2})\, du = \frac{1}{2}\left(\frac{2}{5}u^{5/2} + \frac{2}{3}u^{3/2}\right) + c = \frac{1}{5}(x^2-1)^{5/2} + \frac{1}{3}(x^2-1)^{3/2} + c.$

(3) $\int \sqrt{1+\sqrt{x}}\,dx$

$u = 1+\sqrt{x}$

$\frac{du}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

$2\sqrt{x}\, du = dx$

$\sqrt{x} = u-1$

$= \int \sqrt{u} \cdot 2\sqrt{x}\, du$

$= 2\int \sqrt{u} \cdot (u-1)\, du$

$= 2\int (u^{3/2} - u^{1/2})\, du$

$= 2\left[\frac{2}{5}u^{5/2} - \frac{2}{3}u^{3/2}\right] + c$

$= \frac{4}{5}(1+\sqrt{x})^{5/2} - \frac{4}{3}(1+\sqrt{x})^{3/2} + c.$

اوجد التكاملات التالية

(1) $\int \cos^3 x \sin^5 x \, dx$

$U = \sin x$

$\frac{du}{dx} = \cos x$

$\frac{du}{\cos x} = dx$

$\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$
$= 1 - U^2$

$= \int \cos^{\cancel{3}\,2} x \; U^5 \; \frac{du}{\cos x}$

$= \int \cos^2 x \; U^5 \, du$

$= \int (1-U^2) U^5 \, du$

$= \int U^5 - U^7 \, du = \frac{1}{6} U^6 - \frac{1}{8} U^8 + C = \frac{1}{6} \sin^6 x - \frac{1}{8} \sin^8 x + C.$

(2) $\int x \sec^2 x^2 \tan x^2 \, dx$

$U = \tan x^2$

$\frac{du}{du} = \sec^2 x^2 \cdot 2x$

$\frac{du}{dx} = 2x \sec^2 x^2$

$\frac{du}{2x \sec^2 x^2} = dx$

$= \int x \sec^2 x^2 \cdot \quad U \frac{du}{2x \sec^2 x^2}$

$= \frac{1}{2} \int U \, du$

$= \frac{1}{4} U^2 + C = \frac{1}{4} \tan^2 x^2 + C.$

(3) $\int \frac{3\sqrt{x}}{1+x^3} \, dx$

$U = \sqrt{x}$

$\frac{du}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

$2\sqrt{x} \, du = dx$

$x^3 = (U^2)^3 = U^6$

$= \int \frac{3U}{1+U^6} \cdot 2\sqrt{x} \, du$

$= \int \frac{3U}{1+(U^3)^2} \cdot 2U \, du$

$w = U^3$

$\frac{dw}{du} = 3U^2$

$\frac{dw}{3U^2} = du$

$= \int \frac{6U^2}{1+(U^3)^2} du = \int \frac{6\cancel{U^2}}{1+w^2} \frac{dw}{3\cancel{U^2}}$

$= 2\int \frac{1}{1+w^2} dw = 2\tan^{-1} w + C$

$= 2\tan^{-1} w^3 + C = 2\tan^{-1} (\sqrt{x})^3 + C.$

اوجد قيمة التكاملات المحدودة التالية

(1) $\int_0^1 \frac{x^3}{x^8+1}\,dx = \int_0^1 \frac{x^3}{(x^4)^2+1}\,dx$

$u = x^4$

$\frac{du}{dx} = 4x^3$

$\frac{du}{4x^3} = dx$

$= \int \frac{\cancel{x^3}}{u^2+1}\,\frac{du}{4\cancel{x^3}}$

$= \frac{1}{4}\int_0^1 \frac{1}{u^2+1}\,du \rightarrow$

تغير الحدود

$x=0 \rightarrow u=0$

$x=1 \rightarrow u=1$

$= \frac{1}{4}\tan^{-1}u\Big]_0^1$

(2) $\int_1^e \frac{1}{x+x\ln x}\,dx = \int_1^e \frac{1}{x(1+\ln x)}\,dx.$

$u = 1+\ln x$

$\frac{du}{dx} = \frac{1}{x}$

$x\,du = dx.$

$= \int \frac{1}{x\ u}\,x\,du$

$= \int_1^2 \frac{1}{u}\,du$

تغير الحدود

$x=1 \rightarrow u=1$

$x=e \rightarrow u=2$

$= \ln|u|\Big]_1^2 = \ln 2.$

(3) $\int_0^2 \frac{4x^3}{(x^2+1)^2}\,dx$

$u = x^2+1$

$\frac{du}{dx} = 2x.$

$\frac{du}{2x} = dx$

$\rightarrow x^2 = u-1$

$= \int \frac{4x^3}{u^2}\,\frac{du}{2x}$

$= \int 2\frac{x^2}{u^2}\,du$

$= 2\int_1^5 \frac{u-1}{u^2}\,du$

تغير حدود التكامل

$x=0 \rightarrow u=1$

$x=2 \rightarrow u=5.$

$= 2\int \frac{1}{u} - \frac{1}{u^2}\,du =$

$= 2\left[\ln u + \frac{1}{u}\right]_1^5 = 2\ln 5 - 8/5$

(1) اذا كان $\int_0^1 f(x)\,dx = -6$ ، اوجد

(a) $\int_0^3 f(\frac{x}{3})\,dx$

$= \int_0^1 f(u)\cdot 3du$

$= 3\int_0^1 f(u)du$

$= 3(-6)$

$= -18$

$u = \frac{x}{3}$

$\frac{du}{dx} = \frac{1}{3}$

$3du = dx$

$x = 0 \to u = 0$

$x = 3 \to u = 1$

(b) $\int_1^2 2f(x-1)\,dx$

$= \int_0^1 2f(u)du = 2\int_0^1 f(u)du$

$= 2(-6) = -12.$

$u = x-1$

$\frac{du}{dx} = 1$

$du = dx.$

$x = 1 \to u = 0$

$x = 2 \to u = 1$

---

(2) اذا كان $f(4) = -5, f(1) = 3$ ، فاوجد $\int_1^2 x\,f'(x^2)\,dx$

$\int_1^2 x f'(x^2)\,dx$

$= \int \cancel{x} f'(u) \frac{du}{2\cancel{x}}$

$= \int_1^4 \frac{1}{2} f'(u)\,du$

$= \frac{1}{2} f(u)\Big]_1^4 = \frac{1}{2}[f(4) - f(1)]$

$= \frac{1}{2}[-5-3] = -4$

$u = x^2$

$\frac{du}{dx} = 2x$

$\frac{du}{2x} = dx.$

$x = 1 \to u = 1$

$x = 2 \to u = 4.$

---

(3) اذا كان $f(0) = 1, f(1) = 9$ ، فاوجد $\int_0^1 3\sqrt{f(x)}\,f'(x)\,dx$

$= \int 3\sqrt{u}\cdot \cancel{f'(x)} \cdot \frac{du}{\cancel{f'(x)}}$

$= 3\int_1^9 u^{1/2}du$

$= 3\cdot\frac{2}{3} u^{3/2}\Big]_1^9 = 2(27-1)$

$= 52$

$u = f(x)$

$\frac{du}{dx} = f'(x)$

$\frac{du}{f'(x)} = dx$

تغير الحدود

$x = 0 \to u = 1$

$x = 1 \to u = 9$

(1) عند اجراء عملية لمريض يحقن بالبنج ، وبعد مضي t ساعة يكون تركيز المخدر في دم المريض هو

$$C(t) = \frac{3t}{(t^2+36)^{\frac{3}{2}}} \qquad mg/cm^2 \quad \text{حيث} \quad C(t)$$

اوجد متوسط تركيز المخدر في الدم اثناء الساعات الثمانية الاولى بعد حقن المريض

$$C_{ave} = \frac{1}{8}\int_0^8 \frac{3t}{(t^2+36)^{3/2}}\, dt$$

$$u = t^2+36$$

$$\frac{du}{dt} = 2t$$

$$\frac{du}{2t} = dt$$

$$x=0 \Rightarrow u=36$$

$$x=8 \Rightarrow u=10$$

$$= \frac{1}{8}\int \frac{3\cancel{t}}{u^{3/2}} \cdot \frac{du}{2\cancel{t}}$$

$$= \frac{3}{16}\int_{36}^{100} u^{-3/2}\, du$$

$$= \frac{3}{16}(-2)\, u^{-1/2}\Big]_{36}^{100} = \frac{1}{40}.$$

---

(2) رصدت محطة الارصاد الجوية درجة الحرارة C° في احدى المدن بعد منتصف الليل فتبين انه يمكن

نمذجتها بالعلاقة $\quad T(t) = 3 - \frac{1}{3}(t-5)^2 \quad C^\circ$

حيث t هو الوقت بعد منتصف الليل

اوجد متوسط درجة الحرارة في المدينة في الفترة من الساعة 8 صباحاً الى 5 مساءاً (الساعة 17)

$$T_{ave} = \frac{1}{9}\int_8^{17} 3 - \frac{1}{3}(t-5)^2\, dx.$$

$$= \frac{1}{9}\left(3x - \frac{1}{3}\frac{(t-5)^6}{6}\right)\Big]_8^{17}.$$

$$=$$

$$\simeq -18^\circ$$

اذا كانت $f(x)$ دالة متصلة على الفترة $[0,1]$ فاثبت ان

(1) $\int_0^1 f(1-x)\,dx = \int_0^1 f(x)\,dx$

$u = 1-x$

$\frac{du}{dx} = -1$

$-du = dx$

$x=0 \to u=1$

$x=1 \to u=0$

$\int_0^1 f(1-x)\,dx$

$= \int_1^0 -f(u)\,du$

$= \int_0^1 f(u)\,du = \int_0^1 f(x)\,dx$ #

(2) $\int_0^1 \frac{f(1-x)}{f(1-x)+f(x)}\,dx = \int_0^1 \frac{f(x)}{f(x)+f(1-x)}\,dx$

$u = 1-x$

$\frac{du}{dx} = -1$

$-du = dx$

$x = 1-u$

$x=0 \to u=1$

$x=1 \to x=0$

$\int_0^1 \frac{f(1-x)}{f(1-x)+f(x)}\,dx$

$= \int_1^0 \frac{f(u)}{f(u)+f(1-u)}(-du)$

$= \int_0^1 \frac{f(u)}{f(u)+f(1-u)}\,du = \int_0^1 \frac{f(x)}{f(x)+f(1-x)}\,dx$ #

(3) $\int_0^1 \frac{f(x)}{f(x)+f(1-x)}\,dx = \frac{1}{2}$

$$\int_0^1 \frac{f(x)}{f(x)+f(1-x)}\,dx = \int_0^1 \frac{\overbrace{f(x)+f(1-x)-f(1-x)}^{\text{اضافة وطرح}}}{f(x)+f(1-x)}\,dx$$

$$= \int_0^1 \frac{f(x)+f(1-x)}{f(x)+f(1-x)}\,dx - \int \frac{f(1-x)}{f(x)+f(1-x)}\,dx$$

$$= \int_0^1 1\,dx - \int_0^1 \frac{f(x)}{f(1-x)+f(x)}\,dx$$

من مطلوب 2

ننقل للطرف الثاني

$$2\int_0^1 \frac{f(x)}{f(x)+f(1-x)}\,dx = 1 \Rightarrow \int_0^1 \frac{f(x)}{f(x)+f(1-x)}\,dx = \frac{1}{2} \#$$

اذا كانت $f(x)$ دالة متصلة على الفترة $[0,a]$ فيمكن اثبات ان $\int_0^a \frac{f(x)}{f(x)+f(a-x)}\,dx = \frac{a}{2}$

استفد من العلاقة السابقة لتبين ان

تكمل الحل بأكثر من طريقة.

(1) $\int_0^{10} \frac{\sqrt{10-x}}{\sqrt{x}+\sqrt{10-x}}\,dx = 5$

$u = 10 - x$

$\frac{du}{dx} = -1$

$-du = dx$

$x = 0 \rightarrow u = 10$

$x = 10 \rightarrow u = 0$

$x = 10 - u$

$$= \int_{10}^{0} \frac{\sqrt{u}}{\sqrt{10-u}+\sqrt{u}} \, -du.$$

$$= \int_0^{10} \frac{\sqrt{u}}{\sqrt{u}+\sqrt{10-u}}\,du$$

$$= \frac{10}{2} = 5.$$

$f(u) = \sqrt{u}.$

$a = 10$

---

(2) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{\sin x + \cos x}\,dx = \frac{\pi}{4}$

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\sin x}{\sin x + \cos x}\,dx$$

$$= \int_0^{\pi/2} \frac{\sin x}{\sin x + \sin(\frac{\pi}{2} - x)}\,dx.$$

$f(x) = \sin x.$,

$a = \frac{\pi}{2}$

$$= \frac{\frac{\pi}{2}}{2}$$

$$= \frac{\pi}{4}.$$