الملف أوراق عمل الوحدة الثالثة التفاضل بدون حل

الصف الثاني عشر متقدم

2022/2023

الوحدة الثالثة
التفاضل

إعداد

د:حيدر عامر السعافين

تعريف المشتقة:

يسمى ميل المنحنى عند النقطة $x = a$ بمشتقة الدالة عند تلك النقطة ويرمز لها بالرمز $f'(a)$ حيث:

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

ويمكن استخدام التعريف البديل:

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

ومشتقة الدالة f هي الدالة f' حيث:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

تكون الدالة قابلة للاشتقاق عند النقطة اذا كانت النهاية موجودة

يجب ان تكون الدالة متصلة عند النقطة التي نبحث في اشتقاقها

ملاحظة:

مشتقة دالة عند نقطة.

= معدل التغير للدالة عند تلك النقطة.

= ميل المماس للدالة عند تلك النقطة.

= السرعة اللحظية المتجهة عند تلك النقطة.

رموز المشتقة $f'(x) = y' = \frac{dy}{dx} = \frac{df}{dx} = \frac{d}{dx} f(x)$

1) إذا كانت $f(x) = x^2 - 4x$ فاوجد $f^{/}(x)$ باستخدام تعريف المستقة او التعريف البديل .

2) إذا كانت $f(x) = \sqrt{2x+1}$ فاوجد $f^{/}(x)$ باستخدام تعريف المستقة .

3) إذا كانت $f(x) = \frac{2}{3x+1}$ فاوجد $f^{/}(x)$ باستخدام تعريف المستقة .

1) إذا كانت $f(x) = \sqrt[3]{x}sinx$ فاوجد $f^{/}(0)$ باستخدام تعريف المستقة.

2) إذا كانت $f(x) = cosx$ فاوجد $f^{/}(0)$ باستخدام تعريف المستقة.

3) إذا كان : $f^{/}(3) = 4$ فأوجد $\lim\limits_{x\to 0}\frac{2f(3) - 2f(3+h)}{h}$

4) إذا كان : $f^{/}(3) = 4$ فأوجد $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(3+h) - f(3)}{h[h - 0.5]}$

5) إذا كان : $f^{/}(2) = 3$ فأوجد $\lim\limits_{x\to 2}\frac{f(x) - f(2)}{\sqrt{x} - \sqrt{2}}$

2) يسقط جسم من ارتفاع برج ويحدد ارتفاعه عن الارض في اي زمن بالعلاقة $h(t) = 64 - 16t^2$

حيث t بالثواني و h بالقدم

أ) اوجد ارتفاع الجسيم بعد مرور 1 ثانية

ب) السرعة المتوسطة المتجهه اول ثانيتين

ت) اوجد السرعة المتجهه للجسيم بعد مرور 1 ثانية.

1) لتكن: $f(x) = x^2 - 4x$ أوجـــد :

أ) ميل منحنى الدالة $f(x)$ عند النقطة $(1,-3)$ باستخدام تعريف المشتقة

ب) معادلة المماس عند النقطة $(1,-2)$.

المشتقة من جهة واحدة:

تكون الدالة: $y = f(x)$ قابلة للاشتقاق عند النقطة a اذا كانت المشتقة على يمين النقطة a وهي $f'(a^+)$ والمشتقة على يسار النقطة a وهي $f'(a^-)$ متساويتان

اي ان : $f'(a^+) = f'(a^-)$

حيث:

$$f'(a^+) = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \lim_{h \to a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

$$f'(a^-) = \lim_{h \to 0^-} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \lim_{h \to a^-} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

إذا كانت:
$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & x \geq 1 \\ 2x & x < 1 \end{cases}$$

فاوجد $f'(1)$ باستخدام تعريف المشتقة

1) إذاا كانت $f(x) = x|x|$ فأوجد $f^{/}(0)$ باستخدام تعريف المشتقة

(2) إذا كانت: $f(x) = \begin{cases} 0 & x = 0 \\ x^3 \sin\frac{1}{x} & x \neq 0 \end{cases}$ فأوجد $f'(0)$ بإستخدام تعريف المشتقة.

(3) إذا كانت: $f(x) = \begin{cases} x^2 & x \geq 0 \\ 2x & x < 0 \end{cases}$ فاثبت بإستخدام تعريف المشتقة أن $f'(0)$

غير موجودة

1) إذا كانت f دالة قابلة للاشتقاق عند $x = a$ فأثبت أن .

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+ch)-f(a)}{h} = c\, f^{/}(a)$$

2) إذا كانت f دالة قابلة للاشتقاق عند $x = a \neq 0$ فأثبت أن .

$$\lim_{x\to a}\frac{[f(x)]^2-[f(a)]^2}{x^2-a^2} = \frac{1}{a} f(a)\, f^{/}(a)$$

3) إذا كانت f دالة قابلة للاشتقاق عند $x = a$ فأثبت أن .

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a-h)}{2h} = c\, f^{/}(a)$$

1) إذا كانت f دالة قابلة للاشتقاق على مجموعة الأعداد الحقيقية حيث :

$$f(x+h) = x^2h + 3xh^2 + f(x)$$

و h هو مقدار التغير في x فاوجد $f^{/}(3)$

2) اذا كانت: $f(x+y) = f(x) \times f(y)$

وكان $f(0) = f'(0) = 1$

فاثبت أن: $f(x) = f'(x)$ لجميع قيم x.

مساعدة

استخدم التعريف الأساسي للمشتقة

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

ثم التعريف البديل

$$f'(0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h) - f(0)}{h-0}$$

الاتصال والاشتقاق

1) إذا كانت الدالة f قابلة للاشتقاق عند نقطة $x=a$ فأنها تكون متصلة عند النقطة a

2) إذا كانت الدالة f غير متصلة عند $x=b$ فأن الدالة تكون غير قابلة للاشتقاق عند النقطة $x=b$

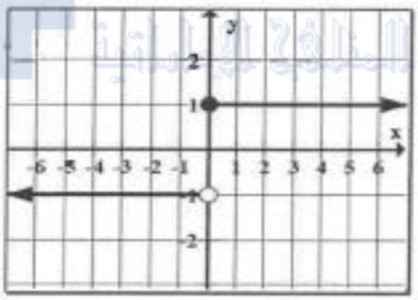
3) إذا كانت الدالة f متصلة عند النقطة $x=c$ فأنه توجد حالتان :

الأولى الدالة تكون غير قابلة للاشتقاق عند النقطة $x=c$

الثانية الدالة قابلة للاشتقاق عند $x=c$

الحالات التي تكون مشتقة الداله $f(x)$ غير موجودة عند نقطة

مـــــتى تكـــــون $f'(a)$ غير موجـــــودة



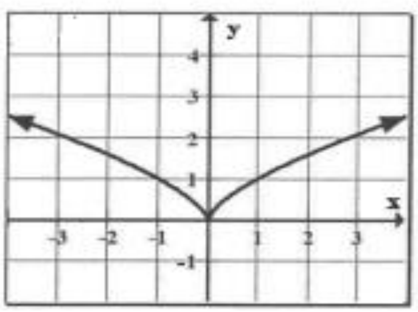
عدم الاتصال

(1) فجوة

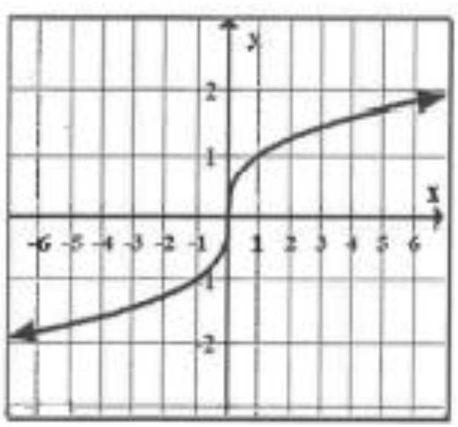
(2) قفزة

(3) لانهائي

(4) تذبذبي

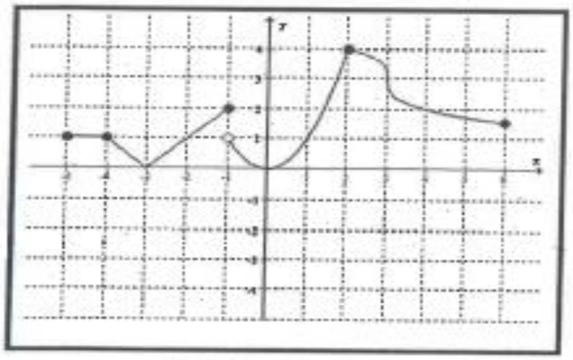


رأس مدبب



مماس رأسي

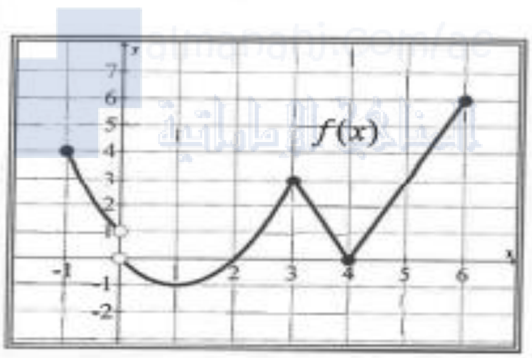
(1) اعتمد على الشكل المجاور الذي يمثل بيان الدالة : $f(x)$ للإجابة عن الأسئلة التالية:



مجموعة قيم x التي تكون عندها :

$f'(x)$ غير موجودة مع بيان السبب.

(2) اعتمد على الرسم البياني التالي الذي يمثل بيان الدالة $f(x)$ للاجابة عن الاسئلة التالية :



اولاً : أوجد

(أ) الفترة التي تكون عليها الدالة متصلة .

(ب) الفترة التي تكون عليها الدالة قابلة للاشتقاق

ثانياً: اعتمد على الشكل السابق في ايجاد

(1) $\lim\limits_{x\to 4} f(x) =$

(2) $\lim\limits_{x\to 0} f(x) =$

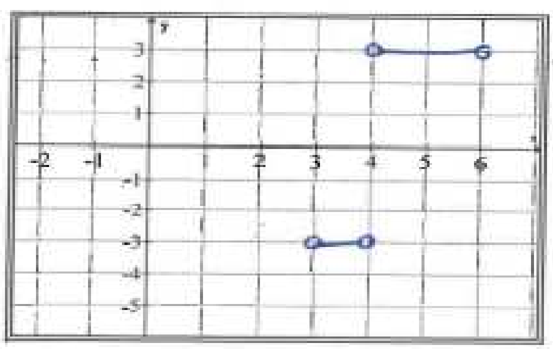
(3) $f'(1) =$

(4) $f'(5) =$

(5) $\lim\limits_{x\to 0^-} [x] f(x) =$

ثالثاً: اعتمد على الشكل السابق

ارسم بيان مشتقة الدالة $f(x)$ في الفترة $[3,6]$



العلاقة بين الرسوم البيانية للدالة ومشتقاتها.

ملاحظة:

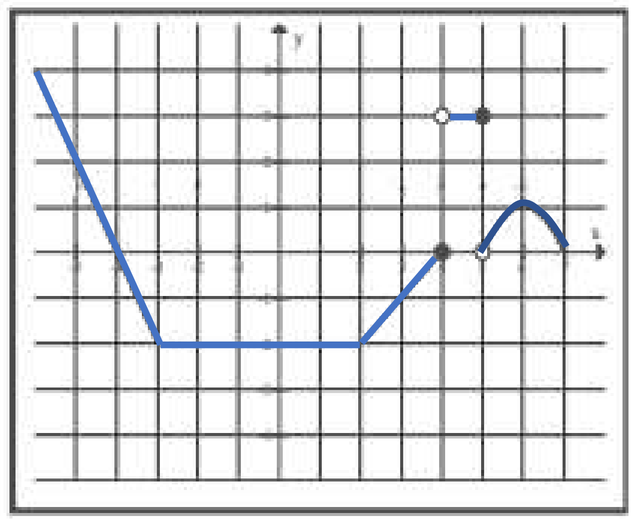
مشتقة دالة عند نقطة

=

ميل المماس للدالة عند تلك النقطة.

أولاً) الرسم البياني للدالة $f'(x)$ من بيان الدالة $f(x)$.

اعتمد على الشكل المجاور للإجابة عن الأسئلة التالية



(1) $f'(6) =$

(2) $f'(3) =$

(3) $f'(-4) =$

(4) $f'(5^-) =$

(5) $f'(2^-) =$

(6) $f'(2^+) =$

(7) $f'(2) =$

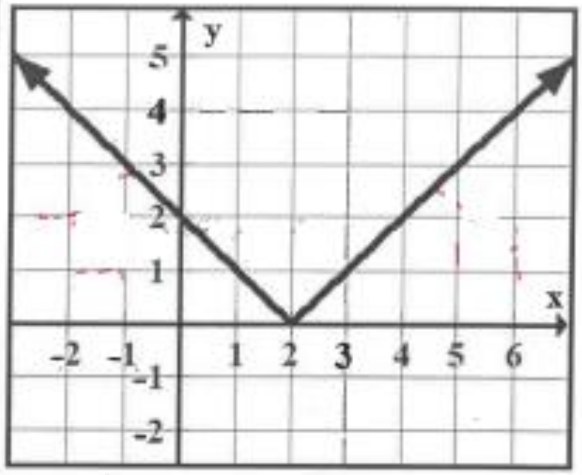
(8) $f'(-3^+) =$

(9) $f'(-3^-) =$

(10) $f'(-3) =$

استخدم الرسم البياني لإيجاد النهايات التالية أن أمكن :-

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a)$$



(1) $\lim_{x \to 4} \frac{f(x)-f(4)}{x-4}$

(2) $\lim_{x \to 1} \frac{f(x)-f(1)}{x-1}$

(3) $\lim_{x \to 2} \frac{f(x)-f(2)}{x-2}$

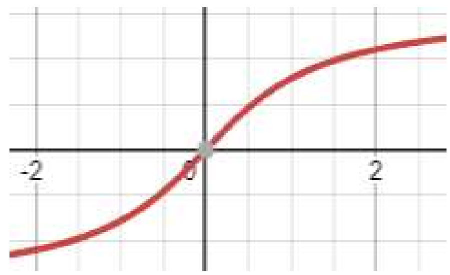
(4) $\lim_{h \to 0} \frac{f(h)-f(0)}{2h}$

(5) $\lim_{h \to 0} \frac{2f(3)-2f(3+h)}{h}$

(6) $\lim_{x \to 3} \frac{[f(x)]^2-[f(3)]^2}{x^2-3^2} =$

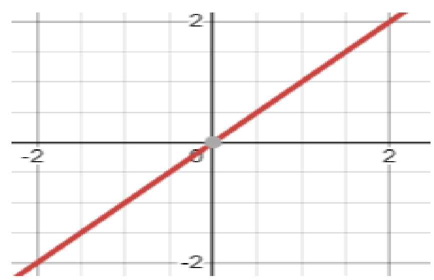
1)ارسم الميل للدالة عند النقطة المحددة إن امكن :

$y = tan^{-1}x \;\; at \; x = 0$

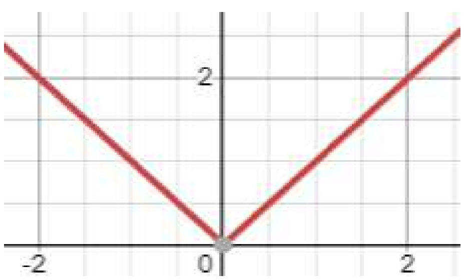


$y = sinx \;\; at \; x = \pi$

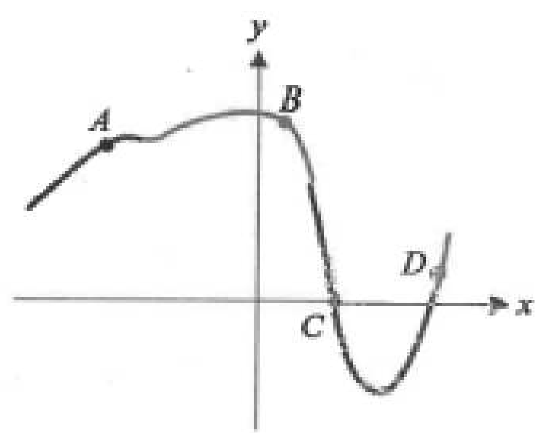
$y = x \;\; at \; x = 1$

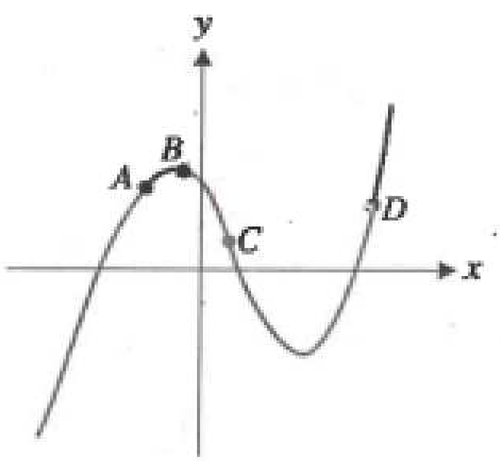


$y = |x| \;\; at \; x = 0$



(2) اعتمد على الشكل في ترتيب الحروف حسب قيمة الميل عند كل منها (ترتيب تصاعدي)





صل بين كل رسم بياني يمثل الدالة f من المجموعة A بالرسم البياني الذي يمثل مشتقتها من المجموعة B.

ملاحظات:

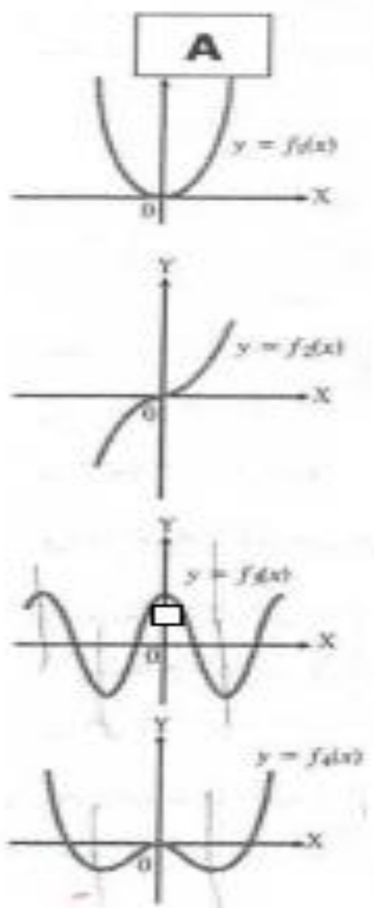
(1) المماس الافقي في بيان الدالة $f(x)$ هو مقطع سيني في بيان الدالة $f'(x)$

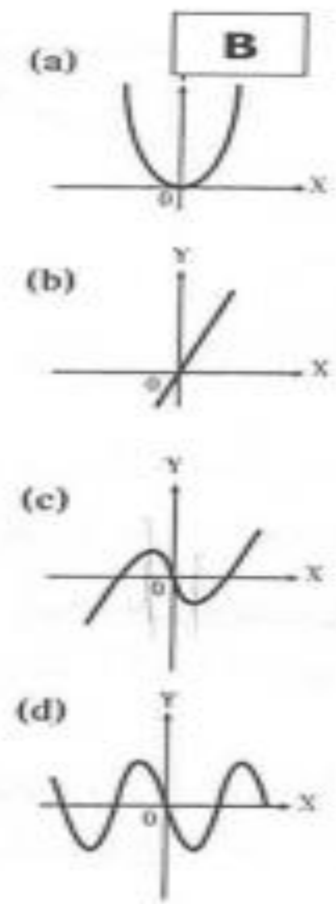
(2) تكون اشارة الدالة $f'(x)$ موجبة (فوق محور السينات) اذا كانت الدالة $f(x)$ متزايدة (↗)

(3) تكون اشارة الدالة $f'(x)$ سالبة (تحت محور السينات) اذا كانت الدالة $f(x)$ متناقصة(↘)

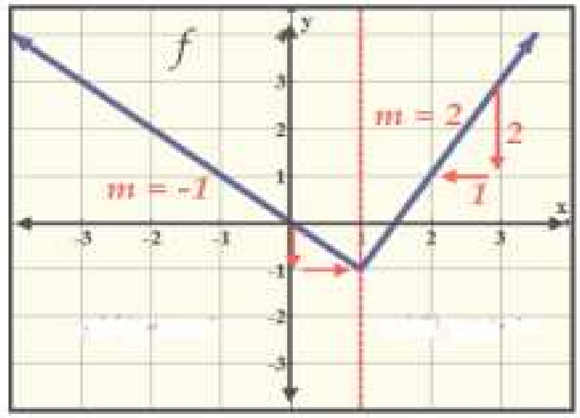
(4) اذا كان للدالة $f(x)$ خط تقارب رأسي فان للدالة $f'(x)$ نفس خط التقارب والعكس صحيح الا اذا كانت الدالة $f(x)$ دالة متصلة فيكون لها مماس رأسي

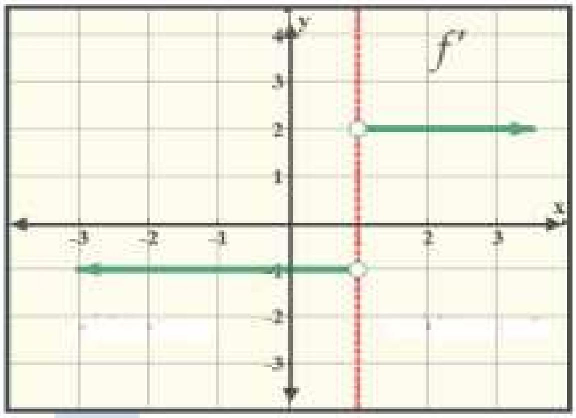
(5) مشتقة الدالة الزوجية هي دالة فردية والعكس صحيح

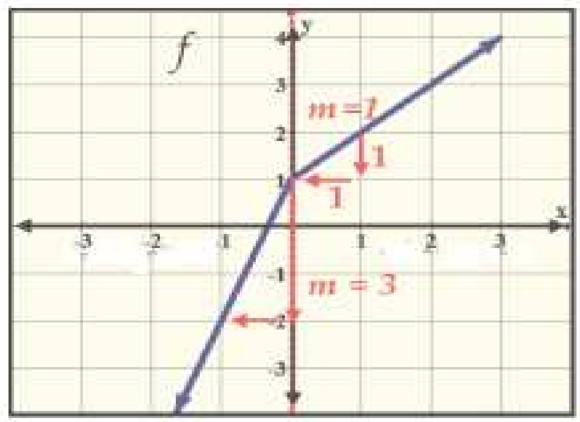


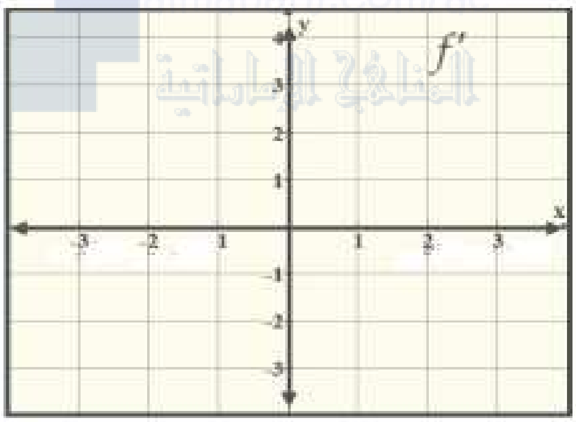


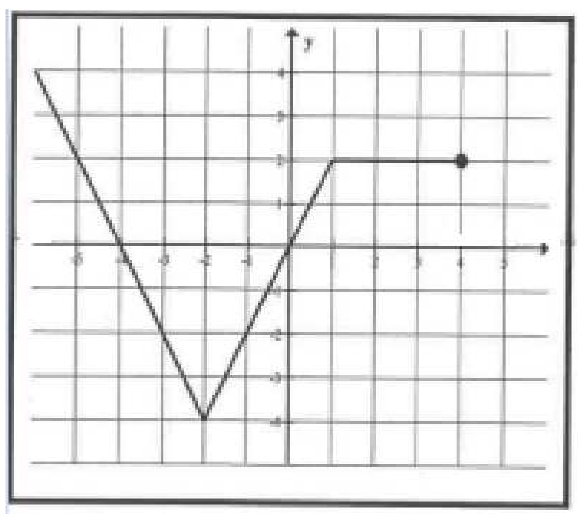
الرسم البياني المجاور يمثل بيان للدالة f . استفد من ذلك لرسم بيان الدالة f' .

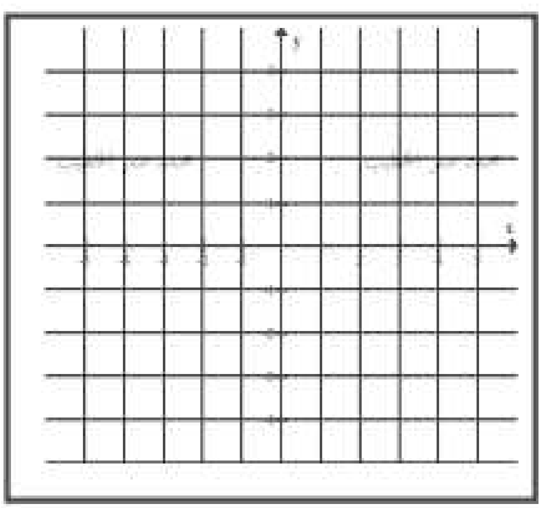




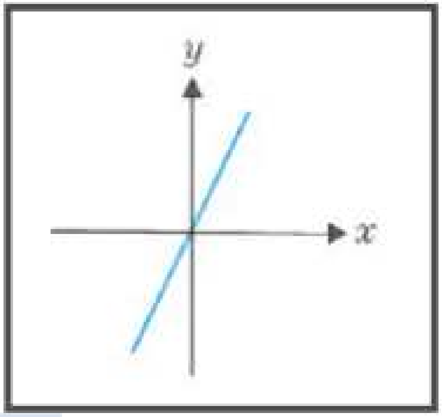


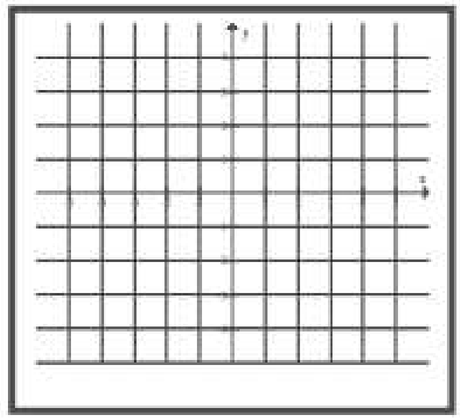


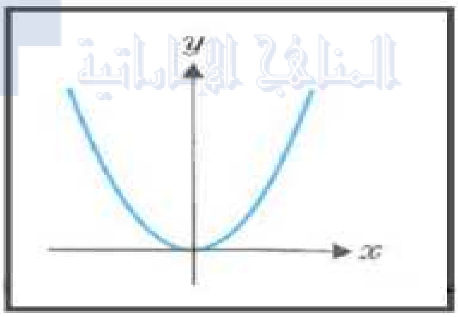


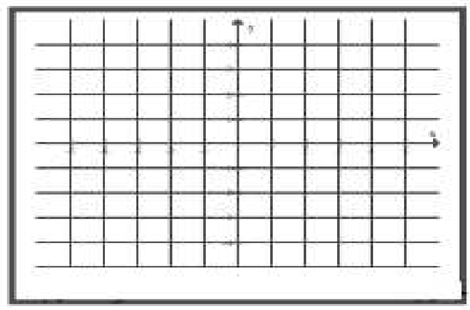


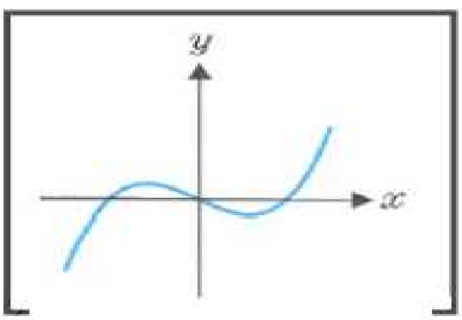
1) الرسم البياني المجاور يمثل بيان للدالة f استفد من ذلك لرسم بيان تقريبي الدالة $f^{/}$

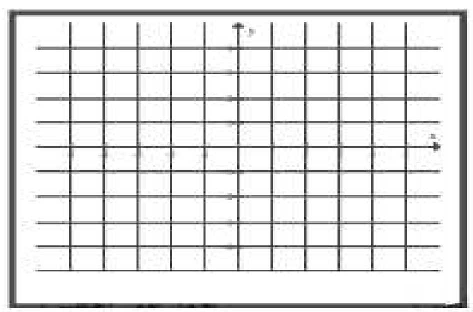


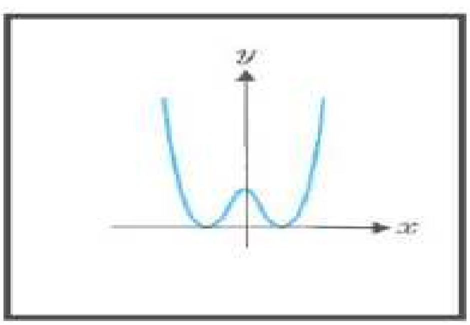


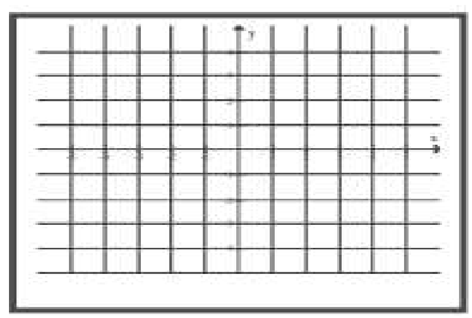






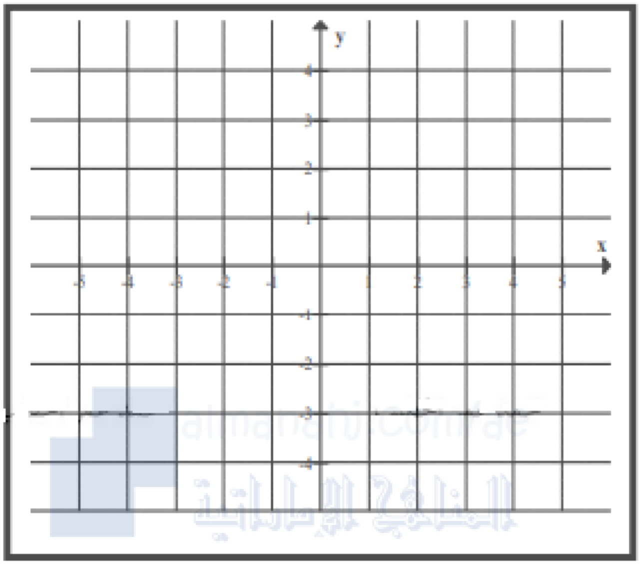






1) الرسم البياني المجاور للدالة f من بيان الدالة f'

(1) ارسم بيان الدالة: f بالشروط الاتية:

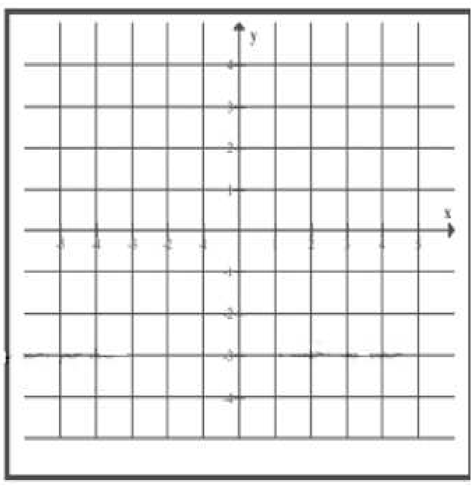


الدالة f متصلة.

$$f(0) = -1$$

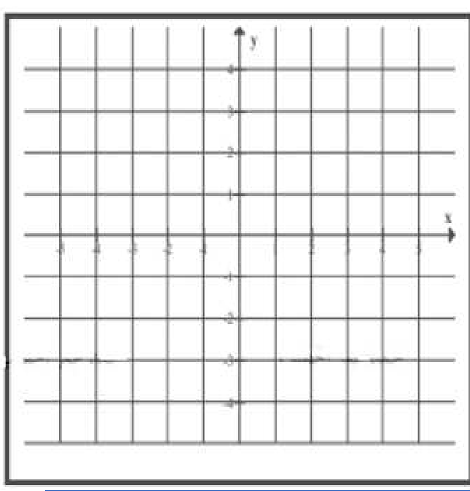
$$f'(x) = \begin{cases} 1 & x < 0 \\ -2 & x > 0 \end{cases}$$

2)ارسم البياني المجاور للدالة f التي تحقق الخواص التالية :



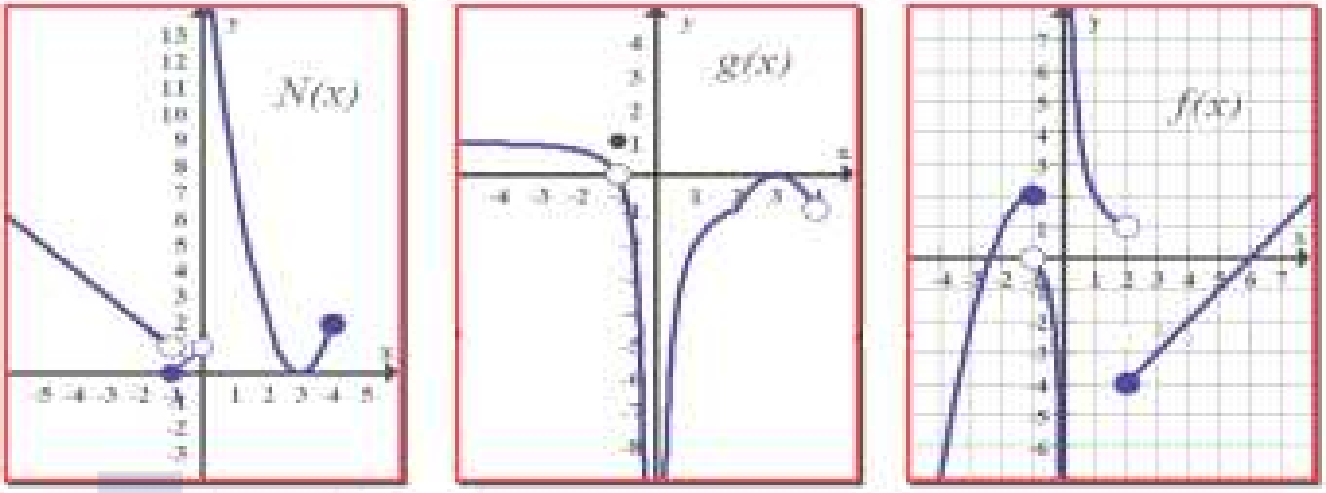
$$f'(4) = -3 \;,\; f'(2) = 0 \;,\; f'(0) = 1 \;,\; f(4) = -2 \;,\; f(2) = 1 \;,\; f(0) = 0$$

3)ارسم البياني المجاور للدالة f التي تحقق الخواص التالية :



$$f'(x) = 2x \;,\; f(0) = -1 \;,\; f(1) = 0 \;,\; f(-1) = 0$$

الرسومات البيانية التالية تمثل بيانات كل من الدوال : $N(x)$ ، $g(x)$ ، $f(x)$



اقرأ جيداً ثم املأ الفراغات في الجدول التالي بوضع (نعم) أو (لا) :

	$f(x)$	$g(x)$	$N(x)$
متصلة عند $x = 1$	……	……	……
لها انفصال لانهائي عند $x = 0$	……	……	……
قابلة للاشتقاق عند $x = 2$	……	……	……
معدل التغير عند $x = 0$ يساوي صفرا	……	……	……
تكون فقط النهاية لجهة اليسار موجودة عند $x = 4$	……	……	……
لها انفصال يمكن التخلص منه عند $x = -1$	……	……	……

الدالة التي تحقق جميع ما سبق هي : ……… ……

قواعد الاشتقاق

$$\frac{d}{dx}c = 0$$

$$\frac{d}{dx}ax = a$$

$$\frac{d}{dx}x^n = nx^{n-1}$$

$$\frac{d}{dx}[c \times f(x)] = c \times f'(x)$$

$$\frac{d}{dx}[f(x) \pm g(x)] = f'(x) \pm g'(x)$$

$$\frac{d}{dx}[f(x) \times g(x)] = f'(x) \times g(x) + f(x) \times g'(x)$$

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{f'(x) \times g(x) - f(x) \times g'(x)}{[g(x)]^2}$$

$$\frac{d}{dx}\sqrt{f(x)} = \frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}$$

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{a}{f(x)}\right] = \frac{-a \times f'(x)}{[f(x)]^2}$$

اوجد $\frac{dy}{dx}$ في كل من ممايأتي :

1) $y = 2x^7$

2) $y = -3x$

3) $y = 5^2$

4) $y = \frac{x}{2}$

5) $y = \frac{2}{x^3}$

6) $y = \sqrt{x}$

7) $y = \sqrt[3]{x^2}$

8) $y = e^2$

9) $y = \cos \pi$

10) $y = x\sqrt{x}$

اوجد $\frac{dy}{dx}$ في كل من ممايأتي :

1) $y = 2x^3 + \frac{1}{x^2} + 7x - 3\pi$

2) $y = -5x^4 - 2x^{-3} + 4x^{\frac{5}{4}} - cos\frac{\pi}{4}$

3) $y = 3x^2 - \frac{3}{x^3} + \sqrt{x} - \frac{1}{2}$

4) $y = 2x - \frac{4}{x^2} + 7x^{\frac{5}{7}} + \sqrt{x^3}$

اوجد $\frac{dy}{dx}$ في كل من ممايأتي :

1) $y = (x^2 + 5)(1 - x^5)$

2) $y = (x^2 + 5)(x^2 - 5)$

3) $y = x(x + 1)(2x - 5)$

4) $y = (x^2 + 1)^2$

اوجد $\frac{dy}{dx}$ في كل من ممايأتي :

$$1)\ y = \frac{x^2 - 4}{x + 3}$$

$$2)\ y = \frac{x + 1}{x^2 - x - 2}$$

$$3)\ y = \frac{3}{x^2 + 1}$$

$$4)\ y = (x^2 + 3)(2x - 5)^{-1}$$

قبل اشتقاق الدالة عند نقطة يجب دراسة الاتصال عند هذه النقطة ونتأكد أن الدالة متصلة عند هذه النقطة

اشتقاق الدوال المعرفة بأكثر من دالة:

(1) لتكن: $f(x)=\begin{cases} x^3+1 & ,x\geq 1 \\ 3x & ,x<1 \end{cases}$

أ) هل الدالة: $f(x)$ متصلة عند $x=1$ ؟ وضح مدى ارتباط ذلك بوجود $f'(1)$.

ب) اوجد $f'(x)$ حيث $x>1$.

ج) اوجد $f'(x)$ حيث $x<1$.

د) اوجد $f'(x)$

(2) لتكن: $g(x)=\begin{cases} 2x^3 & ,x\geq 1 \\ 3x-1 & ,x<1 \end{cases}$

أ) وضح ما إذا كانت الدالة $g(x)$ متصلة عند $x=1$.

ب) ابحث قابلية الاشتقاق للدالة: $g(x)$ عند $x=1$.

(3) لتكن: $g(x)=\frac{d}{dx}|x|$

اوجد نقاط انفصال الدالة $g(x)$ وبين نوع الانفصال.

(4) اوجد النقاط التي تكون عندها الدالة $f(x)=|x|+|x-2|$ غير قابلة للاشتقاق

بفرض أن الدوال $g(x), f(x)$ ومشتقاتهما لهم القيم التالية عند $x = 2$

x	$f(x)$	$f'(x)$	$g(x)$	$g'(x)$
2	1	3	5	-4

1) $\lim_{x \to 2}(f(x) + g(x)) =$

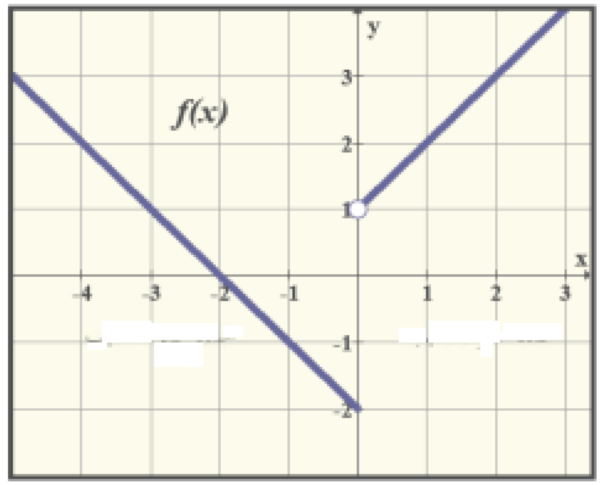
2) $\frac{d}{dx}\left(3f(x) + \frac{1}{4}g(x)\right)$ عند $x = 2$

3) $\frac{d}{dx}(f(x) \times g(x))$ عند $x = 2$

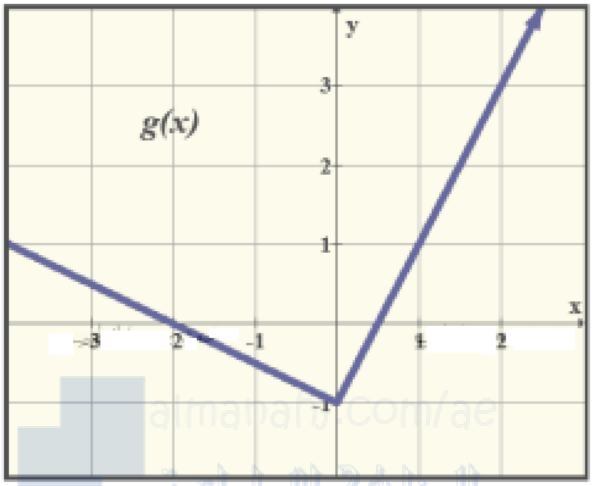
4) $\frac{d}{dx}(f(2) \times g(x))$ عند $x = 2$

استخدم الأشكال البيانية الموضحة ادناه في إيجاد :

$y = f(x)$



$y = g(x)$



اوجد:

$$1)\quad \frac{d}{dx}(2g - 3f) \qquad x = 1$$ عند

$$2)\quad \frac{d}{dx}(f \,.\, g) \qquad x = 1$$ عند

$$1)\quad \lim_{x\to 2} \frac{2f(x) - 6}{x - 2} =$$

المشتقات ذات الرتب العليا:

المشتقة الأولى: $y' = \frac{dy}{dx}$

المشتقة الثانية: $y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{d}{dx}(\frac{dy}{dx}) = \frac{d^2y}{dx^2}$

المشتقة الثالثة: $y''' = \frac{dy''}{dx} = \frac{d^3y}{dx^3}$

المشتقة النونية: $y^n = \frac{d}{dx}y^{(n-1)} = \frac{d^ny}{dx^n}$

(1) إذا كانت: $y = x^4 - 3x^2 + 5$ فأوجد: $\frac{d^2y}{dx^2}$

(2) إذا كانت: $f(x) = x^5 - 6x^3 + 2x + 8$ فأوجد:

(a) $f^4(x)$

(b) $f^{10}(x)$

1) إذا كانت $y = \frac{2}{x}$ فاوجد $\frac{d^5y}{dx^5}$ ثم اكتب نمطاً لــ $\frac{d^ny}{dx^n}$ (حيث n عدد صحيح موجب)

2) إذا كانت $f(x) = xg(x)$ اوجد $f^n(x)$ (المشتقة ذات الرتبة n)

1) إذا كانت الدالة $f(x)$ قابلة للاشتقاق عند $x = a$ فأثبت أن الدالة $f(x)$ متصلة عند $x = a$.

2) إذا كانت كل من $f(x), g(x)$ دوال قابلة للاشتقاق وكانت $k(x) = f(x) + g(x)$ فأثبت أن

$$k^{/}(x) = f^{/}(x) + g^{/}(x)$$

3) إذا كانت كل من $f(x), g(x)$ دوال قابلة للاشتقاق وكانت $p(x) = f(x).g(x)$ فأثبت أن

$$p^{/}(x) = f^{/}(x).g(x) + f(x).g^{/}(x)$$

إيجاد الثوابت للدوال القابلة للاشتقاق:

(1) أوجد قيمة k التي تجعل الدالة $f(x)=\begin{cases} x^3 & x<1 \\ 3x+k & x\geq 1 \end{cases}$ قابلة للاشتقاق عند $x=1$.

(2) أوجد كل من $a\ ,\ b$ التي تجعل الدالة $f(x)=\begin{cases} ax+b & x<1 \\ x^2+5 & x\geq 1 \end{cases}$ قابلة للاشتقاق عند $x=1$

(3) أوجد كل من $a\ ,\ b$ التي تجعل الدالة $f(x)=\begin{cases} 3-x & ,x<1 \\ ax^2+bx & ,x\geq 1 \end{cases}$ قابلة للاشتقاق عند $x=1$

(1) أوجد كل من a , b التي تجعل الدالة $f(x)=\begin{cases} 3-x & ,x<1 \\ ax^2+bx & ,x\geq 1 \end{cases}$ قابلة للاشتقاق عند $x=1$

(2) اذا كانت $f(x)=2x^4+bx+3$ حيث $\lim_{h\to 0}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}=10$ فاوجد قيمة b

(3) أوجد كثيرة حدود من الدرجة الثانية تحقق $f(0)=-2 \ , f'(0)=2 \ , \ f''(0)=3$

التطبيقات الهندسية :

إذا كان m_1 ميل المستقيم L_1 وكان m_2 ميل المستقيم L_2 فإن

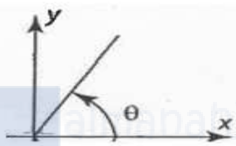
$$L_1 // L_2 \iff m_1 = m_2$$

$$L_1 \perp L_2 \iff m_2 = \frac{-1}{m_1} \quad oR \quad m_1 \times m_2 = -1$$

معادلة المستقيم بدلالة نقطة وميل هي : $y - y_1 = m(x - x_1)$

ملاحظة:

(1) ميل المماس للدالة عند نقطة يساوي ظل الزاوية الموجبة التي يصنعها المما



$$m = tan\theta$$

(2) نقطة التماس :هي النقطة التي تقع على المنحنى وعلى المماس ويكون عندها ميل المنحنى وميل المماس متساويان

لتكن $f(x) = x^2 - 3x$ **فاوجد :**

1) ميل منحنى الدالة $f(x)$ عند النقطة $(1, -2)$.

2) معادلة المماس عند النقطة $(1, -2)$.

3) معادلة العمودي على المماس عند النقطة $(1, -2)$.

4)عند أي النقاط يكون المماس أفقي ؟

إذا كانت $f(x) = \frac{1}{x-1}$ فاوجد :

(1) ميل القاطع PQ حيث $P=(3,\frac{1}{2})$, $Q=(2,1)$.

(2) ميل المماس عند $x=2$.

(3) معادلة المماس للمنحنى عند $x=2$.

(4) اوجد الزاوية الموجبة التي يصنعها المماس مع محور السينات عند $x=2$.

(5) معادلة الخط العمودي على المماس عند $x=2$.

1) أوجد معادلة المماس والعمودي على المماس لمنحنى الدالة $y = \frac{8}{x^2+4}$ عند $x = 2$

2) إذا كانت : $f(x) = \frac{1}{x}$ فأوجد جميع النقاط التي يكون عندها الميل يساوي $-\frac{1}{4}$ ثم اوجد معادلة **المماس عند كل نقطة .**

3) أوجد جميع النقاط التي يكون المماس للدالة : $f(x) = x^2 + 4x - 1$ أفقياًثم اوجد معادلة هذا **المماس.**

1) أوجد جميع النقاط التي يكون المماس للدالة $f(x) = x^2 + \frac{2}{x}$ أفقياً ثم اوجد معادلة هذا المماس ؟

2) اوجد معادلة المماس لمنحنى الدالة: $f(x) = x^2 + 2x$ عند النقطة التي يكون المماس عندها موازياً للمستقيم الذي معادلته : $y = 4x + 1$

(3) من السؤال السابق (2) اوجد الزاوية الموجبة للمماس المرسوم $x = -1$

(4) من السؤال السابق (2) اوجد الزاوية الموجبة للمماس المرسوم $x = -\frac{3}{2}$

(1) اوجد قيمة x التي تجعل المماس على المنحنيين $y = x^2 + 1 , y = x$ متوازيين

(2) اوجد قيمة x التي تجعل المماس على المنحنيين $y = x^3 + 1 , y = 1 - 3x$ متعامدين

(3) إذا كان منحنى الدالة : $y = 2x^3 - kx + 2$ له مماس أفقي عند $x = -1$, احسب قيمة k .

(4) إذا كان المستقيم الذي معادلته : $y = 3x - a$ مماساً لمنحنى الدالة $f(x) = 2x^2 - x + 1$

فاوجد قيمة الثابت a ؟

(1) إذا كان للدالتين $f(x) = cx - x^2$, $g(x) = x^2 + ax+$ مماساً مشتركاً عند النقطة $(1, 0)$

اوجد قيمة الثوابت a, b, c ؟

(2) إذا كانت للدالة: $f(x) = \frac{2x+k}{(x-1)^2} + a$ مماساً أفقياً النقطة عند $(0, 6)$ فاوجد قيمة الثوابت

a , k ؟

$f(x) = \sqrt{x}$ (1)

أ) اوجد قيمة b التي تجعل المماس عند$x = 4$ موازياً للوتر المار بالنقطتين $(1, f(1)), (b, f(b))$

(ب) اوجد قيمة a إذا كان ميل المماس عندها يساوي $\frac{1}{4}$

(ج) ماذا يحدث للمماس عندما تقترب a من اللانهاية

$f(x) = \frac{1}{x}$ (2)

(أ) أوجد معادلة المماس للدالة عند $x = 1$

(ب)أوجد مساحة المثلث في الربع الأول والمحصورة بالمماس .

التطبيقات الفيزيائية:

الحركة على خط مستقيم

العلاقة بين المسافة s و السرعة v والعجلة a والجزة j .

إذا كانت المسافة s دالة في الزمن t فـــــإن : ..

السـرعة v هي المشتقة الأولي :
$$v = \frac{ds}{dt} = s'(t)$$

التسارع a هي المشتقة الثانية :
$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2} = s''(t)$$

ملاحظة: السرعة اللحظية (السرعة المتجهة) $v = \frac{ds}{dt}$ ، والسرعة العددية $|v| = \left|\frac{ds}{dt}\right|$

ملاحظات:

(1)إذا كانت إشارة السرعة المتجهة موجبة (+) يكون الجسم متجهاً لليمين (للأعلى) .

(2)إذا كانت إشارة السرعة المتجهة موجبة (-) يكون الجسم متجهاً لليسار (للأسفل) .

(3)يكون الجسم متسارعاً إذا كانت للسرعة والتسارع لهما نفس الإشارة (+ و +) أو(- و-).

(4)يكون الجسم متباطئاً إذا كانت للسرعة والتسارع لهما اشارتين مختلفتين(+و-) او(- و+)

(1) قذف جسم رأسياً لأعلى حسب فتتحرك العلاقة $s(t) = 60\ t - 5t^2$ حيث t بالثواني

و s بالامتار

(1)اوجد موقع الجسيم بعد 3 ثواني.

(2)اوجد موقع الجسيم بعد 8 ثواني.

(3)اوجد السرعة المتوسطة المتجهة اول 5 ثواني

(4)اوجد السرعة المتوسطة المتجهة على الفترة $[2, 7]$

(5)اوجد السرعة المتجهة للجسيم بعد مرور 4 ثواني .

(6)اوجد السرعة المتجهة للجسيم بعد مرور 9 ثواني .

(7)اوجد تسارع الجسيم بعد مرور 5 ثواني .

(8)اوجد أقصى ارتفاع يصل إليه الجسيم (أقصى ارتفاع يصل إليه الجسيم عندما تنعدم السرعة)

(9)اوجد سرعة الجسيم عندما يكون على ارتفاع 100 m

(10)اوجد سرعة الجسيم عندما يرتطم بالأرض .

(11) في الثانية السابعة هل كان الجسم صاعداً ام هابطاً ؟

(12) ارسم حركة الجسيم على خط الأعداد .

تحرك جسيم على خط مستقيم بحيث يعطى موقعه y في أي لحظة $t \geq 0$ بالدالة التالية:

$s(t) = t^2 - 10t + 12$ حيث s بالقدم, t بالثانية

فاوجد:

1)إزاحة الجسم خلال اول 10 ثواني :

2)السرعة المتوسطة للجسم في الفترة $[2, 5]$

3)معدل السرعة عند الثانية الثالثة .

4)متى تنعدم سرعة الجسيم .

5) ما قيم التسارع في أي لحظة .

6) صف حركة الجسيم(متي يتحرك لليمين ومتي يتحرك لليسار ،وتي يكون متسارعاً ومتى يكون تباطئاً)

يتحرك جسيم في خط مستقيم بحيث أن: $s(t) = t\sqrt{t} + 6t$ حيث s المسافة بالأمتار و t الزمن بالثانية

أوجد تسارع هذا الجسم عندما تكون سرعته $12\ m/s$

تتحرك سيارتان على خط مستقيم بحيث تعطى موقعهما في أي لحظة $t \geq 0$ بالدالتين:

موقع السيارة الأولى a : $s_a = 3t^2 + 2t + 2$

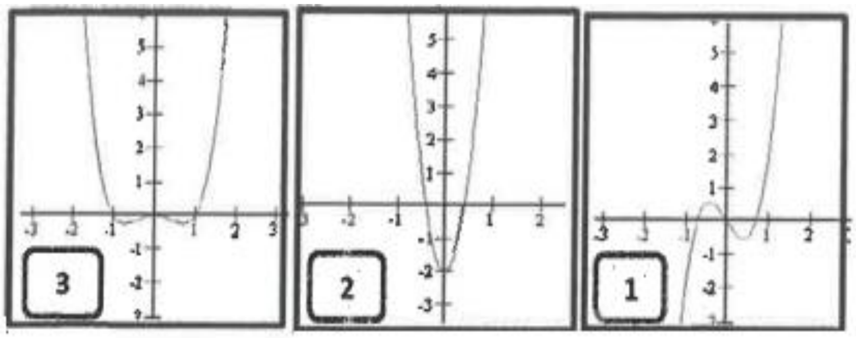
موقع السيارة الثانية b : $s_b = t^2 + 8t$ حيث t الزمن بالثواني ، s بالامتار

اوجد:

(1) الزمن الذي تكون عندها السرعة اللحظية للسيارتات متساوية

(2)أي السيارتان لها تسارع أكبر عند $t = 2$

في الشكل المقابل أياً من المنحنيات يمثل :

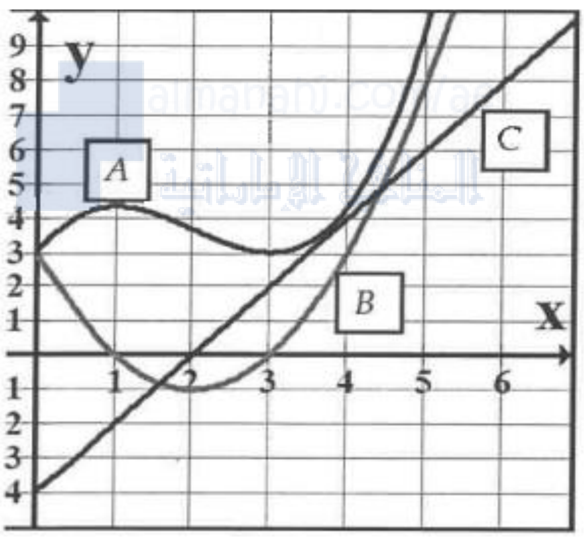


دالة الموضع (الازاحة)

دالة السرعة المتجهة.

دالة التسارع.

(2) في الشكل المقابل اياً من المنحنيات يمثل:

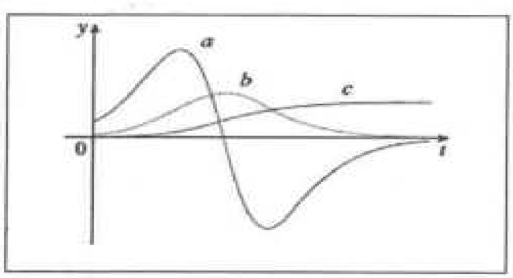


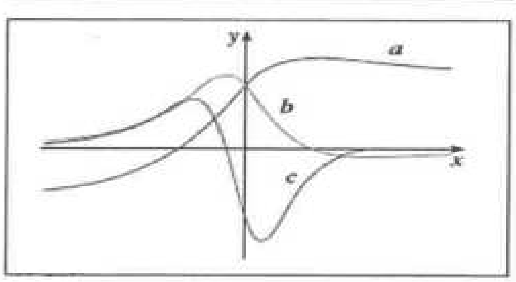
دالة الموضع (الازاحة)

دالة السرعة المتجهة.

دالة التسارع.

(3) في الشكل المقابل اياً من المنحنيات يمثل:





دالة الموضع (الازاحة)

دالة السرعة المتجهة.

دالة التسارع.

تحدد العلاقة $meter\ /\ s$ $u(\mathrm{m})=\dfrac{83m}{m+0.05}$ السرعة الإبتدائية لكرةجولف كتلتها $0.05\ kg$

ضربت بعصا كتلتها $m\ kg$ والسرعة الابتدائية للعصا $50\ m\ /\ s$:

1) اوجد السرعة الابتدائية للكرة عندما يكون وزن العصا $0.15\ kg$.

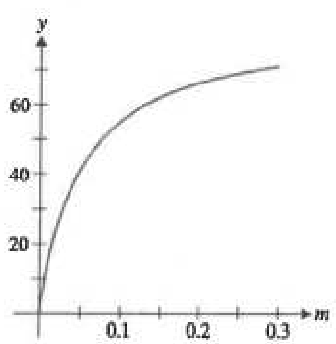
2) اوجد السرعة الابتدائية للكرة عندما يكون وزن العصا $0.20\ kg$. ماذا تلاحظ

3) اوجد $u'(m)$. ماذا تعني

4) بين ان $u'(m)>0$. فسر النتيجة

التفسير:

بمان المشتقة موجبة (الميل موجب) يعني كلما زادت كتلة العصاء زادات السرعة الأبتدائية للكرة



5) او جد $u'(0.15)$ و $u'(0.20)$ ثم فسر

التفسير:

معدل التغير (الزيادة) للعصاء الثقيلة اقل من معدل التغير (الزيادة) للعصا الخفيفة في وحدة الزمن

تمثل المعادلة : $r = \dfrac{1}{\dfrac{0.55}{c} + \dfrac{0.45}{h}}$

كمية الوقود المستهلك بالجالون لسيارة تسير داخل المدينة مسافة c بالميل .

وعلى الطريق السريع مسافة h

1)اوجد كمية الوقود المستهلك عندما تقطع السيارة 100 ميل داخل المدينة فقط .

2)اوجد كمية الوقود المستهلك عندما تقطع السيارة 100 ميل على الطريق السريع فقط .

3)اوجد كمية الوقود المستهلك عندما تقطع السيارة 50 ميل داخل المدينة و100ميل على الطريق السريع

4) اوجد $\dfrac{dr}{dc}$ ثم بين أن $\dfrac{dr}{dc} > 0$ ثم فسر النتيجة

5) اوجد $\dfrac{dr}{dh}$ ثم بين أن $\dfrac{dr}{dh} > 0$ ثم فسر النتيجة

التطبيقات الحياتية:

ملاحظة: معدل التغير = المشتقة

(1) في بستان فاكهة به أشجار خوخ ،وجد أن الكمية P من الخوخ السليم بالكيلو غرام تنتجها شجرة متوسطة الإنتاج يتوقف على عدد الكيلو غرامات x من المبيد الحشري المستخدم لرش الشجرة حسب العلاقة:

$$P(x) = 300 - \frac{100}{x}$$

اوجد معدل التغير في انتاج الشجرة من الخوخ عند استخدام 4 كيلو من المبيد الحشري.

2) تشير دراسة بيئية لأحد المدن أن اول أكسيد الكربون في الهواء يعطى بالعلاقة :

$$\boldsymbol{Q(t) = 0.05t^2 + 0.1t + 3.4}$$

حيث $\boldsymbol{Q}$ تقاس بالجزء من المليون ، $\boldsymbol{t}$ تقاس بالسنوات

اوجد:

(أ) متوسط التغير في تركيز في أول أكسيد الكربون في الفترة $[1,10]$

(ب) معدل التغير في تركيز في أول أكسيد الكربون بعد 3 سنوات

1)يبيع مصنع دمى 100000 قطعة سنوياً بسعرالقطعة 25 درهم،إذا أراد صاحب المصنع زيادة المبيعات بمعدل 2000 قطعة سنوياً وتخفيض سعر القطعة بمعدل 2 درهم ؟ أوجد معدل التغير في دخل المصنع السنوي ، هل قرار إدارة المصنع كان صحيحاً ؟

الكمية $Q(t)$
معدل التغير في الكمية $Q^{/}(t)$
السعر $P(t)$
معدل التغير في السعر $P^{/}(t)$
الإيراد $R(t)$
$R(t) = Q(t) \times P(t)$
معدل التغير في الإيراد $R^{/}(t)$

2)استأجر احد أعضاء النوادي بركة سباحة لمدة 10 سنوات ،وتم تقسيم الإيجار بالتساوي على الأعضاء المساهمين ،وكان هناك 80 عضواً حيث إيجار البركة 8000 درهم سنوياً.فإذا كان عدد الأعضاء يتزايدون بمعدل 20 عضواً في السنة وإيجار البركة يزايد بمعدل 1000 درهم سنوياً. ما المعدل اللحظي للتغير في نصيب كل واحد من الأعضاء المشاركين من إيجار بركة السباحة .

(1) شركة لإنتاج العاب الأطفال تبيع إنتاجها البالغ 25000 قطعة سنوياً بسعر 40 درهم للقطعة الواحدة إذا قررت الشركة زيادة الإنتاج بمعدل 2000 قطعة سنوياً لرفع إيراداته بمعدل 130000 درهم سنوياً احسب معدل التغير في سعر القطعة سنوياً الذي على الشركة أن تزيده لتحقيق ذلك الإيرادات.

(2) يبيع مصنع دمى $Q(t)$ قطعة سنوياً ويمعدل (نسبة) نقصان 4% سنوياً ، اذا كان سعر القطعة $P(t)$ يتزايد بمعدل (نسبة) 3% سنوياً ، ،والدخل السنوي للمصنع هو $R(t)$ ، اوجد معدل (نسبة) التغير في دخل المصنع السنوي ،هل قرار ادارة المصنع كان صحيحاً.

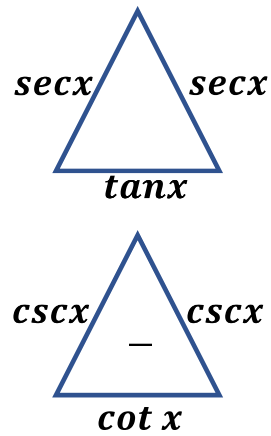
النسبة المئوية للتغير في معدل الايراد هو

$$\frac{R'(t)}{R(t)} \times 100\%$$

$$\frac{d}{dx}\sin x = \cos x$$

$$\frac{d}{dx}\cos x = -\sin x$$

$$\frac{d}{dx}\tan x = \sec^2 x$$



$$\frac{d}{dx}\sec x = \sec x \tan x$$

$$\frac{d}{dx}\csc x = -\csc x \cot x$$

$$\frac{d}{dx}\cot x = -\csc^2 x$$

إذا كان : $y = \sin x$ فأثبت أن : $\frac{dy}{dx} = \cos x$ (باستخدام التعريف)

تذكر ان :

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x} = 1$$

إذا كان : $y = \tan x$ فأثبت أن : $\frac{dy}{dx} = \sec^2 x$ (باستخدام التعريف)

اوجد $\frac{dy}{dx}$ في كل ممايأتي :

$(1)y = 1 + x - cosx$

$(2)y = tanx - sin\frac{\pi}{2}$

$(3)y = sinx + cotx - \frac{2}{x}$

$(4)y = sinx\ cosx$

$(5)\ y = x^3\ tanx$

$(6)y = \frac{x}{1 + cosx}$

اوجد $\frac{dy}{dx}$ في كل ممايأتي :

(1) $y = \sin^2 x + \cos^2 x$

(2) $y = \dfrac{\sin x}{\sec x + x}$

(3) $y = \dfrac{\sin x}{\sin x + \cos x}$

(4) $y = \dfrac{x}{1 + \cot x}$

(5) $y = \dfrac{\csc x}{x^2 - 1}$

اوجد $\frac{dy}{dx}$ في كل ممايأتي :

(1) $y=\frac{-2}{1+\sec x}$

(2) $y=\frac{\cot x}{x}-\sec x$

(3) $y=\frac{\sec^2 x-\tan^2 x}{\sec x}$

(4) $y=(3x^2+1)\cot x$

إذا كان $y = x^3 + sinx$ فاوجد :

(1) $\frac{d^2y}{dx^2}$

(2) $\frac{d^{10}y}{dx^{10}}$

(3) $\frac{263y}{dx^{263}}$

(4) $\frac{d^{801}y}{dx^{801}}$

(5) $\frac{d^{1000}y}{dx^{1000}} - \frac{d^{502}y}{dx^{502}}$

(1) إذا كان $y = secx$ فاوجد $\frac{d^2y}{dx^2}$:

(2) إذا كانت $f(x) = xsinx + cosx$

فأثبت أن : $x\,f^{//}(x) + xf(x) - 2f^{/}(x) = 0$

إذا كانت: $f(x) = \sin x + \cos x$

اوجد:

(3) $\frac{d^{203}}{dx^{203}} f(x)$

(4) $f(x) + f'(x) + f''(x) + f'''(x)$

(2) إذا كانت : $g(x) = \begin{cases} \sin x & , x \geq \pi \\ a x + b & , x < \pi \end{cases}$

اوجد قيمة كل من الثابتين a,b بحيث تكون الدالة $g(x)$ قابلة للاشتقاق عند $x = \pi$.

(3) اوجد معادلة المماس للدالة: $y = \frac{\sin x}{1 + \cos x}$ عند $x = \frac{\pi}{2}$.

قاعدة السلسلة:

قاعدة السلسلة الأولى

(الشكل الأول)

$$\frac{d}{dx}[f(x)]^n = n\times[f(x)]^{n-1} f'(x)$$

(الشكل الثاني)

$$\frac{d}{dx}[(f\circ g)(x)] = \frac{d}{dx}[f(g(x)] = f'(g(x))\times g'(x)$$

قاعدة السلسلة الثانية

(الشكل الأول)

$$y = f(u) \quad , \quad u = g(x)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\times\frac{du}{dx}$$

(الشكل الثاني)

المعادلات البارمترية

$$y = f(t) \quad , \quad x = g(t)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$$

مشتقة الدالة العكسية

$$\frac{d}{dx}\left[f^{-1}(x)\right] = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$

او

$$\frac{d}{dx}[g(x)] = \frac{1}{f'(g(x))}$$

حيث $g(x) = f^{-1}(x)$

أوجد $\frac{dy}{dx}$ في كل ممايأتي :

(1) $y = (x^2 + 3)^5$

(2) $y = \frac{3}{(x^3 - 3x + 8)^3}$

(3) $y = x^3(4x - 1)^3$

(4) $y = (2x + 1)^5(2x - 1)^5$

(5) $y = \left(\frac{x^2 + 3}{2x - 4}\right)^3$

(6) $y = \sqrt{x^2 - 5x + 1}$

أوجد $\frac{dy}{dx}$ في كل ممايأتي :

$(1)\ y = (sinx - x)^5$

$(2)\ y = sin^2x$

$(3)\ y = sec^5x$

$(4)\ y = cos(\sqrt{x})$

$(5)\ y = tan\sqrt{x^3 + 1}$

$(6)\ y = sin\ (cos4x)$

$(7)\ y = sin^2(2x)$

$(8)\ y = (sin^2(2x) + cosx^2)^3$

أوجد $\frac{dy}{dx}$ في كل ممايأتي :

$(1)\ y = cot^2 x^3$

$(2)\ y = tan^3\ (2x) + csc^4 x^2$

$(3)\ \ y = cos\left(\frac{1}{cosx}\right)$

$(4)\ y = \frac{2}{cot(sinx)}$

$(5)\ y = sin(cos\sqrt{x^3 + 2x^2})$

$(6)\ y = xcos^2 x$

$(7)\ y = sin^3\ x\ cos3x$

أوجد $\frac{dy}{dx}$ في كل ممايأتي :

(1) $y = sec^2x\ tan\ x^2$

(2) $y = x\sqrt{sinx}$

(3) $y = \frac{x^2}{csc^4 2x}$

(4) $y = \sqrt{tanx^2 + 2}$

(5) $y = \sqrt{sinx\ cosx}$

(1) إذا كان : $f(x) = sin2x$ فاوجد :

$(a)\ f^{75}(x)$

$(b)\ f^{101}(x)$

$(c)\ f^{101}(\pi)$

(2) إذا كان : $f(x) = sincos3x$ فاوجد :

$(a)\ f^{11}(x)$

$(b)\ f^{20}(\pi)$

$(c)\ \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x) - f(0)}{x}$

أوجد $\frac{dy}{dx}$ في ممايأتي عند النقطة المشار إليها :

$(1)\ \boldsymbol{y = u^2 + \cos u \quad , u = x^2 + 1 \quad at\ x = 1}$

$(2)\ \boldsymbol{y = u^2 + \frac{1}{\cos u} \quad , u = \pi x^2 \quad at\ x = \frac{1}{2}}$

$(3)\ \boldsymbol{y = u^2 - \frac{8}{u} \quad , u = 2x\sqrt{x} + 1 \quad at\ \ y = 0}$

$(4)\ \boldsymbol{y = \tan\left(t + \frac{\pi}{4}\right) \quad , x = 3t^2 - t \quad at\ t = 0}$

أوجد $\frac{dy}{dx}$ في كل ممايأتي :

(1) $y = f(x^2)$

(2) $y = f\left(\sqrt{x}\right)$

(3) $y = [f(x)]^2$

(4) $y = \sqrt{f(x)}$

(5) $y = f(f(x))$

(6) $y = f^3(f(x^2))$

بفرض أن الدوال $g(x)$, $f(x)$ ومشتقاتهم لهم القيم التالية عند $x = 2$

(أ) أوجد $h^{/}(2)$ في الحالات الآتية

x	$f(x)$	$f^{/}(x)$	$g(x)$	$g^{/}(x)$
2	1	3	2	-4

1) $h(x) = 4f(x) + g(x) - x^2$

2) $h(x) = f^3(x) + \dfrac{1}{g(x)}$

3) $h(x) = \sqrt{f(x) + 2g(x)}$

4) $h(x) = f(g(x))$

(ب) اوجد معادلة المماس للدالة $h(x) = f(x)g(x)$ عند $x = 2$

(1) بفرض أن الدوال : $g(x), f(x)$ ومشتقاتهم لهم القيم التالية

$$f(1) = 3 , g(1) = 2 , f^{/}(1) = 4 , g^{/}(1) = -2 \ and \ g^{/}(3) = 5$$

اوجد$h^{/}(1)$ حيث $h(x) = f\big(g(x)\big)$

(2) بفرض أن الدوال : $g(x), f(x)$ ومشتقاتهم لهم القيم التالية

$$f(2) = 1 , g(2) = 3 , f^{/}(2) = 1 , f^{/}(3) = -3 , g^{/}(1) = 2 \ and \ g^{/}(2) = 4$$

اوجد$h^{/}(2)$ حيث $h(x) = f\big(g(x)\big)$

(3) بفرض أن الدوال : $g(x), f(x)$ ومشتقاتهم لهم القيم التالية

$$f(-2) = 8 , g(5) = -2 , f^{/}(-2) = 4 , f^{/}(5) = 3 , g^{/}(5) = 6$$

اوجد$h^{/}(5)$ حيث $h(x) = f\big(g(x)\big)$

بفرض أن الدوال $g(x)\,,f(x)$ ومشتقاتهما لها القيم التالية عند $x=2,4$

x	$f(x)$	$f'(x)$	$g(x)$	$g'(x)$
2	3	7	4	6
4	2	-5	9	-3

(أ) أوجد $h'(x)$ عند القيمة المشار إليها :

1) $h(x)=f\left(\sqrt{x}\right) \qquad x=4$

2) $h(x)=f\left(g(x)\right) \qquad x=2$

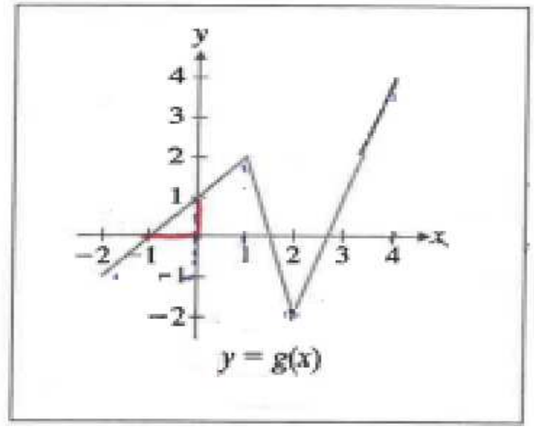
3) $h(x)=f^3(x^2) \qquad x=2$

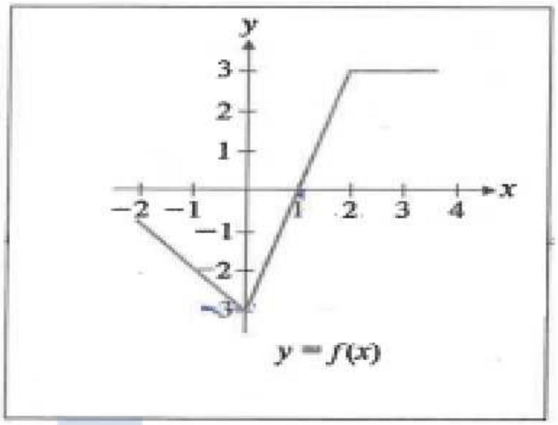
4) $h(x)=\sqrt[3]{g(x)+9x} \qquad x=2$

5) $h(x)=f^{-1}(x) \qquad x=2$

(ب) اوجد معادلة المماس للدالة $h(x)=f^{-1}(x)$ عند $x=2$

ارسم البياني المجاور يمثل بيان الدالة $f(x)$, $g(x)$. استفد من ذلك في إيجاد :





(1) أوجد $h^{/}(0)$ حيث

$h(x) = f(g(x))$

(2) أوجد $h^{/}(3)$ حيث

$h(x) = f(f(x))$

(3) أوجد $h^{/}(1)$ حيث

$h(x) = g(f(x))$

(1) إذا كان $y = f(x^2 + x)$ وكان $f'(2) = -1$ ، فأوجد $\frac{dy}{dx}$ عند $x = 1$

(2) اذا علمت ان: $h(x) = f(x^2 + g(x))$ اوجد $h'(-2)$

$g(-2)$	$f'(3)$	$g'(-2)$
-1	-4	2

(3) إذا كان $f(\frac{1}{x}) = 2x^3 - 3x + 1$ فاوجد $f'(3)$.

(4) إذا علمت أن $y = u^3 - 5u$

وكان $f'(1) = 2$ ، $f(1) = 1$ أوجد $\frac{dy}{dx}$ عند $x = 1$

(1) إذا كانت $f(x) = x^3 - 3$ وكانت $g(x) = f^{-1}(x)$ ، فاوجد $g^{/}(5)$

(2) إذا كانت $f(x) = x^3 + 4x - 1$ وكانت $g(x) = f^{-1}(x)$ ، فاوجد $g^{/}(-1)$

(3) إذا كانت $f(x) = x^3 + 2sinx + 2cosx$ وكانت $g(x) = f^{-1}(x)$ ، فاوجد $g^{/}(2)$

(4) إذا كانت $f(x) = x^3 + 5x + 6$ وكانت $g(x) = f^{-1}(x)$ ، فاوجد $g^{/}(x)$

(1) إذا كانت $f(x) = \sqrt[3]{2x^2 + a}$ وكانت $f^{/}(3) = \frac{4}{9}$ فاوجد قيمة a ؟

(2) لتكن

$$f(x) = \begin{cases} 1 + cos2x & , x \geq \frac{\pi}{4} \\ a + bx & , x < \frac{\pi}{4} \end{cases}$$

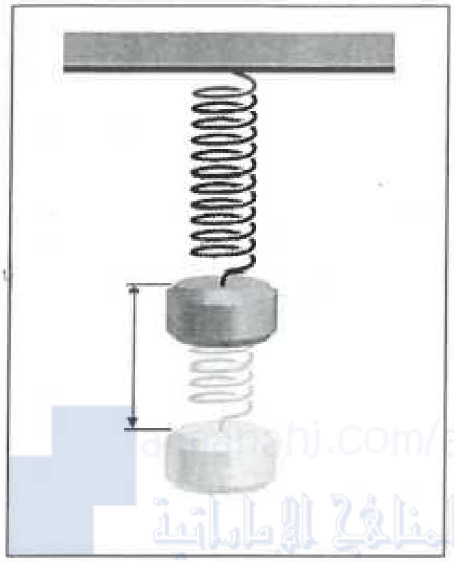
دالة قابلة للاشتقاق عند $x = \frac{\pi}{4}$ فاوجد قيمة كل من a , b

(1) أوجد قيم x يكون التي عندها المماس للدالة $f(x) = x - sin2x$ أفقي على المنحنى :

(2) أوجد قيمة x التي يصنع عندها المماس لمنحنى الدالة $f(x) = x - sin2x$ مع الاتجاه الموجب لمحور السينات زاوية مقدارها 45°

(3) أوجد قيمة x التي تجعل الدالة $f(x) = \sqrt[3]{x^3 - 3x^2 + 2x}$ غير قابلة للاشتقاق

لتكن $u(t) = 4\cos(2t)$ تقيس مقدار الازاحة لكتلة معلقة في زنبرك لمدة t ثانية بعد تحريرها.



(أ) احسب السرعة المتجهة عند أي زمن

(ب) اوجد اقصى سرعة متجهه للزنبرك

(ج) اوجد الزمن الذي تكون فية السرعة المتجهه أكبر ما يمكن

(د) احسب موقع الجسم عندما تتعدم سرعتة

يتحرك جسم على محور السينات حسب العلاقة : $S(t) = 10\cos\left(t + \frac{\pi}{4}\right)$ حيث S بالمتر و t بالثانية

أجب عما يلي :

(أ)ما الموضع الإبتدائي للجسم

(ب)احسب أبعد نقطة يصل إليها الجسم من جهة اليمين .

(جـ)متى يصل الجسم إلى نقطة الأصل (جميع الحلول).

(د)احسب سرعة الجسم المتجهة عند زمن االوصول إلى نقطة الوصول .

(هـ)احسب موقع الجسم عندما تنعدم السرعة

(و)احسب تسارع الجسم عندما تنعدم السرعة .

(1) اوجد الدالة $g(x)$ التي تجعل $g^{/}(x) = f(x)$.

$(a)\ \ f(x) = 2x(x^2+3)^3$

$(b) f(x) = \dfrac{cosx}{\sqrt{sinx+1}}$

(2) تسمى الدالة $f(x)$ دالة زوجية إذا حققت $f(-x) = f(x)$ لكل قيم x

تسمى دالة فردية إذا حققت $f(-x) = -f(x)$ لكل قيم x

أثبت أن مشتقة الدالة الزوجية دالة فردية .

تذكر

خاصية تغير الأساس

$$a^x = e^{x \ln a}$$

$$log_a x = \frac{lnx}{lna}$$

مشتقة الدوال الاسية

$$\frac{d}{dx}e^{f(x)} = e^{f(x)} \times f'(x)$$

$$\frac{d}{dx}a^{f(x)} = a^{f(x)} \times f'(x) \times ln\, a$$

$$\frac{d}{dx}e^x = e^x$$

$$\frac{d}{dx}a^x = a^x \times ln\, a$$

مشتقة الدوال اللوغارتمية

$$\frac{d}{dx}ln\, f(x) = \frac{f'(x)}{f(x)}$$

$$\frac{d}{dx}log_a\, f(x) = \frac{f'(x)}{f(x) \times ln\, a}$$

$$\frac{d}{dx}ln\, x = \frac{1}{x}$$

$$\frac{d}{dx}log_a\, x = \frac{1}{x \times lna}$$

ملاحظة : يمكن الاستفادة من خواص الأسس واللوغاريتمات قبل الاستقاق

اوجد $\frac{dy}{dx}$ في كل مما يلي :

(1) $y = 2e^{-3x}$

(2) $y = (\frac{1}{e})^{x^2-1}$

(3) $y = e^{\sin x}$

(4) $y = 2^{\tan x}$

(5) $y = 3^{\sqrt{x}}$

اوجد $\frac{dy}{dx}$ في كل مما يلي :

(1) $y = \frac{x^2}{e^{3x}}$

(2) $y = x^2 e^{\cos x} + \ln x$

(3) $y = 5^{2x} + \ln(x^2 - 5x)$

(4) $y = e^{\sqrt{x}} + \ln(2 - \cos x)$

(5) $y = \ln(\sec x + \tan x)$

(6) $y = \ln(\frac{1}{x}) + \ln(e^{\sec x}) + e^{\ln x}$

(7) $y = \frac{e^{\sqrt{x^2+1}}}{2x}$

اوجد $\frac{dy}{dx}$ في كل مما يلي :

(1) $y = 2^{\cos x} + \log_2 x$

(2) $y = \log_5(\sin 2x)$

(3) $y = e^{1/x} + x\log_3 x$

(4) $y = \ln(\tan^2 x^3)$

(5) $y = \ln(x-1) + \log_3(3^{\sec x}) + e^{2\ln x}$

أوجد $\frac{dy}{dx}$ في كل ممايأتي :

$$(1)\ y = x\ ln\left(\sqrt{x^2+1}\right) - (lnx)^2$$

$$(2)\ y = e^{tanx} lnx + e^{2lnx}$$

$$(3)\ y = \sqrt[3]{ln(x^2-1)}$$

$$(4)\ y = ln\left(\frac{x+sinx}{1-cosx}\right)$$

$$(5)\ y = ln\left(\sqrt{e^x+sinx}+\sqrt{sinx}\right) + ln\left(\sqrt{e^x+sinx}-\sqrt{sinx}\right)$$

(1) إذا كان : $f(x) = e^{2x}$ فاوجد :

$(a)\ f^{10}(x)$

$(b)\ f^{100}(x)$

(2) إذا كان : $f(x) = e^{2x} + cos2x - x$ فاوجد :

$(a)\ f^{11}(x)$

$(b)\ f^{21}(0)$

$(c)\ \lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}$

استخدم التفاضل اللوغاريتمي:

أوجد $\frac{dy}{dx}$ في كل ممايأتي :

$(1)\ y = \left(\frac{1}{2}\right)^{x^2}$

$(2)\ y = x^x$

$(3)\ y = x^{\sin x}$

استخدم التفاضل اللوغاريتمي:

أوجد $\frac{dy}{dx}$ في كل ممايأتي :

$(1)\ y = (x^2)^{3x}$

$(2)\ y = x^{\sqrt{x}}$

$(3)\ y = (sinx)^{lnx}$

(1) إذا كانت $f(x) = 4x - lnx^3$ وكانت $g(x) = f^{-1}(x)$ ، فاوجد $g^{/}(4)$

(2) أوجد جميع قيم x التي يكون عندها للدالة $f(x) = xe^{-2x}$ مماس أفقي.

(3) أوجد معادلة المماس للدالة $f(x) = 3^{tanx}$ عند $x = \frac{\pi}{4}$

(4) أوجد معادلة المماس للدالة $f(x) = lnx$ والتي تمر بنقطة الأصل.

(1) تحدد الدالة $v(t) = 100 \times 4^t$ قيمة الاستثمار لمبلغ 100 درهم بعد الزمن t أوجد **النسبة المئوية للمعدل اللحظي للتغير .**

النسبة المئوية للمعدل اللحظي للتغير

$$\frac{v'(t)}{v(t)} \times 100\%$$

(2)يبدأ تكاثر البكتيريا بالعدد 200 ويتضاعف ثلاث مرات كل يوم ، اوجد قانون لتكاثر البكتيريا

بعد t يوم ، ثم اوجد النسبة المئوية للمعدل اللحظي للتغير في التكاثر

(3) لتكن $c(t) = \dfrac{10}{9e^{-20t} + 1}$ تقيس تركيز مادة معينة بعد t ثانية من التفاعل

(أ)أوجد تركيز المادة عند بداية التفاعل .

(ب) أوجد تركيز المادة بعد 0.5 ثانية

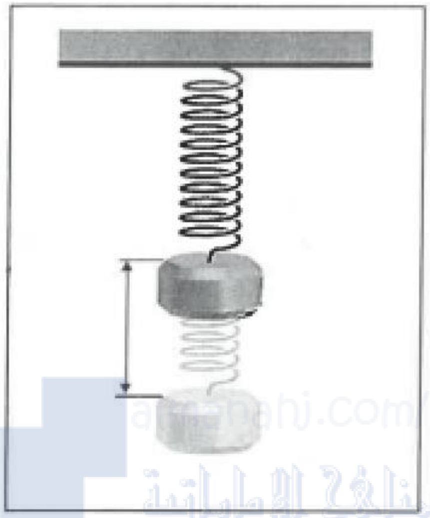
(جـ) أوجد$c'(t)$ وماذا تعني

(د) $c'(t) > 0$ وفسر النتيجة

(هـ)بين أن تركيز المادة لا يكمن ان يزيد عن 10 .

تعطى الدالة $s(t) = 10e^{-2t}\ sin4t$ موقع كتلة مرتبطة بزنبرك في أي زمن t.

أوجد :



(1) دالة السرعة المتجهة

(2) دالة التسارع

(3) هل السرعة المتجهة عند $t = 0$, $t = \pi$ متساوية ، فسر ذلك

(4) موقع أقصى سرعة متجهة للكتلة

(5) الزمن الذي تتحرك فيه الكتلة بسرعة .

(1) يمكن تقريب الدالة $f(x) = e^x$ بدالة حدودية من الدرجة الثانية $T(x) = ax^2 + bx + c$ حيث $f(x) \approx T(x)$ وتحقق الشروط

$$f(0) = T(0)\ , f^{/}(0) = T^{/}(0)\ , f^{//}(0) = T^{//}(0)$$

اوجد قيم الثوابت a, b, c التي تجعل $f(x) \approx T(x)$

(2) يمكن تقريب الدالة $f(x) = e^x$ بدالة نسبية على الشكل $T(x) = \dfrac{a + bx}{1 + cx}$ حيث

$$f(0) = T(0)\ , f^{/}(0) = T^{/}(0)\ , f^{//}(0) = T^{//}(0)$$

اوجد قيم الثوابت a, b, c التي تجعل $f(x) \approx T(x)$

الاشتقاق الضمني

تسمى الدالة التي على الصورة $y = f(x)$ دالة صريحة وغير ذلك تسمى علاقة ضمنية

اشتقاق العلاقات الضمنية

$$\boxed{\frac{d}{dx}\, g(y) = g^{/}(y)\,\frac{dy}{dx}}$$

(1) إذا كان $x^2 + y^2 = 2xy + e^x$ حيث $x \neq y$ ، اوجد $\frac{dy}{dx}$

(2) إذا كان $e^{x^2 y} - e^y = x$ ، اوجد $\frac{dy}{dx}$

(1) إذا كان: $e^{4y} - ln(y^2+3) = 2x$ ، اوجد $\frac{dy}{dx}$

(2) إذا كان: $x - 2y^2 = 3e^{\frac{x}{y}}$ ، اوجد $\frac{dy}{dx}$

(3) إذا كان $xy^2 + 5x = (2y+1)^3$ ، اوجد $\frac{dy}{dx}$

(1) إذا كان : $x^2 = \frac{x-y}{x+y}$ حيث $x \neq -y$ ، اوجد $\frac{dy}{dx}$

(2) إذا كان : $\frac{x}{y} - \frac{2}{x} = 5$ حيث $x \neq -y$ ، اوجد $\frac{dy}{dx}$

(3) إذا كان : $x\, cos(x+y) - y^2 = 8$ ، اوجد $\frac{dy}{dx}$

(1) إذا كان : $x^2y + lnx = xy + 1$ حيث $x \neq y$, اوجد $\frac{dy}{dx}$ عند $(1, e)$.

(2) إذا كان : $xy + y^2 = 1$, اوجد $\frac{d^2y}{dx^2}$ عند $(0, -1)$.

(3) إذا كان : $(y-1)^2 = 3xy + e^{4y}$, اوجد $\frac{dy}{dx}$ عند .

أوجد معادلة المماس لكل من العلاقات التالية عند النقطة المشار إليها :

(1) $x^2 + y^2 - 2y = 3 \quad , (2, 1)$

(2) $y^2 - xy + x = 5 \quad , (-1, 2)$

(3) $x^2y^2 = 3y + 1 \quad , (2, 1)$

(4) $\sqrt{xy} = 2 \quad , (1, 4)$

أوجد معادلة المماس لكل من العلاقات التالية عند النقطة المشار إليها :

$(1)\ \ x^2y^2 = 4x \qquad ,(1,2)$

$(2)\ \ 2xy + \pi\, siny = 2\pi \qquad ,\left(1,\frac{\pi}{2}\right)$

$(3)\ \ y^2 + xe^x = 2 \qquad ,(2,0)$

(1) أوجد ميل المماس لكل منحنى من المنحنيين التاليين عند النقطة $(0,0)$ ثم حدد الزاوية المحصورة بين المماسين .

$(a)\ y = x\sqrt{x+4}$

$(b)\ 2y + x + y^5 = x^5$

(2) أوجد ميل المماس لكل منحنى من المنحنيين التاليين عند نقطة التقاطع ثم حدد الزاوية المحصورة بين المماسين .

$(a)\ y = x$

$(b)\ y = \dfrac{1}{x^2}$

اوجد مواقع (المعادلات) كل المماسات الأفقية والرأسية للمعادلة :

$$(1)\ x^2 + y^2 - 3y = 0$$

$$(2)\ x^2 + y^2 - 2y = 3$$

(1) إذا كان : $x = tany$ $\quad \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{x^2 + 1}$

(2) إذا كان : $6x^2 + 5 = 4xy$ فأثبت أن $xy^{//} + 2y^{/} = 3$

(3) إذا كانت : $xy = sinx$ فأثبت أن $2y^{/} + x\left(y + y^{//}\right) + 0$

(4) إذا كانت : $x^2 + y^2 = 1$ فأثبت أن $y^3 y^{//} + 1 = 0$

مشتقات الدوال المثلثية العكسية:

$$\frac{d}{dx}\sin^{-1}x=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad , \quad |x|<1$$

$$\frac{d}{dx}\cos^{-1}x=\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} \quad , \quad |x|<1$$

$$\frac{d}{dx}\tan^{-1}x=\frac{1}{x^2+1}$$

$$\frac{d}{dx}\cot^{-1}x=\frac{-1}{x^2+1}$$

$$\frac{d}{dx}\sec^{-1}x=\frac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}} \quad , \quad |x|>1$$

$$\frac{d}{dx}\csc^{-1}x=\frac{-1}{|x|\sqrt{x^2-1}} \quad , \quad |x|>1$$

$$\frac{d}{dx}\sin^{-1}f(x)=\frac{1}{\sqrt{1-[f(x)]^2}}f'(x)$$

إذا كان $y=\sin^{-1}x$ فأثبت أن $\frac{d}{dx}\sin^{-1}x=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

اوجد $\frac{dy}{dx}$ في كل ممايأتي :

$(1)\ y = cos^{-1}2x$

$(2)\ y = sin^{-1}e^{2x}$

$(3)\ y = tan^{-1}\left(\frac{1}{x^2}\right)$

$(4)\ y = sec^{-1}\ lnx$

$(5)\ y = cot^{-1}\ sinx$

$(6)\ y = csc^{-1}\left(\sqrt{x}\right)$

اوجد $\frac{dy}{dx}$ في كل ممايأتي :

$(1)\ y = sin(cos^{-1}x^2)$

$(2)\ y = e^{tan^{-1}x}$

$(3)\ y = tan^{-1}(cos\ 2x)$

$(4)\ y = \ sin^{-1}\ sinx$

$(5)\ y = xsin^{-1}\ x$

$(6)\ y + sin^{-1}\ xy = x$

أوجد مجال الدالة $f(x)$ في الحالات التالية :

$(1)\ f(x) = sin^{-1}(x^3 + 1)$

$(2)\ f(x) = sin^{-1}(\sqrt{x})$

أوجد مجال الدالة $f^{/}(x)$ في الحالات التالية :

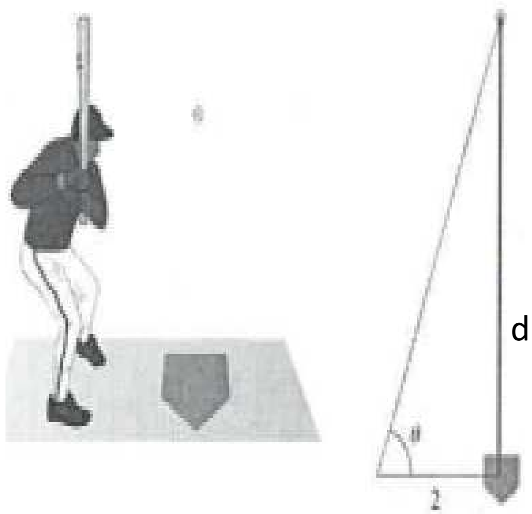
$(1)\ f(x) = sin^{-1}(2x - 1)$

$(2)\ f(x) = sin^{-1}(\sqrt{x})$

(1) تحدد المعادلة $\left(P+\frac{5}{V^2}\right)(V-0.03)=9.7$ العلاقة بين الحجم V والضغط P لغاز معين في ظروف خاصة $\frac{dV}{dP}$ عند النقطة $(5,1)$

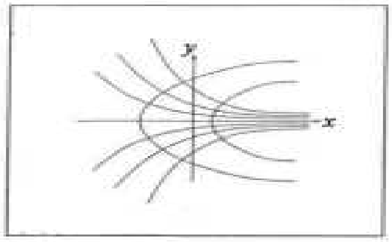
(2) يقف لاعب كرة البيسبول على بعد قدمين من اللوح الرئيس للكرة ويضرب كرته بشكل أفقي وبسرعة

متجهة $130 ft/s$، ما معدل التغير في زاوية النظر للاعب لمتابعة الكرة بينما تعبر اللوح الرئيس



(1) وضح أن عائلة المحنيات $y = \frac{c}{x}$ و $y^2 = x^2 + k$ تكون متعامدة

(بين أن المماسات للمنحنيات متعامدة عند نقطة التقاطع)



مساعدة

اوجد ميل المعادلة الأولى m_1

واجعلة فقط بدلالة x و y

اوجد ميل المعادلة الثانية m_2

واجعلة فقط بدلالة x و y

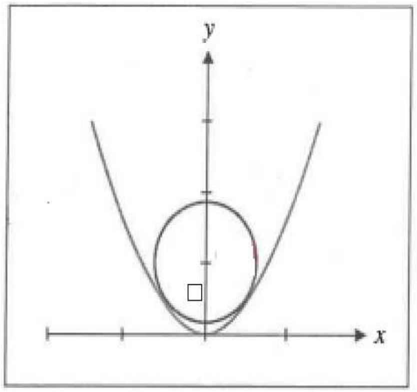
بين ان

$m_1 \times m_2 = -1$

(2) وضح أن عائلة المحنيات $x^2 + y^2 = cx$ و $y^2 + x^2 = ky$ تكون متعامدة

(1) الشكل المجاور يبين معادلة دائرة نصف قطرها r ومركزها $(0, c)$، تمس قطع مكافئ معادلته

$y = x^2$ بين أن $c = r^2 + \frac{1}{4}$



(2) اوجد معادلة الدائرة نصف قطرها r ومركزها $(0, c)$، وتمس القطع مكافئ الذي معادلته

$y = x^2$

القطع الزائد

$$sinhx = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

$$coshx = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

$$sinhx + coshx = e^x$$

$$tanhx = \frac{sinhx}{coshx}$$

$$cothx = \frac{coshx}{sinhx}$$

$$sechx = \frac{1}{coshx}$$

$$cschx = \frac{1}{sinh}$$

مشتقات الدوال الزائدية

$$\frac{d}{dx} sinhx = coshx$$

$$\frac{d}{dx} coshx = sinhx$$

$$\frac{d}{dx} tanhx = sech^2 x$$

$$\frac{d}{dx} cothx = -csch^2 x$$

$$\frac{d}{dx} sechx = -sechxtanhx$$

$$\frac{d}{dx} cschx = -cschx\, cothx$$

مشتقات الدوال الزائدية العكسية

$$\frac{d}{dx} sinh^{-1}x = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$$

$$\frac{d}{dx} cosh^{-1}x = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$$

$$\frac{d}{dx} tanh^{-1}x = \frac{1}{1-x^2}$$

$$\frac{d}{dx} coth^{-1}x = \frac{1}{1-x^2}$$

$$\frac{d}{dx} sech^{-1}x = \frac{-1}{x\sqrt{1-x^2}}$$

$$\frac{d}{dx} csch^{-1}x = \frac{-1}{|x|\sqrt{1+x^2}}$$

تذكر ان :

$$sinh^{-1}x = ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$$

$$cosh^{-1}x = ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right) \ , |x| \geq 1$$

$$tanh^{-1}x = \frac{1}{2} ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) \ , |x| < 1$$

اوجد $\frac{dy}{dx}$ في كل ممايأتي :

$(1)\ y = sinh(3x - 1)$

$(2)\ y = tanh\ x^2$

$(3)\ y = csch\ 4x$

$(4)\ y = sech\sqrt{x}$

$(5)\ y = sinh\ e^{2x}$

$(6)\ y = csch^4 x$

$(7)\ y = \sqrt{sinhx + 1}$

اوجد $\frac{dy}{dx}$ في كل ممايأتي :

$(1)\ y = sinh^3x + sinh3x$

$(2)\ y = x\ coshx$

$(3)\ y = \frac{x}{x + coshx}$

$(4)\ y = e^{2x}cosh3x$

$(5)\ y = x^2cosh^2x$

$(6) xy = x + coshx^2$

اوجد $\frac{dy}{dx}$ في كل ممايأتي :

$(1)\ y = sinh^{-1}\sqrt{x}$

$(2)\ y = cosh^{-1}\ tanx$

$(3)\ y = tanh^{-1}(x^2)$

$(4)\ y = tanh^{-1}sinx$

$(5)\ y = sech^{-1}e^{4x}$

اوجد $\frac{dy}{dx}$ في كل ممايأتي :

$(1)\ y = x^2 sin^{-1} 4x$

$(2)\ y = \sqrt{1 + tan^{-1} 2x}$

$(3)\ y = e^{tan^{-1} x}$

$(4)\ y = sin\ 2x\ cosh 3x$

$(5)\ xy = x^2 + coshy$

نظرية القيمة المتوسطة للمشتقات:

إذا كانت الدالة $y = f(x)$

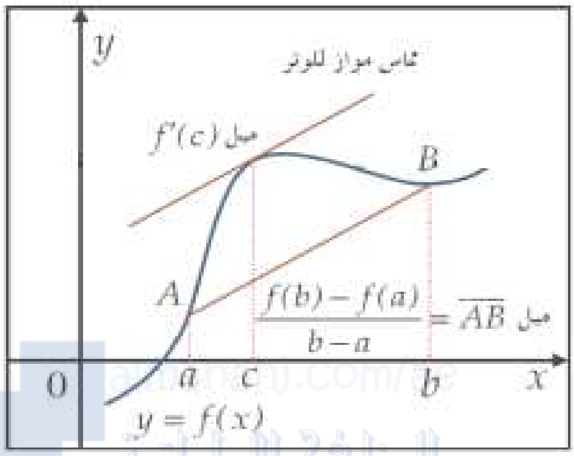
* متصلة على الفترة المغلقة $[a, b]$

* قابلة للاشتقاق على الفترة المفتوحة (a, b)

فإنه توجد نقطة واحدة على الأقل c

في الفترة (a, b) يكون عندها

$$f^{/}(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$



الدالة لا تحقق شروط نظرية القيمة المتوسطة إذا لم يتحقق أحد الشرطين او كلاهما بمعنى إذا كانت الدالة غير متصلة على الفترة $[a, b]$ أو غير قابلة للاشتقاق على الفترة المفتوحة (a, b)

نظرية رول:

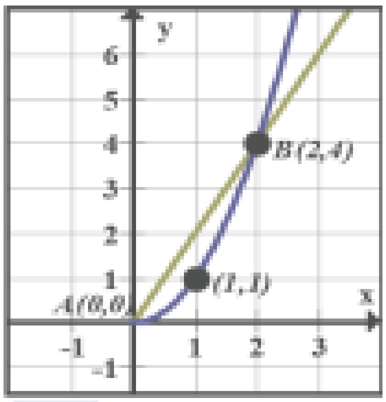
في نظرية القيمة المتوسطة إذا كانت $f(a) = f(b)$ فإن يوجد c على الأقل تنتمي إلى (a, b)التي تحقق $f^{/}(c) = 0$ وتسمى نظرية رول

ملاحظات مهمة:

إذا كانت$f(x)$ دالة متصلة على $[\ a\ ,\ b\ ]$ وكانت قابلة للاشتقاق على (a, b) ويوجد n من الجذور للدالة $f(x)$ في الفترة $[a, b]$ فإن للدالة $f^{ظ}(x)$ على الأقل $n - 1$ من الجذور تنتمي الفترةإلى (a, b)

(1) بين أن الدالة $f(x) = x^2$ تحقق شروط القيمة المتوسطة على الفترة $[0, 2]$ ثم اوجد c في المعادلة

$f'(c) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$ على هذه الفترة



(2) بين أن الدالة $f(x) = x^3 + 1$ تحقق شروط القيمة المتوسطة على الفترة $[-3, 1]$ ثم اوجد c

(3) بين أن الدالة $f(x) = x^3 - 2x^2 + x$ تحقق شروط القيمة المتوسطة على الفترة $[0, 2]$ ثم اوجد c

(1) إذا كانت : $f(x) = x^2 + x + 1$

أثبت أن الدالة f تحقق شروط نظرية القيمة المتوسطة على الفترة $[0, 4]$

اوجد قيمة C في الفترة $(0, 4)$ بحيث $f^{/}(c) = \frac{f(4) - f(0)}{4}$

(2) إذا كانت : $f(x) = 4 - x + sinx$ حيث x تقع في الفترة $[-\pi , \pi]$

أثبت أن الدالة f تحقق شروط نظرية القيمة المتوسطة على هذه الفترة ثم اوجد قيمة C

(3) إذا كانت $f(x) = \begin{cases} 2x & , 0 \le x \le 1 \\ x^2 + 1 , & 1 < x \le 2 \end{cases}$ بين أن الدالة تحقق شروط نظرية القيمة المتوسطة

ثم أوجد كل قيمة من C التي تعينها النظرية.

أي من الدوال التالية تحقق شروط نظرية القيمة المتوسطة على الفترة $[0,3]$ مع ذكر السبب .

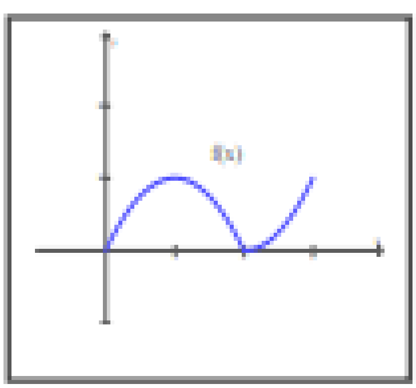
$(1)\ f(x) = \sqrt[3]{x-1}$

$(2)\ f(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$

$(3)\ f(x) = |x+1|$

$(4)\ f(x) = \begin{cases} x^2 + x\ , x > 2 \\ 5x - 4, x \le 2 \end{cases}$

(5)



(1) بفرض أن $f(x)$ دالة متصلة على الفترة $[2,5]$ وقابلة للاشتقاق على الفترة $(2,5)$

<u>اجب عما يلي :</u>

(أ) هل $f(x)$ تحقق نظرية القيمة المتوسطة ؟

(ب) إذا كانت $2 \le f^{/}(x) \le 5$ من أجل جميع قيم x في الفترة $(2,5)$

أثبت أن $6 \le f(5) - f(2) \le 15$

(2) إذا كانت $f(x) = x^2 + ax$ تحقق نظرية القيمة المتوسطة على الفترة $[0,3]$ وكان $f^{/}(c) = 1$ حيث $c \in (0,3)$ أوجد :

(أ) قيمة الثابت a

(ب) قيمة الثابت c

(1) إذا كانت $f(x) = x^3 + x^2$ فاوجد قيمة(قيم) C التي تحقق نظرية رول على الفترة $[-1, 1]$.

(2) إذا كانت $f(x) = sinx + cosx$ فاوجد قيمة(قيم) C التي تحقق نظرية رول على الفترة $[0, \pi]$

(1) إذا كانت $f(x) = x + \frac{4}{x}$ فاوجد قيمة C التي تحقق نظرية رول على الفترة $[1, 4]$.

(1) أثبت أن للدالة $f(x) = x^5 + 4x - 1$ لها جذر واحد

(2) أثبت أن للدالة $f(x) = x^3 + 4x - 3$ لها جذر واحد

(3) أثبت أن للمعادلة $x^4 + 6x - 1 = 0$ حلان بالضبط

(1) استخدم نظرية القيمة المتوسطة لإثبات أن $|sinx| \leq |x|$ لكل $x \neq 0$

(2) استخدم نظرية القيمة المتوسطة لإثبات أن $|sinx - siny| \leq |x - y|$ لكل $x \neq y$

(3) إذا كانت $f(x)$ دالة متصلة على $[a, b]$ وكانت قابلة للاشتقاق على (a, b) حيث $f(a) = a , f(b) = b$ فأثبت أنه يوجد عدد مثل C على الأقل تنتمي إلى (a, b) بحيث $f(c) = 1$

(4) إذا كانت $f(x), g(x)$ دوال متصلة على $[a, b]$ وكانت قابلة للاشتقاق على (a, b) حيث $f(a) = a , f(b) = b$ فأثبت أن للدالتين مماسان متوازيان عند نقطة ما في الفترة (a, b)