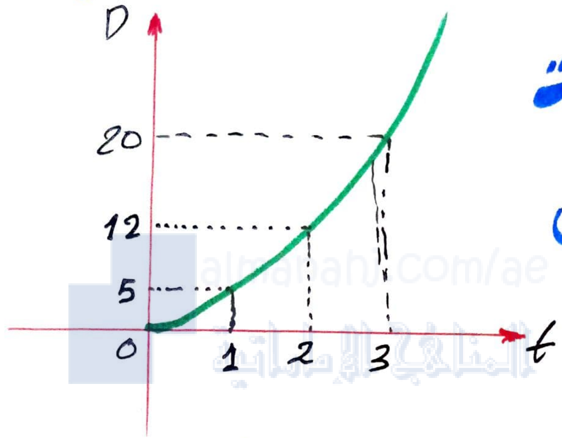
الدرس 4 - 4 .

28 - 1 - 2021

الدوال المتزايدة والمتناقصة

عند قياس درجة حرارة الماء لحظة تسخينها على منبع حراري نلاحظ :



كلما ازداد الزمن ازدادت درجة حرارة الماء

يمكن تمثيل هذه العلاقة بين الزمن t ودرجة الحرارة D وفق التمثيل البياني في الشكل المجاور .

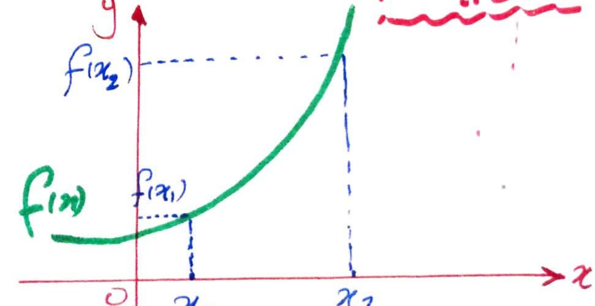
العلاقة بين الزمن ودرجة الحرارة علاقة طردية ، إذ كلما زاد الزمن t زادت درجة الحرارة D .

نسمي مثل هذه الدالة دالة متزايدة .

نواتج التعلم :

- معرفة تزايد وتناقص الدالة على فترات .
- علاقة التزايد والتناقص بالمشتقة والمماس .
- تحديد القيم القصوى بمعرفة التزايد والتناقص « اختبار المشتقة الأولى »

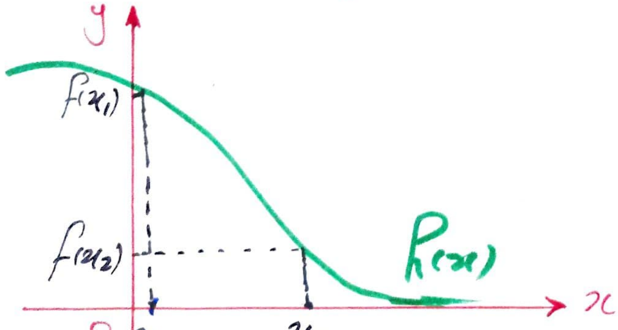
تعريف :



من الشكل نجد :

$$\boxed{x_2 > x_1 \Rightarrow f(x_2) > f(x_1)}$$

دالة متزايدة

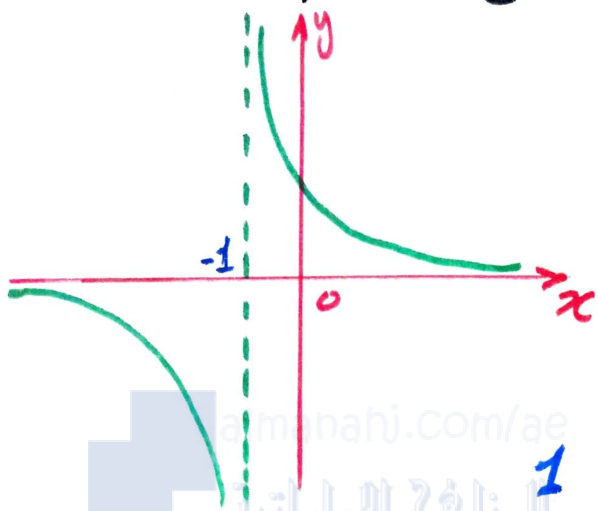


من الشكل نجد :

$$\boxed{x_2 > x_1 \Rightarrow f(x_2) < f(x_1)}$$

دالة متناقصة

«2» **تمرين:** لتكن الدالة $f(x)=\frac{3}{x+1}$ مجالها $\mathbb{R}-\{-1\}$
أثبت أن $f(x)$ متناقصة على $(-1,+\infty)$.



الحل: نفرض أن

$$\left.\begin{array}{l} x_1\in(-1,+\infty) \\ x_2\in(-1,+\infty)\end{array}\right\} \quad \boxed{x_2>x_1}$$

نضيف 1 لطرفي المتباينة :

$$x_2+1>x_1+1$$

تنقلب المتباينة

$$\frac{1}{x_2+1}<\frac{1}{x_1+1}$$

نضرب طرفي المتباينة بالعدد 3 .

$$\frac{3}{x_2+1}<\frac{3}{x_1+1}$$

$$f(x_2)<f(x_1)$$

ومنه $f(x)$ دالة متناقصة على الفترة $(-1,+\infty)$.

نظرية:

لتكن f اشتقاقية على الفترة I عندئذ :

1. اذا كانت $f'(x)>0$ على I فإن f متزايدة على I .
2. اذا كانت $f'(x)<0$ على I فإن f متناقصة على I .

تمرين: ادرس تزايد وتناقص الدالة $f(x)=x^3+3x$ على $(-\infty,+\infty)$
وحدد فترات التزايد والتناقص.

الحل: مشتقة الدالة $f'(x)=3x^2+3$
واضح أن $f'(x)>0$.
فالدالة $f(x)$ متزايدة تماما على $(-\infty,+\infty)$

ملاحظة:
عندما ندرس تزايد وتناقص الدالة يجب أن ندرس اشارة $f'(x)$

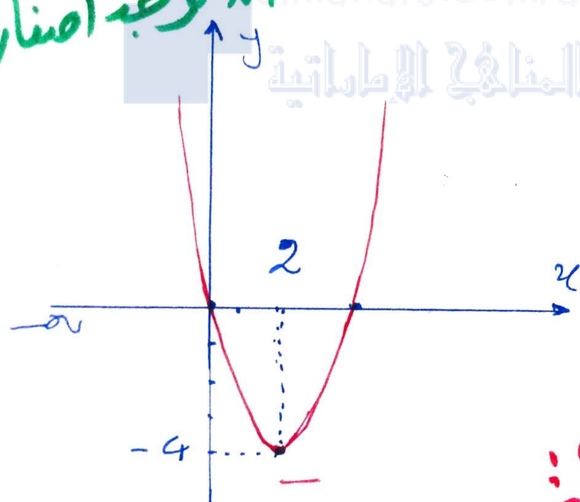
تمرين: ادرس سلوك الدالة $f(x) = x^2 - 4x$ على $\mathbb{R}$.
وارسم التمثيل البياني لها .

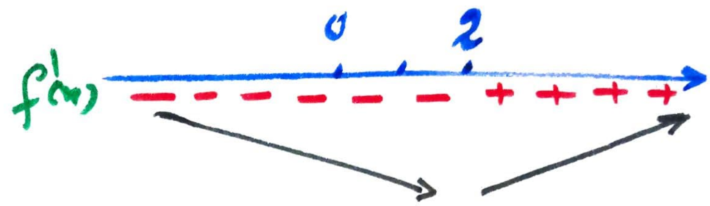
الحل: نشتق الدالة :

$$f'(x) = 2x - 4$$

$f'(x) = 0$ عند $x = 2$

ملاحظة:
لدراسة اشارة أي مقدار يجب أن نوجد أصفاره



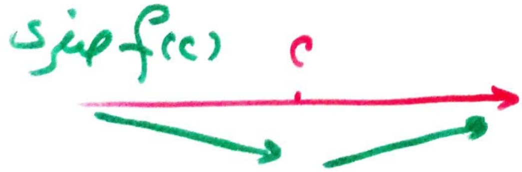


الدالة متناقصة $(-\infty, 2)$
الدالة متزايدة $(2, +\infty)$

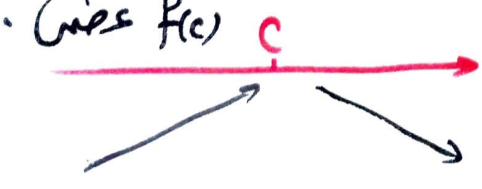
اختبار المشتقة الأولى لمعرفة القيم القصوى :

اذا كانت f اشتقاقية ومتصلة على الفترة $[a,b]$ وكانت $c \in [a,b]$ حيث c عدداً حرجاً عندئذ :

1. نقول عن $f(c)$ أنها صغرى اذا غيرت $f'(x)$ اشارتها من السالب الى الموجب عند c .



2. نقول عن $f(c)$ أنها عظمى اذا غيرت $f'(c)$ اشارتها من الموجب الى السالب عند c .



٤٠

تمرين: أوجد القيم القصوى المحلية للدالة

$$f(x)=3x^4+40x^3-0.06x^2-1.2x$$

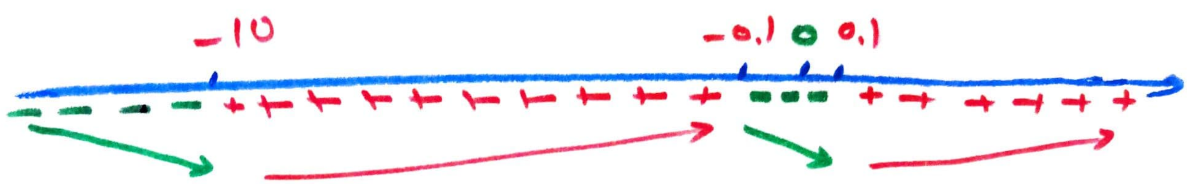
وارسم التمثيل البياني للدالة.

الحل: f اشتقاقية ومتصلة على $\mathbb{R}$.

$$f'(x)=12x^3+120x^2-0.12x-1.2$$

$$f'(x)=0 \Rightarrow 12x^3+120x^2-0.12x-1.2=0$$

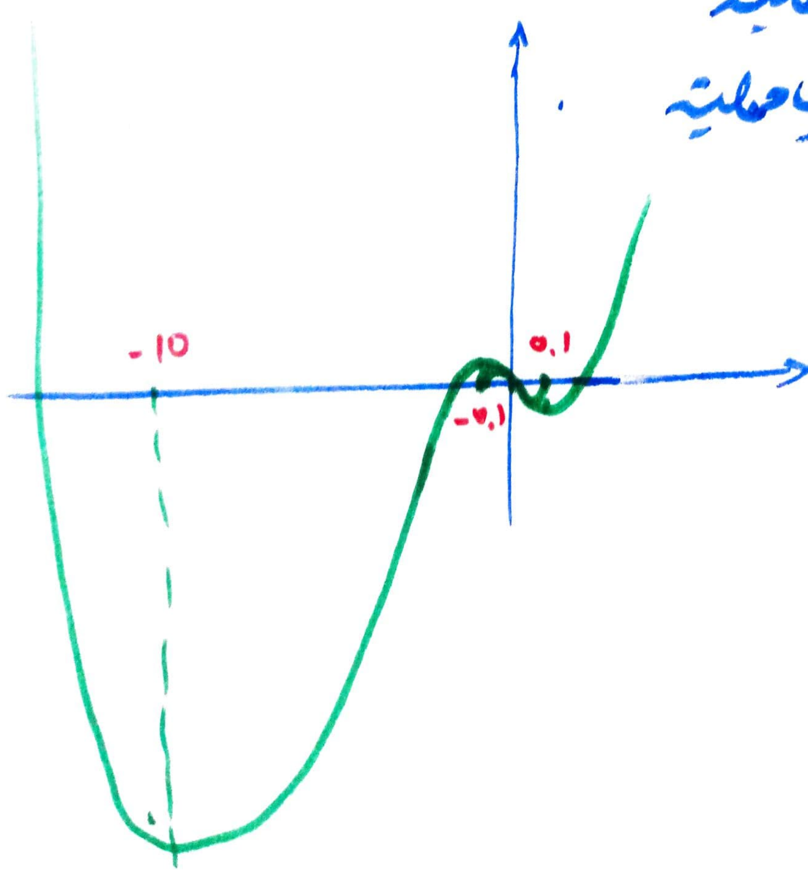
$$x=0.1 \quad , \quad x=-0.1 \quad , \quad x=-10$$



$f(0.1)$ قيمة صغرى محلية

$f(-0.1)$ قيمة عظمى محلية

$f(-10)$ قيمة صغرى محلية



تمرين: أوجد القيم القصوى للدالة

$$f(x) = x^{\frac{5}{3}} - 3x^{\frac{2}{3}}$$

الحل: نشتق الدالة

$$f'(x) = \frac{5}{3}x^{\frac{5}{3}-1} - 3\cdot\frac{2}{3}x^{\frac{2}{3}-1}$$

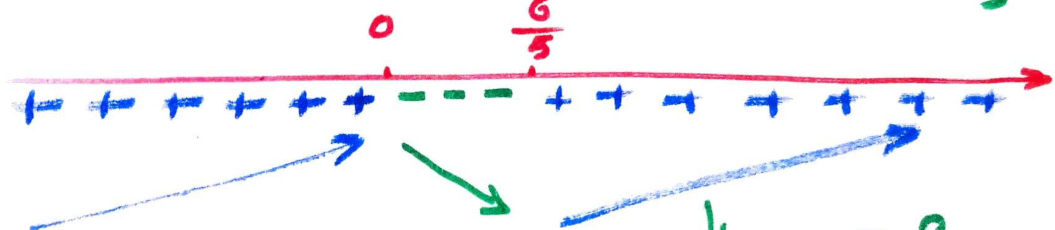
$$= \frac{5}{3}x^{\frac{2}{3}} - 2x^{-\frac{1}{3}} = \frac{5}{3}x^{\frac{2}{3}} - 2\cdot\frac{1}{x^{\frac{1}{3}}}$$

$(x^{\frac{1}{3}})$ $\quad (3)$

$$= \frac{5x-6}{3x^{\frac{1}{3}}}$$

$x = 0$ نقطة حرجة لأن f' غير موجودة عندها.

$x = \frac{6}{5}$ نقطة حرجة.

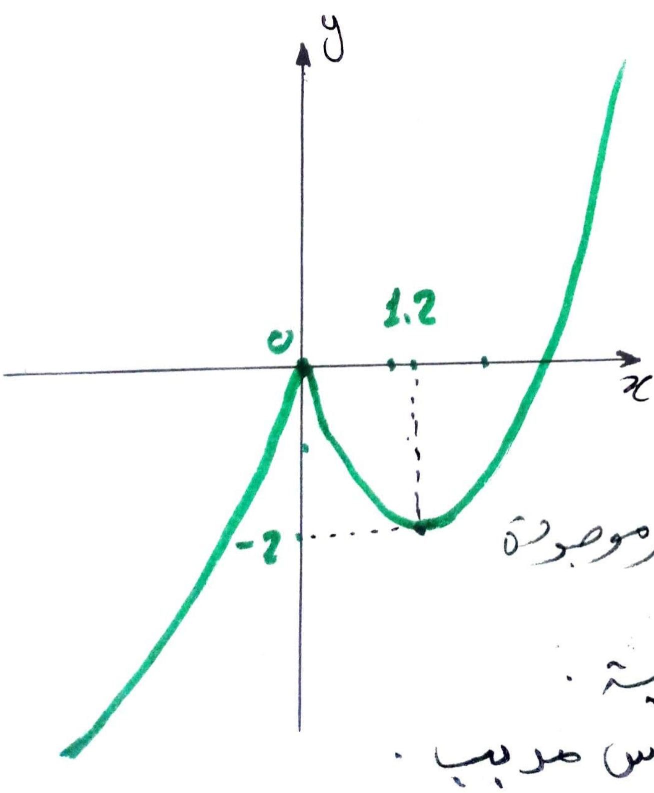


$f(0)$ قيمة عظمى محلية.

$f(\frac{6}{5})$ قيمة صغرى محلية.

$f(0) = 0$ $\quad (0,0)$

$f(\frac{5}{6}) = -2$ $\quad (1.2, -2)$



ملاحظة: عندما تكون $f'(x)$ غير موجودة عند c وكانت $f(c)$ هي قيمة عظمى أو صغرى محلية. فإن $f(c)$ تمثل هندسيا برأس مدبب.

7 : 267

الحل:

$f(x)=\sin x+\cos x$

دور الدالة $\frac{2\pi}{1}=2\pi$

ندرس ضمن المجال $[0,2\pi]$ ثم نكرر نفس الدراسة كل دور

f اشتقاقية ومتصلة على $[0,2\pi]$

$f'(x)=\cos x-\sin x$

$\cos x-\sin x=0 \Rightarrow \cos x=\sin x$

$\cos x=\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$

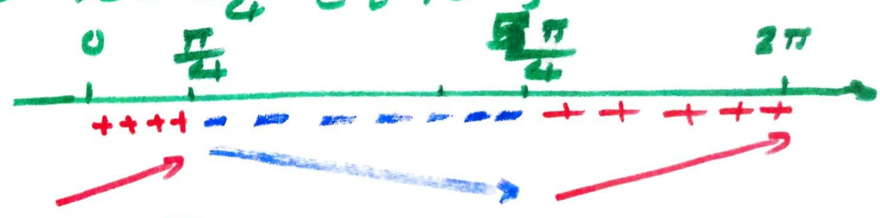
* $x=\frac{\pi}{2}-x+2\pi n \Rightarrow 2x=\frac{\pi}{2}+2\pi n$

$\boxed{x=\frac{\pi}{4}+\pi n}$ $n\in\mathbb{Z}$

* $x=-\frac{\pi}{2}+x+2\pi n \Rightarrow 0=-\frac{\pi}{2}+2\pi n$ مستحيلة

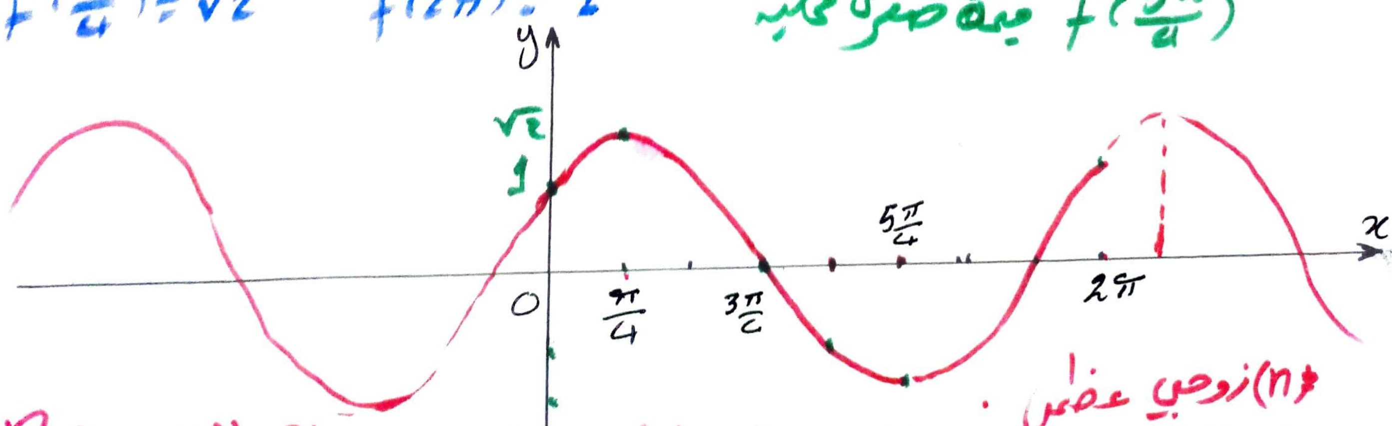
$n=0 \Rightarrow x=\frac{\pi}{4}\in[0,2\pi]$

$n=1 \Rightarrow x=\frac{5\pi}{4}\in[0,2\pi]$



$f(0)=1$ $f\left(\frac{5\pi}{4}\right)=-\sqrt{2}$ $f\left(\frac{\pi}{4}\right)$ قيمة عظمى محلية.

$f\left(\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}$ $f(2\pi)=1$ $f\left(\frac{5\pi}{4}\right)$ قيمة صغرى محلية



زوجي عظمى (n)

n فردي صغرى

الدالة دورية ولها عدد غير منتهٍ من القيم القصوى على $\mathbb{R}$.

رسم التمثيل البياني بمعلومية خصائص للدالة :

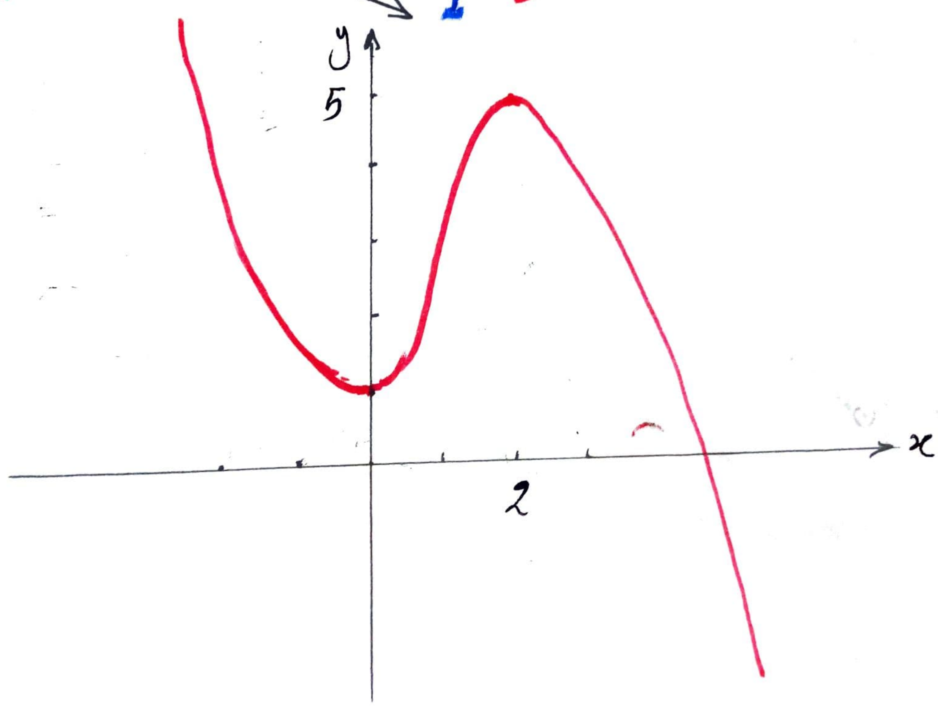
$\frac{27}{267}$

ارسم تمثيلاً بيانياً لدالة بالخصائص التالية :

- $f(0) = 1$ ، $f(2) = 5$.
- $f'(x) < 0$ لكل $x < 0$ و $x > 2$ ← $(-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$
- $f'(x) > 0$ لكل $0 < x < 2$. ← $(0, 2)$

الحل:

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$- - - - -$		$+ + + +$		$- - - - - -$	
$f(x)$		$\searrow$	1	$\nearrow$	5	$\searrow$	



"8"

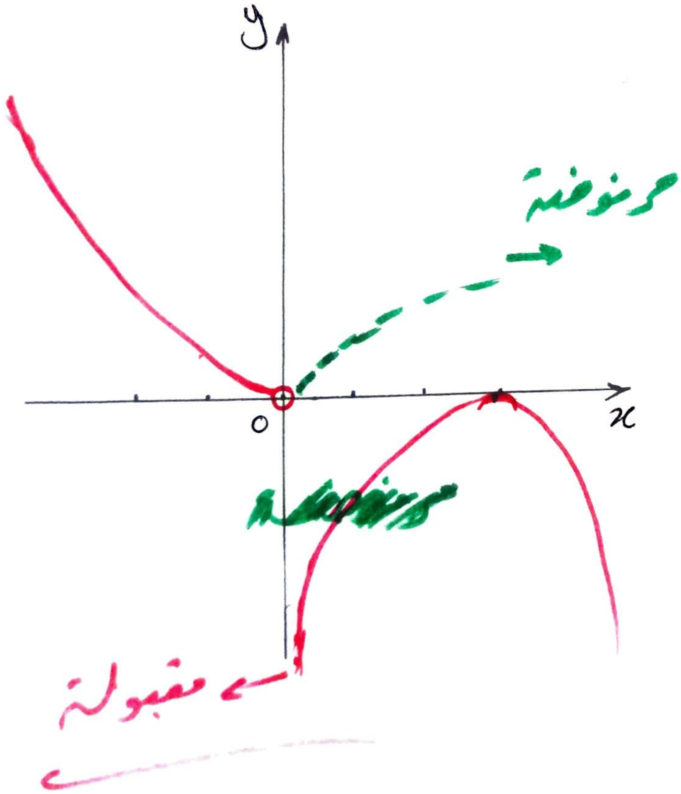
$\frac{29}{267}$

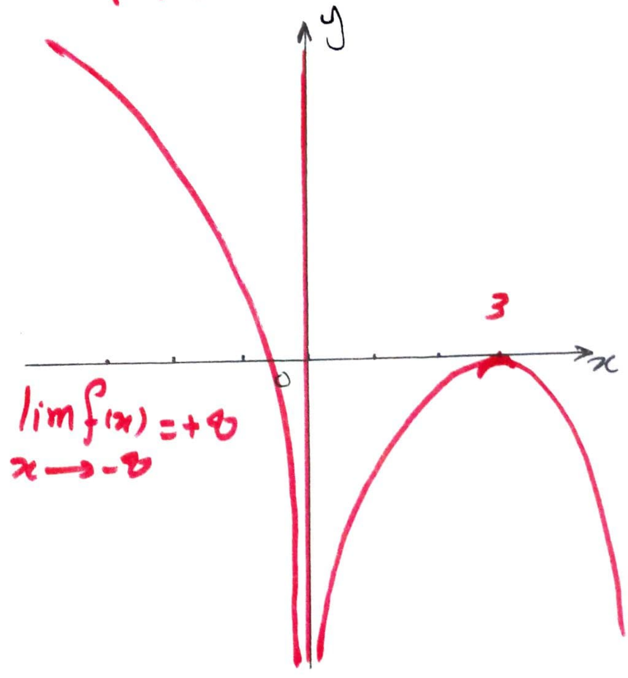
- $f(3)=0$
- $f'(x)<0$ عندما $x<0$ و $x>3$ ← $(-\infty,0)\cup(3,+\infty)$
- $f'(x)>0$ عندما $0<x<3$ ← $(0,3)$

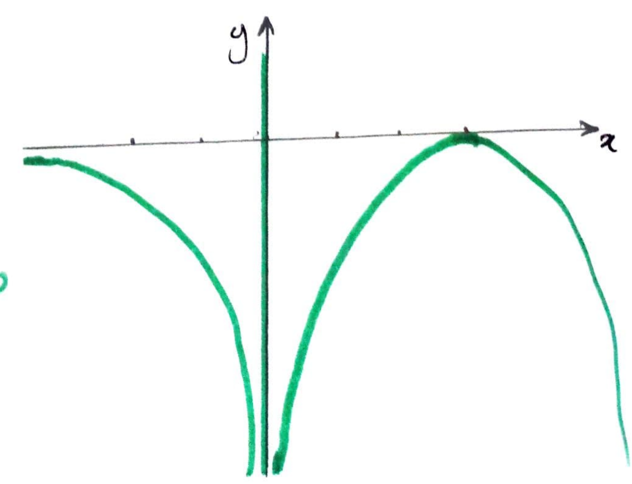
$f'(3)=0$

- $f(0)$ غير موجود . } قد يكون $x=0$ خط تقارب رأسي
- $f'(0)$ غير موجودة . } قد تكون $(0,0)$ فجوة

x	$-\infty$		0		3		$+\infty$
$f'(x)$		$- - - - - -$	‖	$+ + + + +$	0	$- - - - - -$	
$f(x)$		↘	‖	↗	$(3,0)$	↘	







$\lim_{x\to-\infty} f(x)=0$ $y=0$ خط تقارب أفقي

إيجاد خطوط التقارب والقيم القصوى والرسم: (دراسة الدالة) . ٩

$\frac{33}{267}$. جد كافة خطوط التقارب والقيم القصوى وارسم التمثيل البياني .

$$f(x) = \frac{x}{x^2-1}$$

ملاحظة:
- خطوط التقارب الرأسية هي القيم التي تجعل الدالة غير معرفة .
- خطوط التقارب الأفقية تنتج من نهاية الدالة عند $\pm\infty$

الحل: f معرفة على $(-\infty,-1)\cup(-1,1)\cup(1,+\infty)$

خطوط التقارب الرأسية $x=1$ ، $x=-1$

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x}{x^2-1} = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{x}{x^2} = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{1}{x} = 0$$

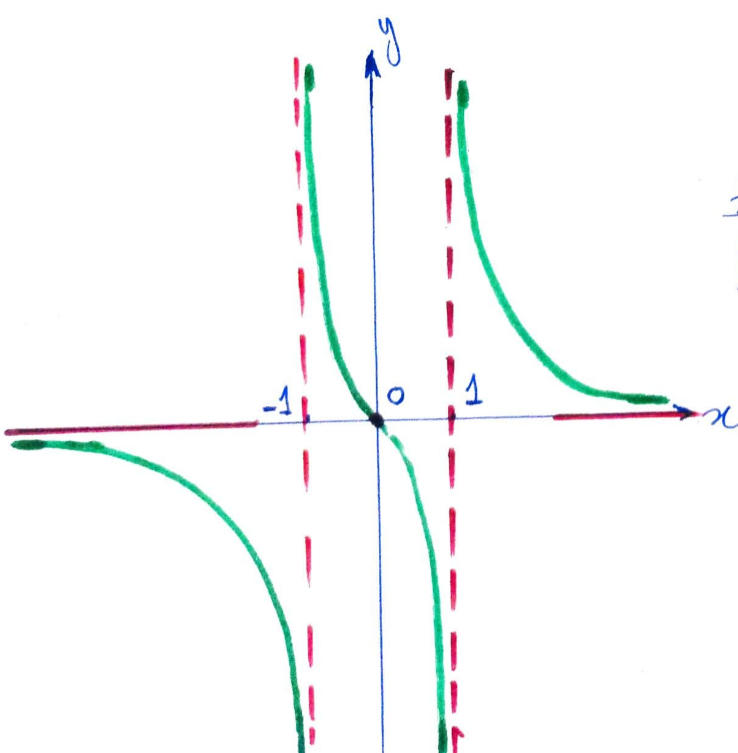
$y=0$ خط تقارب أفقي عند $-\infty$, $+\infty$.

- f اشتقاقية ومتصلة على كل من $(-\infty,-1),(-1,1),(1,+\infty)$.

$$f'(x) = \frac{1(x^2-1)-x(2x)}{(x^2-1)^2} = \frac{x^2-1-2x^2}{(x^2-1)^2}$$

$$= \frac{-1-x^2}{(x^2-1)^2} = -\frac{x^2+1}{(x^2-1)^2} < 0$$

لا يوجد قيم قصوى .



x	$-\infty$	-1		1		$+\infty$
$f'(x)$	$-$	||	$-$	||	$-$	
$f(x)$	↘	||	↘	||	↘	

نقاط مساعدة :

$f(0)=0 \quad (0,0)$

- نرسم خطوط التقارب أولاً .
- نرسم النقاط المميزة .
- نرسم منحنيات الدالة .

37
267

$$f(x)=\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$$

الحل: f معرفة على $(-\infty,+\infty)$

لا يوجد خطوط تقارب رأسية.

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \frac{-\infty}{+\infty}$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{|x|\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}=\lim\frac{x}{-x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{-\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}=-1$$

$y=-1$ مقارب أُفقي عند $-\infty$.

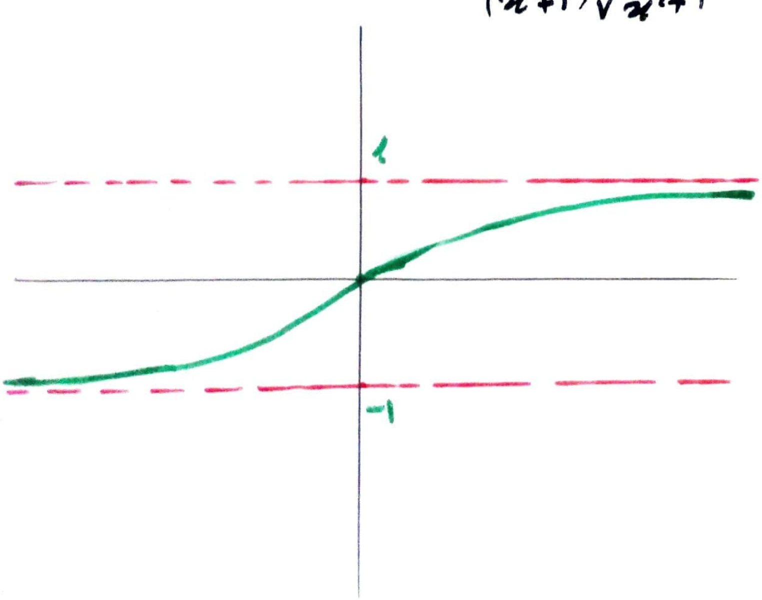
$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 1$$

$y=1$ خط تقارب أفقي عند $+\infty$.

f اشتقاقية ومتصلة على $\mathbb{R}$.

$$f'(x)=\frac{\sqrt{x^2+1}-x\cdot\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}}{x^2+1}=\frac{\frac{x^2+1-x^2}{\sqrt{x^2+1}}}{x^2+1}$$

$$=\frac{1}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}>0$$



x	$-\infty$		$+\infty$
f'	+	+ + +	+
f	-1	$\nearrow$	1

نقطة مساعدة

$f(0)=0$

$(0,0)$

.11.

$\dfrac{8}{267}$

$f(x)=\sin^2 x$.

الحل : الدالة $f(x)$ دورية دورها 2π ندرسها على $[0, 2\pi]$

الدالة اشتقاقية ومتصلة على $[0, 2\pi]$

$$f'(x) = 2\sin x\cos x = \sin 2x$$

$$f'(x)=0 \Rightarrow \sin 2x = 0 \Rightarrow 2x = 0 + \pi n$$

$$\Rightarrow \boxed{x = \frac{\pi}{2} n}$$

$n=0 \Rightarrow x=0 \Rightarrow f(0)=0$

$n=1 \Rightarrow x=\frac{\pi}{2} \Rightarrow f(\frac{\pi}{2})=1$

$n=2 \Rightarrow x=\pi \Rightarrow f(\pi)=0$

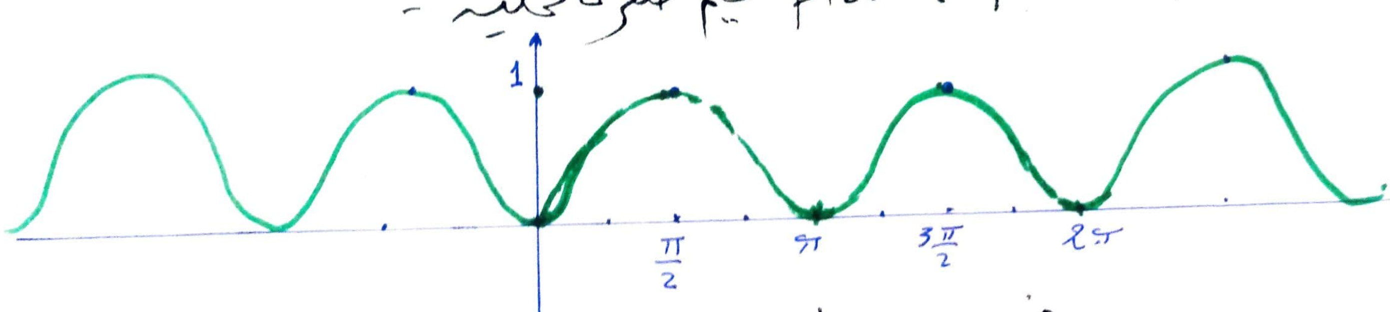
$n=3 \Rightarrow x=\frac{3\pi}{2} \Rightarrow f(\frac{3\pi}{2})=1$

$n=4 \Rightarrow x=2\pi \Rightarrow f(2\pi)=0$

x	0		$\frac{\pi}{2}$		π		$\frac{3\pi}{2}$		2π
$f'(x)$		$++++$		$----$		$++++$		$----$	
$f(x)$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$	

$f(\frac{\pi}{2})$ و $f(\frac{3\pi}{2})$ قيم عظمى محلية

$f(0)$ ، $f(\pi)$ ، $f(2\pi)$ قيم صغرى محلية .



$f(\frac{\pi}{2} + n\pi)$ قيم عظمى محلية .

$f(n\pi)$ قيم صغرى محلية .

..12.

$\frac{10}{267}$.

$y = \ln(x^2-1)$

الحل: معرفة بشرط $x^2-1>0$

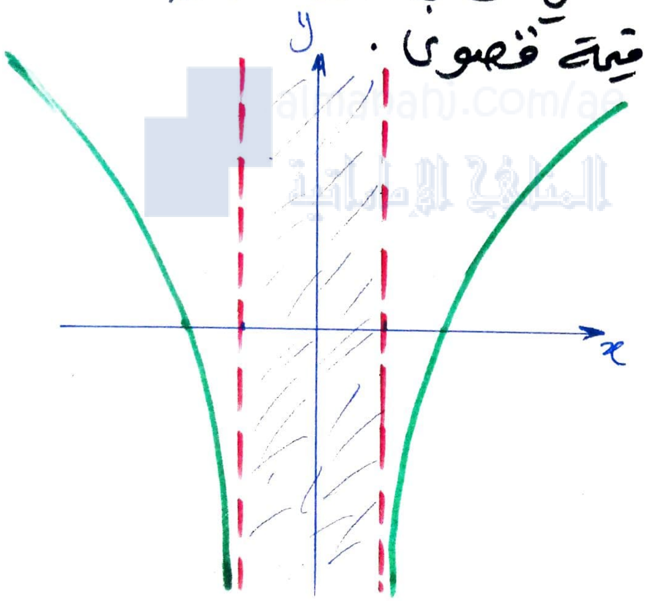
وهذا محقق على $(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$.

f اشتقاقية ومتصلة على $(1,+\infty)$ ، $(-\infty,-1)$

$$f'(x)=\frac{(x^2-1)'}{x^2-1}=\frac{2x}{x^2-1}$$

$f'(x)=0$ عندما $x=0$ لا تنتمي الى مجالات الدالة.

فهي ليست عددًا حرجًا و ليس قيمة قصوى.



x	$-\infty$		-1	1		$+\infty$
f'		$-\ -\ -\ -$			$+\ +\ +\ +$	
f		$\searrow$			$\nearrow$	

خطوط التقارب الرأسية هي

$x=1\ ,\ x=-1$

$\frac{9}{267}$. $f(x)=e^{x^2-1}$

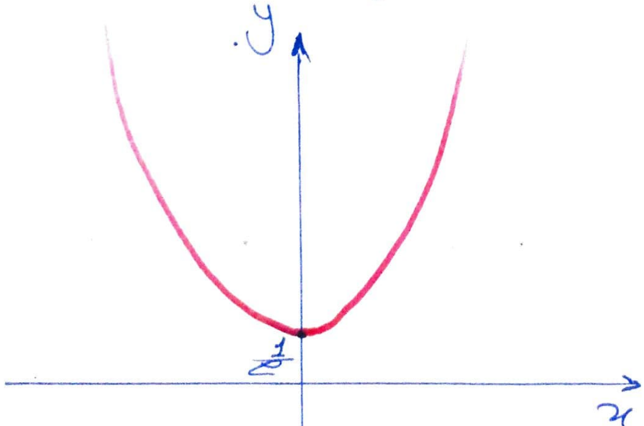
الحل: مجال الدالة $(-\infty,+\infty)$

f اشتقاقية على $(-\infty,+\infty)$ ومتصلة عليها.

$f'(x)=2x.\,e^{x^2-1}$

$f'(x)=0$ عندما $x=0$.

$f(0)=e^{-1}=\frac{1}{e}$



x	$-\infty$		0		$+\infty$
f'		$-\ -\ -$		$+\ +\ +$	
f		$\searrow$	$\frac{1}{e}$	$\nearrow$	

$f(0)$ قيمة صغرى محلية .