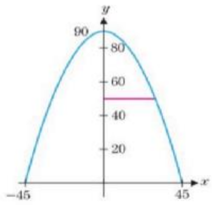
للهرم في ممفيس قاعدة مربعة يبلغ طول ضلعها 180 مترًا وارتفاعها 100 مترًا تقريبًا. أوجِد حجم الهرم باستخدام هذه القياسات.	1
تقدير الحجم من بيانات المقطع العرضي (الجدول أدناه) قدّر الحجم	2

x (cm)	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
$A(x)$ (cm^2)	0.0	0.1	0.4	0.3	0.6	0.9	1.2	0.8	0.6	0.2	0.1

 الشكل 6.15 $y=-\frac{2}{45}x^2+90$ **حساب حجم قبة** على فرض أنّ للقبّة مقاطع عرضية دائرية. لها رسم تخطيطي يُعطى بالعلاقة $y=-\frac{2}{45}x^2+90$ لكل $-45 \le x \le 45$ (بالسنتيمترات. يعطي هذا الأمر أبعادًا مشابهة لقبة المبنى في الشكل 6.13b.) يوضّح الشكل 6.15 تمثيلًا بيانيًا. أوجد حجم القبة.	3
أوجد حجم المجسّم مع مساحة المقطع العَرضي $A(x)$. **1.** $A(x)=x+2, -1 \le x \le 3$	4
أوجد حجم المجسّم مع مساحة المقطع العَرضي $A(x)$. **2.** $A(x)=10e^{0.01x}, 0 \le x \le 10$	5

أوجد حجم المجسّم مع مساحة المقطع العَرضي $A(x)$. 3. $A(x) = \pi(4-x)^2, 0 \le x \le 2$	6
أوجد حجم المجسّم مع مساحة المقطع العَرضي $A(x)$. 4. $A(x) = 2(x+1)^2, 1 \le x \le 4$	7
5. يبلغ ارتفاع الهرم الأكبر في الجيزة 152 مترًا. و يرتفع من قاعدة مربعة طول ضلعها 230 مترًا. احسب حجمه باستخدام التكامل.	8

يبلغ ارتفاع الهرم الأكبر في الجيزة 152 مترًا، و يرتفع من قاعدة مربعة طول ضلعها 230 مترًا. على فرض أنّه بدلًا من إكمال الهرم، توقف عمال البناء في الجيزة عند ارتفاع 70 مترًا (بهضبة علوية مربعة طول ضلعها 115 مترًا). احسب حجم هذا البناء.	9
7. يبلغ طول قبة كنيسة 10 أمتار بمقاطع عرضية مربعة. طول ضلع المربع الموجود في القاعد 1 متر، و طول ضلع المربع في الجزء العلوي 15 سنتيمتر و يتغيّر الضلع خطيًا بينهما. احسب الحجم.	10

.8 تحتوي علية منزل على مقاطع عرضية مستطيلة موازية للأرض و مقاطع عرضية مثلثة متعامدة على الأرض. إبعاد المستطيل 10 أمتار في 20 متر عند الجزء السفلي للعلية وتبلغ قاعدة المثلثات 10 أمتار و ارتفاع 3 أمتار. احسب حجم العلية.	11
.9 يتم إعطاء الرسم التخطيطي لقبة $y = 20 - \frac{x^2}{60}$ لكل $-20 \le x \le 20$ (بالأمتار). بمقاطع عرضية دائرية متعامدة على المحور y. أوجد حجمه.	12
.10 الرسم التخطيطي لقبة حجمها "ضعف" حجم تمرين 9 هو $y = 40 - \frac{x^2}{40}$ لكل $-40 \le x \le 40$ (بالأمتار). أوجد حجمه.	13

11. لإناء فخاري مقاطع عرضية دائرية بنصف قطر $4 + \sin \frac{x}{2}$ سنتيمتر لكل $0 \le x \le 2\pi$. ارسم صورة للإناء و احسب حجمه.	14
12. لإناء فخاري مقاطع عرضية دائرية بنصف قطر $4 - \sin \frac{x}{2}$ سنتيمتر لكل $0 \le x \le 2\pi$. ارسم صورة للإناء و احسب حجمه.	15
2. على فرض أنّ فحص تصوير MRI بيّن أنّ مساحات المقطع العرضي لشرائح متجاورة لورم كما هو مذكور في الجدول. استخدم قاعدة سمبسون لتقدير الحجم.	16

x (cm)	0.0	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0	1.2
$A(x)$ (cm^2)	0.0	0.2	0.3	0.2	0.4	0.2	0.0

39. إنّ قاعدة المجسّم V هي الدائرة $x^2 + y^2 = 1$. أوجد الحجم إذا كان لدى V مقاطع (a) عرضية مربّعة و (b) مقاطع عرضية على شكل نصف دائرة متعامدة على المحور x.	17
40. قاعدة المجسّم V هي مثلث رؤوسه $(-1, 0)$ و $(0, 1)$ و $(1, 0)$. أوجد الحجم إذا كان لدى V (a) مقاطع عرضية مربّعة و (b) مقاطع عرضية نصف دائرة متعامدة على المحور x.	18

41. قاعدة المجسّم V هي المنطقة المحدودة بواسطة $y = x^2$ و $y = 2 - x^2$. أوجد الحجم إذا كان لدى V (a) مقاطع عرضية مربّعة و (b) و مقاطع عرضية على شكل نصف دائرة و (c) مقاطع عرضية مثلثات متساوية الأضلاع متعامدة على المحور x.	19
42. قاعدة المجسّم V هي المنطقة المحدودة بواسطة $y = \ln x, x = 2$ و $y = 0$. أوجد الحجم إذا كان لدى V (a) مقاطع عرضية مربّعة و (b) مقاطع عرضية نصف دائرة و (c) مقاطع عرضية على مثلثة متساوية الأضلاع متعامدة على المحور x.	20

43. قاعدة المجسّم V هي المنطقة المحدودة بواسطة $y = e^{-2x}, y = 0, x = 0$ و $x = \ln 5$. أوجد الحجم إذا كان لدى V (a) مقاطع عرضية مربّعة و (b) مقاطع عرضية نصف دائرة متعامدة على المحور x.	21
44. قاعدة المجسّم V هي المنطقة المحدودة بواسطة $y = x^2$ و $y = \sqrt{x}$. أوجد الحجم إذا كان لدى V (a) مقاطع عرضية مربّعة و (b) ومقاطع عرضية على شكل نصف دائرة متعامدة على المحور x.	22

45. أوجد حجم تقاطعات الكرتين. تكوّنت إحداهما بدوران الدائرة $x^2 + y^2 = 1$ حول المحور y والأخرى تكوّنت بدوران الدائرة $(x-1)^2 + y^2 = 1$ حول $x = 1$.	23
46. لتكن S هي الكرة التي تكوّنت بدوران $x^2 + y^2 = 4$ حول المحور y وأنّ C هي الأسطوانة التي تكوّنت بدوران $4 \leq y \leq 4-$، حول المحور y. أوجد حجم تقاطع S مع C.	24

اوجد حجم الهرم الذي مقطعة العرضي مربع مساحتة $A(z)=\frac{4}{25}(10-z)^2$ وارتفاعة 10 متر	25
اوجد حجم المجسم الذي قاعدتة المنطقة المحدودة بالدالتين $y=x^2$ و $y=2-x^2$ ، $-1\le x\le 1$ المقاطع عرضية دائرية متعامدة على محور x	26
اوجد حجم المجسم الذي قاعدتة المنطقة المحدودة بالدالتين $y=x^2$ و $y=2-x^2$ ، $-1\le x\le 1$ المقاطع عرضية مربعة متعامدة على محور x	27

اوجد حجم المجسم الذي قاعدته المنطقة المحدودة بالدالتين $y = x^2$ و $y = 2 - x^2$ ، $-1 \le x \le 1$ المقاطع عرضية نصف دائرة متعامدة على محور x	28
اوجد حجم المجسم الذي قاعدته المنطقة المحدودة بالدالتين $y = x^2$ و $y = 2 - x^2$ ، $-1 \le x \le 1$ المقاطع عرضية مثلثة متساوية الاضلاع متعامدة على محور x	29

اوجد حجم المجسم الذي قاعدتة المنطقة المحدودة بالدالتين $y = 2\sqrt{\sin x}$ و $y = 0$ ، $0 \le x \le \pi$ والمقاطع العرضية هي <u>مثلثات متساوية</u> الاضلاع متعامدة على محور x	30
اوجد حجم المجسم الذي قاعدتة المنطقة المحدودة بالدالتين $y = -\sqrt{1-x^2}$ و $y = \sqrt{1-x^2}$ ، $-1 \le x \le 1$ والمقاطع العرضية هي <u>مثلثات متساوية</u> الاضلاع متعامدة على محور x	31

اناء فخاري مقاطعه عرضية دائرية نصف قطرها $4+\sin\frac{x}{2}$ $0 \le x \le 2\pi$ اوجد حجم الاناء	32
اوجد حجم المجسم الذي قاعدتة المنطقة المحدودة بالدالتين $y=e^{-2x}$ و $y=0$ ، $0 \le x \le \ln 5$ والمقاطع العرضية هي هي مربعات متعامدة على محور x	33

اوجد حجم المجسم الذي قاعدتة المنطقة المحدودة بالدالتين $y=x+1$ و $y=-x+1$ ومحور السينات والمقاطع العرضية هي مربعات متعامدة على محور x	34
اوجد حجم المجسم الذي قاعدتة المنطقة المحدودة بالدالتين $y=x+1$ و $y=-x+1$ ومحور السينات والمقاطع العرضية هي مربعات متعامدة على محور y	35

اوجد حجم الهرم الناقص الذي قاعدته مربعة الشكل وطول ضلع قاعدته 40متر وقاعدته من الاعلى مربعة الشكل وطول ضلع قاعدته 10 متر وارتفاعه 30 متر	36
اثبت ان حجم الماء في الخزان الكروي الذي نصف قطره $10m$ وارتفاعة h يعطى بالعلاقة $v(h)=10\pi h^2-\frac{1}{3}\pi h^3$	37

يتدفق الماء الى خزان كروي نصف قطره $10m$ بمعدل $3m^3 / \min$ ، اوجد معدل تغير ارتفاع الماء عندما يكون مستوى الماء عند نصف الخزان.	38
A pyramid 3 m high has a square base that is 3 m on a side. The cross-section of the pyramid perpendicular to the altitude x m down from the vertex is a square x m on a side. Find the volume of the pyramid.	39

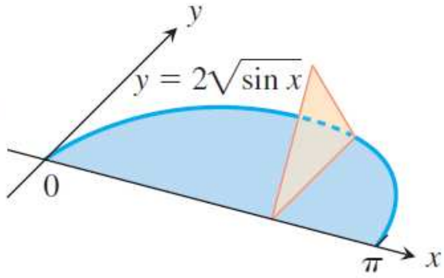
1. The solid lies between planes perpendicular to the x-axis at $x = 0$ and $x = 4$. The cross-sections perpendicular to the axis on the interval $0 \le x \le 4$ are squares whose diagonals run from the parabola $y = -\sqrt{x}$ to the parabola $y = \sqrt{x}$.	40
2. The solid lies between planes perpendicular to the x-axis at $x = -1$ and $x = 1$. The cross-sections perpendicular to the x-axis are circular disks whose diameters run from the parabola $y = x^2$ to the parabola $y = 2 - x^2$.	41

3. The solid lies between planes perpendicular to the x-axis at $x = -1$ and $x = 1$. The cross-sections perpendicular to the x-axis between these planes are squares whose bases run from the semicircle $y = -\sqrt{1 - x^2}$ to the semicircle $y = \sqrt{1 - x^2}$.	42
4. The solid lies between planes perpendicular to the x-axis at $x = -1$ and $x = 1$. The cross-sections perpendicular to the x-axis between these planes are squares whose diagonals run from the semicircle $y = -\sqrt{1 - x^2}$ to the semicircle $y = \sqrt{1 - x^2}$.	43

5. The base of a solid is the region between the curve $y = 2\sqrt{\sin x}$ and the interval $[0, \pi]$ on the x-axis. The cross-sections perpendicular to the x-axis are

a. equilateral triangles with bases running from the x-axis to the curve as shown in the accompanying figure.

b. squares with bases running from the x-axis to the curve.



44

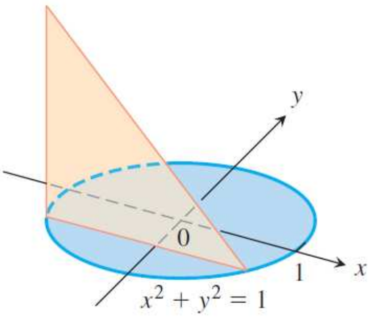
6. The solid lies between planes perpendicular to the x-axis at $x = -\pi/3$ and $x = \pi/3$. The cross-sections perpendicular to the x-axis are

a. circular disks with diameters running from the curve $y = \tan x$ to the curve $y = \sec x$.

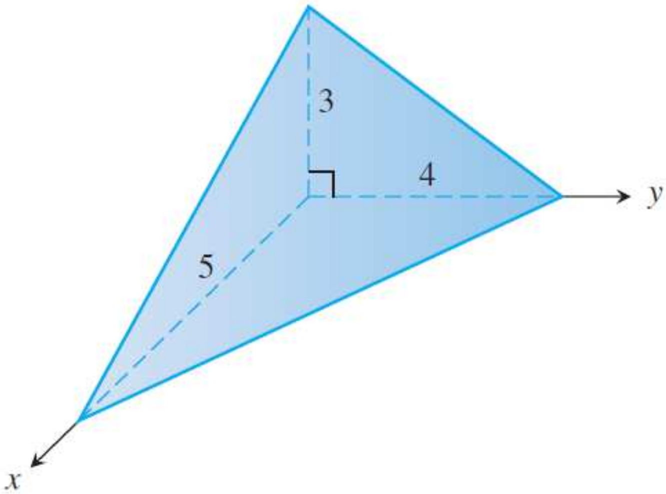
b. squares whose bases run from the curve $y = \tan x$ to the curve $y = \sec x$.

45

7. The base of a solid is the region bounded by the graphs of $y = 3x$, $y = 6$, and $x = 0$. The cross-sections perpendicular to the x-axis are **a.** rectangles of height 10. **b.** rectangles of perimeter 20.	46
8. The base of a solid is the region bounded by the graphs of $y = \sqrt{x}$ and $y = x/2$. The cross-sections perpendicular to the x-axis are **a.** isosceles triangles of height 6. **b.** semicircles with diameters running across the base of the solid.	47

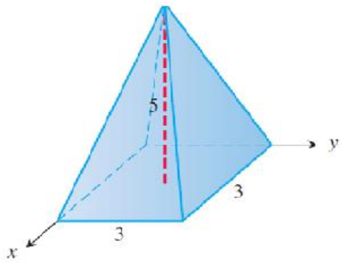
9. The solid lies between planes perpendicular to the y-axis at $y = 0$ and $y = 2$. The cross-sections perpendicular to the y-axis are circular disks with diameters running from the y-axis to the parabola $x = \sqrt{5}y^2$.	48
10. The base of the solid is the disk $x^2 + y^2 \leq 1$. The cross-sections by planes perpendicular to the y-axis between $y = -1$ and $y = 1$ are isosceles right triangles with one leg in the disk. 	49

11. Find the volume of the given right tetrahedron. (*Hint:* Consider slices perpendicular to one of the labeled edges.)



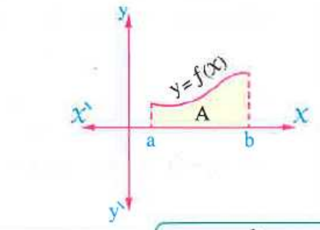
50

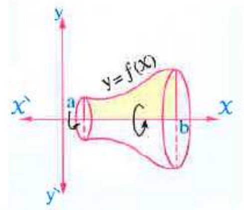
12. Find the volume of the given pyramid, which has a square base of area 9 and height 5.



51

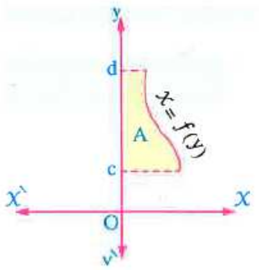
Revolution about x-axis

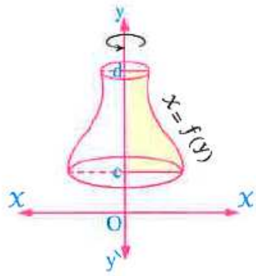




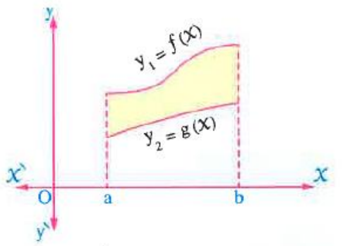
$$\boxed{v = \pi \int_a^b y^2 \, dx} = \pi \int [f(x)]^2 \, dx$$

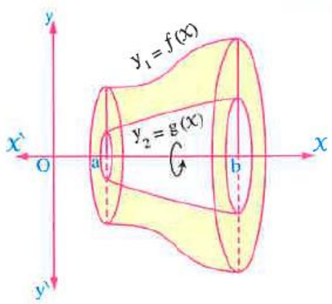
Revolution about y-axis





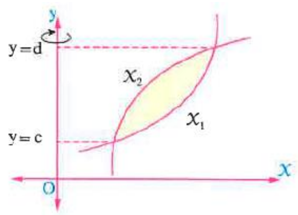
$$\boxed{v = \pi \int_c^d x^2 \, dy} = \boxed{\pi \int_c^d [f(y)]^2 \, dy}$$





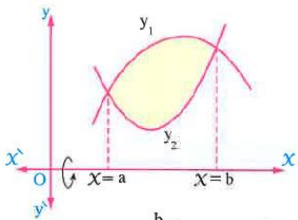
$$v = \pi \int_a^b (y_1^2 - y_2^2) \, dx$$

$$= \pi \int_a^b [(f(x))^2 - (g(x))^2] \, dx$$



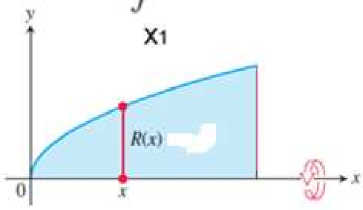
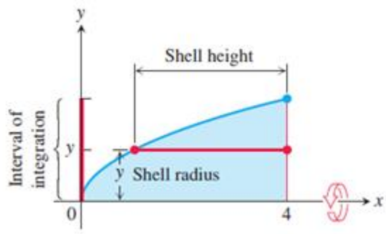
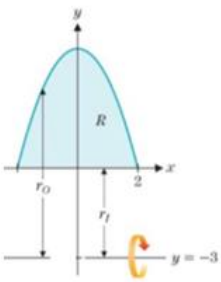
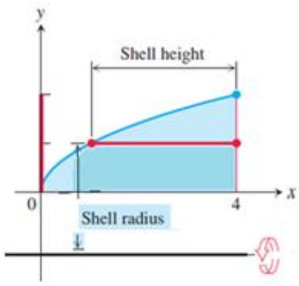
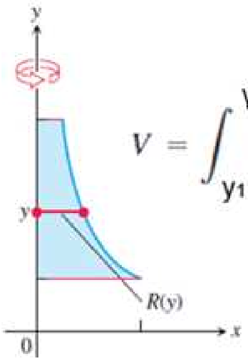
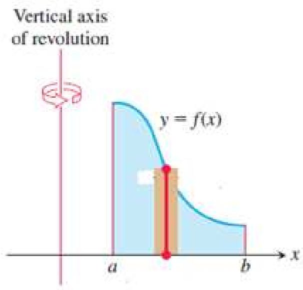
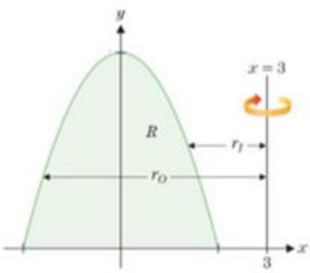
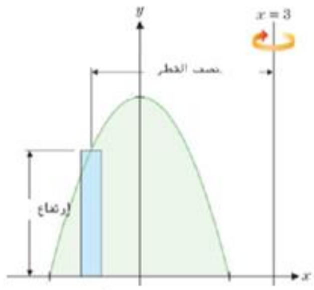
$$v = \pi \int_c^d [(x_1^2 - x_2^2)] \, dy$$

i.e. $v = \pi \int_c^d x_1^2 \, dy - \pi \int_c^d x_2^2 \, dy$



$$v = \pi \int_a^b [(y_1^2 - y_2^2)] \, dx$$

i.e. $v = \pi \int_a^b y_1^2 \, dx - \pi \int_a^b y_2^2 \, dx$

Rotation	Disk or Washer	Cylindrical Shell
About x axis (y = 0)	$V = \int_{X_1}^{X_2} \pi [R(x)]^2 \, dx.$ 	 $V = \int_a^b 2\pi \left(\begin{matrix}\text{shell}\\ \text{radius}\end{matrix}\right)\left(\begin{matrix}\text{shell}\\ \text{height}\end{matrix}\right) dy$
About line parallel x axis (y = k)	 $V = \int_{X_1}^{X_2} \pi([R(x)]^2 - [r(x)]^2)\, dx.$	 $V = \int_a^b 2\pi \left(\begin{matrix}\text{shell}\\ \text{radius}\end{matrix}\right)\left(\begin{matrix}\text{shell}\\ \text{height}\end{matrix}\right) dy$
About y axis (x = 0)	$V = \int_{y_1}^{y_2} \pi [R(y)]^2 \, dy.$ 	 $V = \int_a^b 2\pi \left(\begin{matrix}\text{shell}\\ \text{radius}\end{matrix}\right)\left(\begin{matrix}\text{shell}\\ \text{height}\end{matrix}\right) dx.$
About line parallel y axis (x = k)	 $V = \int_{y_1}^{y_2} \pi([R(y)]^2 - [r(y)]^2)\, dy$	 $V = \int_a^b 2\pi \left(\begin{matrix}\text{shell}\\ \text{radius}\end{matrix}\right)\left(\begin{matrix}\text{shell}\\ \text{height}\end{matrix}\right) dx.$

قم بدوران المنطقة تحت المنحنى $y = \sqrt{x}$ على الفترة $[0, 4]$ حول المحور x وأوجد حجم المجسّم الناتج عن الدوران.	1
أوجِد حجم المجسّم الناتج عن دوران المنطقة المحدودة بين المنحنيين $y = 4 - x^2$ و $y = 1$ من $x = 0$ إلى $x = \sqrt{3}$ حول المحور y.	2
لتكن R هي المنطقة المحدودة بالتمثيلين البيانيين $x = 0$, $y = \frac{1}{4}x^2$ و $y = 1$. احسب حجم المجسّم الذي تكوّن من دوران R حول المحور y	3

لتكن R هي المنطقة المحدودة بالتمثيلين البيانيين $x = 0$ ،$y = \frac{1}{4}x^2$ و $y = 1$. احسب حجم المجسّم الذي تكوّن من دوران R حول المحور x	4
لتكن R هي المنطقة المحدودة بالتمثيلين البيانيين $x = 0$ ،$y = \frac{1}{4}x^2$ و $y = 1$. احسب حجم المجسّم الذي تكوّن من دوران R حول المستقيم $y = 2$.	5
لتكن R هي المنطقة المحدودة بواسطة $y = 4 - x^2$ و $y = 0$. أوجد أحجام المجسّمات التي تم الحصول عليها من دوران R حول المحور y	6

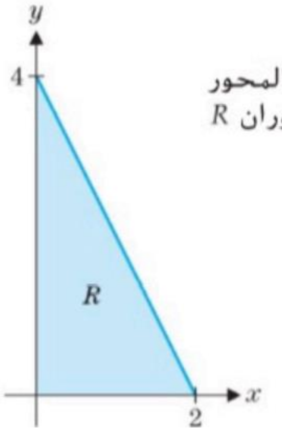
لتكن R هي المنطقة المحدودة بواسطة $y = 4 - x^2$. و $y = 0$. أوجد أحجام المجسّمات التي تم الحصول عليها من دوران R حول المستقيم $y = -3$	7
لتكن R هي المنطقة المحدودة بواسطة $y = 4 - x^2$. و $y = 0$. أوجد أحجام المجسّمات التي تم الحصول عليها من دوران R حول المستقيم $y = 7$	8

لتكن R هي المنطقة المحدودة بواسطة $y=4-x^2$. و $y=0$. أوجد أحجام المجسّمات التي تم الحصول عليها من دوران R حول المستقيم $x=3$.	9
المنطقة المحدودة بواسطة $y=2-x, y=0$ و $x=0$ حول (a) المحور x؛ (b) $y=3$	10

11	المنطقة المحدودة بواسطة $y = x^2, y = 4 - x^2$ حول (a) المحور x؛ (b) $y = 4$
12	المنطقة المحدودة بواسطة $y = \sqrt{x}, y = 2$ و $x = 0$ حول (a) المحور y؛ (b) $y = 4$

المساحة المحدودة بواسطة $y = e^x, x = 0, x = 2$ و $y = 0$ حول (a) المحور y؛ (b) $y = -2$	13
المنطقة المحدودة بواسطة $y = \sec x, y = 0, x = -\pi/4$ و $x = \pi/4$ حول (a) $y = 2$؛ (b) المحور x	14

المنطقة المحدودة بواسطة $y=\sqrt{\frac{x}{x^2+2}}$ و المحور x و $x=1$ حول (a) المحور x؛ (b) $y=3$	15
المنطقة المحدودة بواسطة $y=e^{-x^2}$ و $y=x^2$ حول (a) المحور x؛ (b) $y=-1$	16

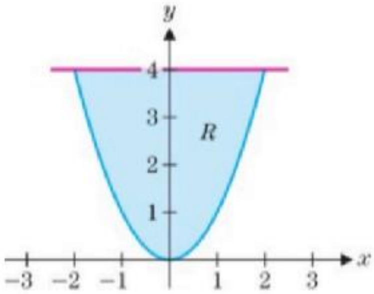


لتكنّ R هي المنطقة المحدودة بواسطة $y = 4 - 2x$ والمحور x والمحور y. احسب حجم المجسّم الذي تكوّن من دوران R حول المستقيم المذكور.

(a) المحور y (b) المحور x (c) $y = 4$

(d) $y = -4$ (e) $x = 2$ (f) $x = -2$

17

لتكن R هي المنطقة المحدودة بواسطة $y = x^2$ و $y = 4$. أحسب حجم المجسّم الذي تكوّن من دوران R حول المستقيم المذكور. (a) $y = 4$ (b) المحور y (c) $y = 6$ (d) $y = -4$ (e) $y = -2$ (f) $x = -4$ 	18

لتكنّ R هي المنطقة المحدودة بواسطة $y = x^2, y = 0$ و $x = 1$. احسب حجم المجسّم الذي تكوّن من دوران R حول المستقيم المذكور.

(a) المحور y (b) المحور x (c) $x = 1$

(d) $y = 1$ (e) $x = -1$ (f) $y = -1$

19

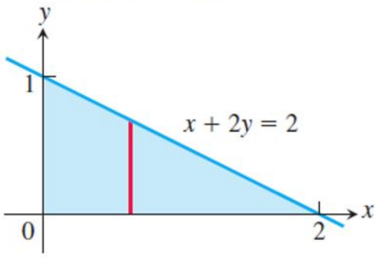
لتكنّ R هي المنطقة المحدودة بواسطة $y = x, y = -x$ و $x = 1$. احسب حجم المجسّم الذي تكوّن من دوران R حول المستقيم المذكور. 20

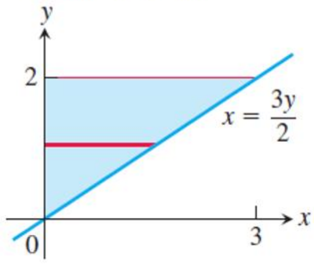
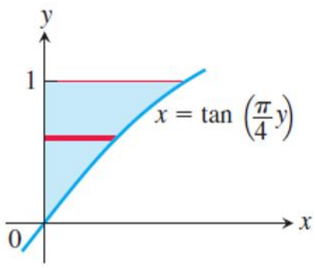
(a) المحور x (b) المحور y

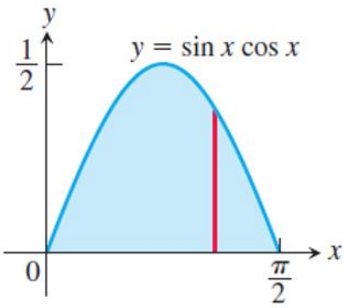
(c) $y = 1$ (d) $y = -1$

EXAMPLE 4 The region between the curve $y = \sqrt{x}, 0 \leq x \leq 4$, and the x-axis is revolved about the x-axis to generate a solid. Find its volume. 21

EXAMPLE 6 Find the volume of the solid generated by revolving the region bounded by $y = \sqrt{x}$ and the lines $y = 1$, $x = 4$ about the line $y = 1$.	22
EXAMPLE 7 Find the volume of the solid generated by revolving the region between the y-axis and the curve $x = 2/y$, $1 \leq y \leq 4$, about the y-axis.	23

EXAMPLE 8 Find the volume of the solid generated by revolving the region between the parabola $x = y^2 + 1$ and the line $x = 3$ about the line $x = 3$.	24
find the volume of the solid generated by revolving the shaded region about the given axis. About the x-axis 	25

find the volume of the solid generated by revolving the shaded region about the given axis. About the y-axis 	26
find the volume of the solid generated by revolving the shaded region about the given axis. About the y-axis 	27

find the volume of the solid generated by revolving the shaded region about the given axis. About the x-axis 	28
Find the volumes of the solids generated by revolving the regions bounded by the lines and curve about the x-axis. $y = x^2, \quad y = 0, \quad x = 2$	29

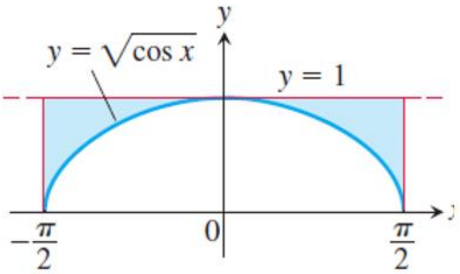
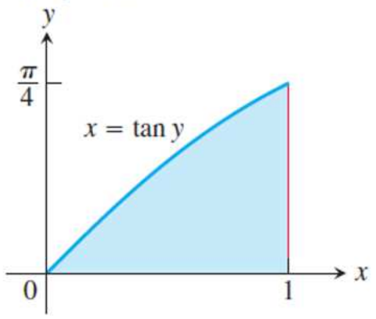
Find the volumes of the solids generated by revolving the regions bounded by the lines and curve about the x-axis. $y = x^3, \quad y = 0, \quad x = 2$	30
Find the volumes of the solids generated by revolving the regions bounded by the lines and curve about the x-axis. $y = \sqrt{9 - x^2}, \quad y = 0$	31

Find the volumes of the solids generated by revolving the regions bounded by the lines and curve about the x-axis. $y = x - x^2, \quad y = 0$	32
Find the volumes of the solids generated by revolving the regions bounded by the lines and curve about the x-axis. $y = \sqrt{\cos x}, \quad 0 \le x \le \pi/2, \quad y = 0, \quad x = 0$	33

Find the volumes of the solids generated by revolving the regions bounded by the lines and curve about the x-axis. $y = \sec x, \quad y = 0, \quad x = -\pi/4, \quad x = \pi/4$	34
Find the volumes of the solids generated by revolving the regions bounded by the lines and curve about the x-axis. $y = e^{-x}, \quad y = 0, \quad x = 0, \quad x = 1$	35

The region between the curve $y = \sqrt{\cot x}$ and the x-axis from $x = \pi/6$ to $x = \pi/2$	36
The region between the curve $y = 1/(2\sqrt{x})$ and the x-axis from $x = 1/4$ to $x = 4$	37
$y = e^{x-1}, \quad y = 0, \quad x = 1, \quad x = 3$	38

EXAMPLE 9 The region bounded by the curve $y = x^2 + 1$ and the line $y = -x + 3$ is revolved about the x-axis to generate a solid. Find the volume of the solid.	39
EXAMPLE 10 The region bounded by the parabola $y = x^2$ and the line $y = 2x$ in the first quadrant is revolved about the y-axis to generate a solid. Find the volume of the solid.	40

Find the volumes of the solids generated by revolving the shaded regions about the indicated axes. The x-axis 	41
Find the volumes of the solids generated by revolving the shaded regions about the indicated axes. The x-axis The y-axis 	42

Find the volumes of the solids generated by revolving the regions bounded by the lines and curves about the x-axis. $y = x, \quad y = 1, \quad x = 0$	43
Find the volumes of the solids generated by revolving the regions bounded by the lines and curves about the x-axis. $y = 2\sqrt{x}, \quad y = 2, \quad x = 0$	44
Find the volumes of the solids generated by revolving the regions bounded by the lines and curves about the x-axis. $y = x^2 + 1, \quad y = x + 3$	45

Find the volumes of the solids generated by revolving the regions bounded by the lines and curves about the x-axis. $y = 4 - x^2, \quad y = 2 - x$	46
Find the volumes of the solids generated by revolving the regions bounded by the lines and curves in about the x-axis. $y = \sec x, \quad y = \sqrt{2}, \quad -\pi/4 \le x \le \pi/4$	47
Find the volumes of the solids generated by revolving the regions bounded by the lines and curves about the x-axis. $y = \sec x, \quad y = \tan x, \quad x = 0, \quad x = 1$	48

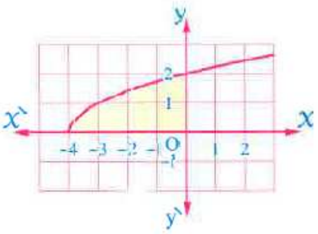
find the volume of the solid generated by revolving each region about the y-axis. The region enclosed by the triangle with vertices (1, 0), (2, 1), and (1, 1)	49
find the volume of the solid generated by revolving each region about the y-axis. The region enclosed by the triangle with vertices (0, 1), (1, 0), and (1, 1)	50
find the volume of the solid generated by revolving each region about the y-axis. The region in the first quadrant bounded above by the parabola $y = x^2$, below by the x-axis, and on the right by the line $x = 2$	51

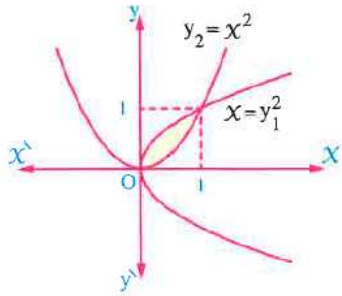
find the volume of the solid generated by revolving each region about the y-axis. The region in the first quadrant bounded on the left by the circle $x^2 + y^2 = 3$, on the right by the line $x = \sqrt{3}$, and above by the line $y = \sqrt{3}$	52
find the volume of the solid generated by revolving each region about the given axis. The region in the first quadrant bounded above by the curve $y = x^2$, below by the x-axis, and on the right by the line $x = 1$, about the line $x = -1$	53

find the volume of the solid generated by revolving each region about the given axis. The region in the second quadrant bounded above by the curve $y = -x^3$, below by the x-axis, and on the left by the line $x = -1$, about the line $x = -2$	54
Find the volume of the solid generated by revolving the region bounded by $y = \sqrt{x}$ and the lines $y = 2$ and $x = 0$ about **a.** the x-axis. **b.** the y-axis. **c.** the line $y = 2$. **d.** the line $x = 4$.	55

Find the volume of the solid generated by revolving the triangular region bounded by the lines $y = 2x$, $y = 0$, and $x = 1$ about **a.** the line $x = 1$. **b.** the line $x = 2$.	56
Find the volume of the solid generated by revolving the region bounded by the parabola $y = x^2$ and the line $y = 1$ about **a.** the line $y = 1$. **b.** the line $y = 2$. **c.** the line $y = -1$.	57

By integration, find the volume of the solid generated by revolving the triangular region with vertices $(0, 0)$, $(b, 0)$, $(0, h)$ about **a.** the x-axis. **b.** the y-axis.	58
Find the volume of the solid generated by revolving the region bounded by the straight lines : $y = x + 1$, $y = 0$, $x = 1$, $x = 4$ a complete revolution about x-axis.	59

Find the volume of the solid generated by revolving the region bounded by the curve : $y = x^2 + 2$ and the x-axis and the two straight lines $x = -2$, $x = 2$ a complete revolution about x-axis.	60
Find the volume of the solid generated by revolving the region bounded by the curve : $y = \sqrt{x+4}$ and the two axis of coordinates a complete revolution **1.** About x-axis. **2.** About y-axis. 	61

Find the volume of the solid generated by revolving the region bounded by the two curves : **$x = y^2$ and $y = x^2$ a complete revolution about x-axis.** 	62
Find the volume of the solid generated by revolving the region bounded by the curve **x y = 3 and the two straight lines y = 1 , y = 3 and y-axis a complete revolution :** **1.** About the y-axis. **2.** About the x-axis.	63

Find the volume of the solid generated by revolving the region bounded by the curve $y = 9 - x^2$ and the straight line : $3x + y = 9$ a complete revolution about the y-axis.	64
Find the volume of the solid generated by revolving the region bounded by the curve $y = \sqrt{2x - 2}$ and the tangent drawn to the curve at the point (3 , 2) and the x-axis a complete revolution about x-axis.	65

Find the volume of the solid generated by revolving the region bounded by the curve : **$y\sqrt{x}$ and the straight line $y = \frac{1}{2}x$ a complete revolution** **1.** About the x-axis. **2.** About the y-axis.	66
Use the integration to find the volume of the sphere of radius length = r	67

Use the integration to prove that volume of the right circular cone = $\frac{1}{3}\pi r^2 h$ where r is the radius length of its base and h is its height.	68
ABC is a triangle in which A (0 , 0) , B (5 , 0) , C (8 , 3) By using the integration Find the volume of the solid generated by revolving this triangle a complete revolution about x-axis.	69

Find the volume of the solid generated by revolving the region bounded by the given curves and straight lines a complete revolution about x-axis for each of the following : $y = x$, $x = 3$, $y = 0$ « 9π cubic unit »	70
Find the volume of the solid generated by revolving the region bounded by the given curves and straight lines a complete revolution about x-axis for each of the following : $y = \lvert x \rvert$, $x = -2$, $x = 4$, $y = 0$ « 24π cubic unit »	71

Find the volume of the solid generated by revolving the region bounded by the curve $y = \sqrt{2x - 2}$ and the tangent drawn to the curve at the point (3 , 2) and the x-axis a complete revolution about x-axis.	72

تمنياي للجميع بالتوفيق

مستر محمد عبدالعال

Volumes Using Cylindrical Shells

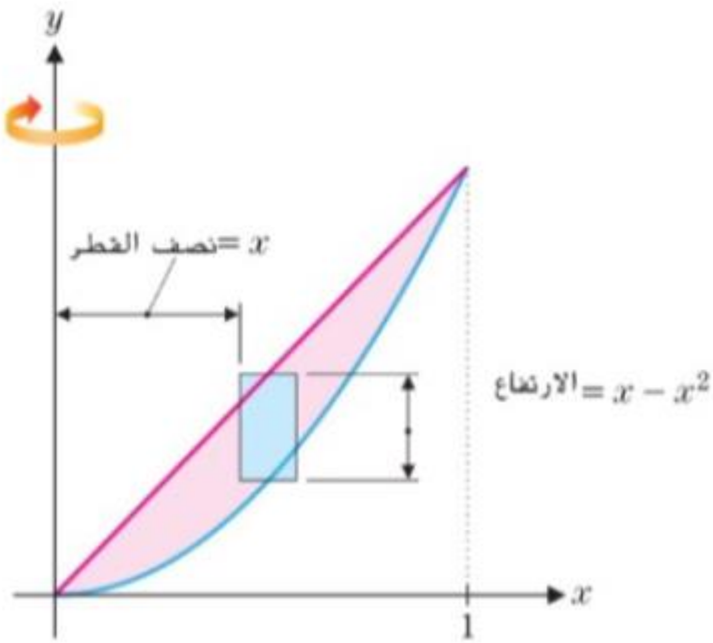
Shell Formula for Revolution About a Vertical Line

The volume of the solid generated by revolving the region between the x-axis and the graph of a continuous function $y = f(x) \geq 0, L \leq a \leq x \leq b$, about a vertical line $x = L$ is

$$V = \int_a^b 2\pi \begin{pmatrix}\text{shell}\\ \text{radius}\end{pmatrix} \begin{pmatrix}\text{shell}\\ \text{height}\end{pmatrix} dx.$$

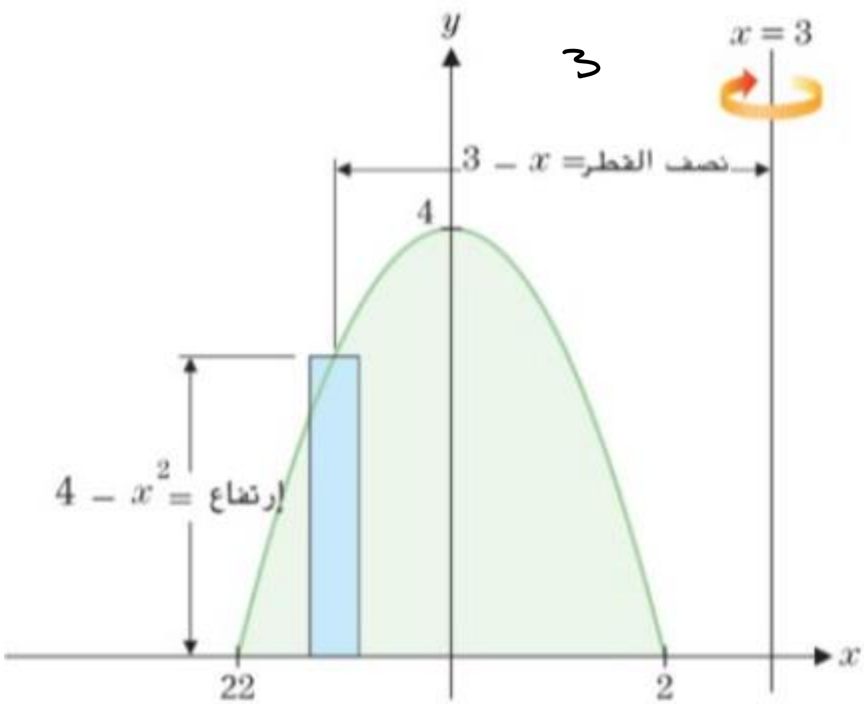
المثال 3.1 استخدام طريقة الأصداف الأسطوانية

استخدم طريقة الأصداف الأسطوانية لإيجاد حجم المجسّم الذي تكوّن بدوران المنطقة المحدودة بالتمثيلين البيانيين $y = x$ و $y = x^2$ في الربع الأول حول المحور y.



المثال 3.2 الحجم حيث الصدفات أبسط من الحلقات

أوجد حجم المجسّم الذي تكوّن بدوران المنطقة المحدودة بالتمثيل البياني $y = 4 - x^2$ والمحور -x حول المستقيم $x = 3$.



Mr. Mohamed Abdel Aal – Math HOD – Madar International School
Email m.abdelaal1969@hotmail.com - Al Ain -Al Hilli – UAE – 050 7374551

المثال 3.3

لتكن R هي المنطقة المحدودة بالتمثيلين البيانيين $y = x$، $y = 2 - x$ و $y = 0$.
احسب حجم المجسم الذي تكوّن بتدوير R حول المستقيمات

(a) $y = 2$

(b) $y = -1$

(c) $x = 3$

المثال 3.4 تقريب الأحجام باستخدام الأصداف والحلقات

لتكن R هي المنطقة المحدودة بالتمثيلين البيانيين $y = \cos x$ و $y = x^2$. احسب حجم المجسّم الذي تكوّن بدوران R حول المستقيمين

(a) $x = 2$

.(b) $y = 2$

2

أ

Mr. Mohamed Abdel Aal – Math HOD – Madar International School
Email m.abdelaal1969@hotmail.com - Al Ain -Al Hilli – UAE – 050 7374551

في التمارين 8–1، ارسم المنطقة وارسم صدفة نوعية وحدد نصف قطر وارتفاع كل صدفة واحسب الحجم.

1. يتم دوران المنطقة المحدودة بواسطة $y = x^2$ والمحورx، $-1 \le x \le 1$، حول $x = 2$

2. يتم دوران المنطقة المحدودة بواسطة $y = x^2$ والمحورx، $-1 \le x \le 1$، حول $x = -2$

Mr. Mohamed Abdel Aal – Math HOD – Madar International School
Email m.abdelaal1969@hotmail.com - Al Ain -Al Hilli – UAE – 050 7374551

3. يتم دوران المنطقة المحدودة بواسطة $y = x$، $y = -x$ و $x = 1$ حول المحور y

4. يتم دوران المنطقة المحدودة بواسطة $y = x$، $y = -x$ و $x = 1$ حول $x = 1$

Mr. Mohamed Abdel Aal – Math HOD – Madar International School
Email m.abdelaal1969@hotmail.com - Al Ain -Al Hilli – UAE – 050 7374551

5. يتم دوران المنطقة المحدودة بواسطة $y = \sqrt{x^2 + 1}$ ، $y = 0$ و $0 \le x \le 4$ حول $x = 0$

6. يتم دوران المنطقة المحدودة بواسطة $y = x^2$ و $y = 0$، $-1 \le x \le 1$ حول $x = 2$

7. يتم دوران المنطقة المحدودة بواسطة $x^2 + y^2 = 1$ حول $y = 2$

8. يتم دوران المنطقة المحدودة بواسطة $x^2 + y^2 = 2y$ حول $y = 4$

Mr. Mohamed Abdel Aal – Math HOD – Madar International School
Email m.abdelaal1969@hotmail.com - Al Ain -Al Hilli – UAE – 050 7374551

في التمارين 16–9، استخدم الأصداف الأسطوانية لحساب الحجم.

9. يتم دوران المنطقة المحدودة بواسطة $y = x^2$ و $y = 2 - x^2$، حول $x = -2$

10. يتم دوران المنطقة المحدودة بواسطة $y = x^2$ و $y = 2 - x^2$، حول $x = 2$

Mr. Mohamed Abdel Aal – Math HOD – Madar International School
Email m.abdelaal1969@hotmail.com - Al Ain -Al Hilli – UAE – 050 7374551

11. يتم دوران المنطقة المحدودة بواسطة $x = y^2$ و $x = 4$. حول $y = -2$

12. يتم دوران المنطقة المحدودة بواسطة $x = y^2$ و $x = 4$. حول $y = 2$

13. يتم دوران المنطقة المحدودة بواسطة $y = x^2 + 2$، $y = x + 1$ و $x = 2$، $x = 3$ حول

14. يتم دوران المنطقة المحدودة بواسطة $y = x$ و $y = x^2 - 2$. حول $x = 3$

Mr. Mohamed Abdel Aal – Math HOD – Madar International School
Email m.abdelaal1969@hotmail.com - Al Ain -Al Hilli – UAE – 050 7374551

15. يتم دوران المنطقة المحدودة بواسطة $x = (y-1)^2$ و $x = 9$.
حول $y = 5$

16. يتم دوران المنطقة المحدودة بواسطة $x = (y-1)^2$ و $x = 9$.
حول $y = -3$

Mr. Mohamed Abdel Aal – Math HOD – Madar International School
Email m.abdelaal1969@hotmail.com - Al Ain -Al Hilli – UAE – 050 7374551

في التمارين 26–17، استخدم أفضل طريقة مناسبة لإيجاد كل حجم.

17. يتم دوران المنطقة المحدودة بواسطة $y = 4 - x$، $y = 4$ و $y = x$ حول

(a) المحور x (b) المحور y (c) $x = 4$ (d) $y = 4$

Mr. Mohamed Abdel Aal – Math HOD – Madar International School
Email m.abdelaal1969@hotmail.com - Al Ain -Al Hilli – UAE – 050 7374551

18. يتم دوران المنطقة المحدودة بواسطة $y = x + 2$ ، $y = -x - 2$ و $x = 0$ حول

(a) $y = -2$ (b) $x = -2$ (c) المحور y (d) المحور x

.19 يتم دوران المنطقة المحدودة بواسطة $y = x$ و $y = x^2 - 6$ حول

(a) $x = 3$ (b) $y = 3$ (c) $x = -3$ (d) $y = -6$

20. يتم دوران المنطقة المحدودة بواسطة $x = y^2$ و $x = 2 + y$ حول

(a) $x = -1$ (b) $y = -1$ (c) $x = -2$ (d) $y = -2$

Mr. Mohamed Abdel Aal – Math HOD – Madar International School
Email m.abdelaal1969@hotmail.com - Al Ain -Al Hilli – UAE – 050 7374551

21. يتم دوران المنطقة المحدودة بواسطة $y = x^2$ $(x \geq 0)$، $y = 2 - x$ و $x = 0$ حول

(a) المحور x (b) المحور y (c) $x = 1$ (d) $y = 2$

Mr. Mohamed Abdel Aal – Math HOD – Madar International School
Email m.abdelaal1969@hotmail.com - Al Ain -Al Hilli – UAE – 050 7374551

22. يتم دوران المنطقة المحدودة بواسطة $y = 2 - x^2$، $y = x\ (x > 0)$ و المحور y حول

(a) المحور x (b) المحور y (c) $x = -1$ (d) $y = -1$

23. يتم دوران المنطقة على يمين $x = y^2$ وعلى شمال $y = 2 - x$ و $y = x - 2$ حول

(a) المحور x (b) المحور y

24. يتم دوران المنطقة المحدودة بواسطة $y = e^x - 1$، $y = 2 - x$ و المحور x حول

(a) المحور x (b) المحور y

25. يتم دوران المنطقة المحدودة بواسطة $y = \cos x$ و $y = x^4$ حول

(a) $x = 2$ (b) $y = 2$ (c) المحور x (d) المحور y

26. يتم دوران المنطقة المحدودة بواسطة $y = \sin x$ و $y = x^2$ حول

(a) $y = 1$ (b) $x = 1$ (c) المحور y (d) المحور x

Mr. Mohamed Abdel Aal – Math HOD – Madar International School
Email m.abdelaal1969@hotmail.com - Al Ain -Al Hilli – UAE – 050 7374551

EXAMPLE 1 The region enclosed by the x-axis and the parabola $y = f(x) = 3x - x^2$ is revolved about the vertical line $x = -1$ to generate a solid (Figure 6.16). Find the volume of the solid.

Mr. Mohamed Abdel Aal – Math HOD – Madar International School
Email m.abdelaal1969@hotmail.com - Al Ain -Al Hilli – UAE – 050 7374551

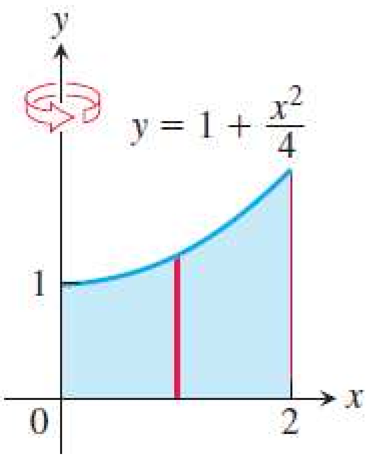
EXAMPLE 2 The region bounded by the curve $y = \sqrt{x}$, the x-axis, and the line $x = 4$ is revolved about the y-axis to generate a solid. Find the volume of the solid.

Mr. Mohamed Abdel Aal – Math HOD – Madar International School
Email m.abdelaal1969@hotmail.com - Al Ain -Al Hilli – UAE – 050 7374551

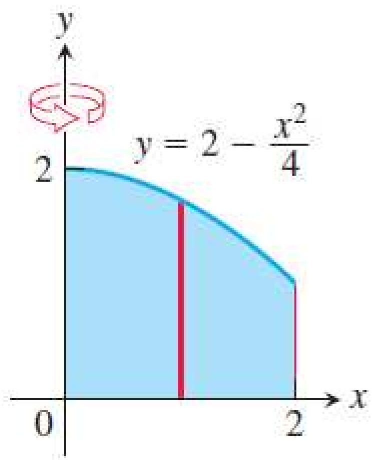
EXAMPLE 3 The region bounded by the curve $y = \sqrt{x}$, the x-axis, and the line $x = 4$ is revolved about the x-axis to generate a solid. Find the volume of the solid by the shell method.

In Exercises 1–6, use the shell method to find the volumes of the solids generated by revolving the shaded region about the indicated axis.

1.

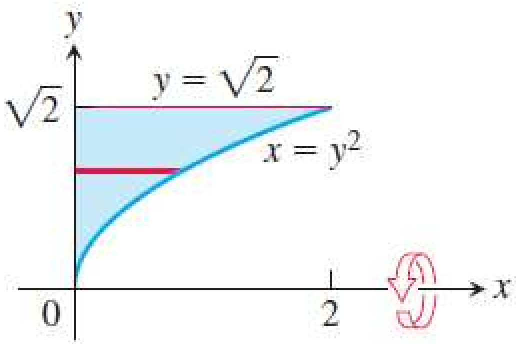


2.

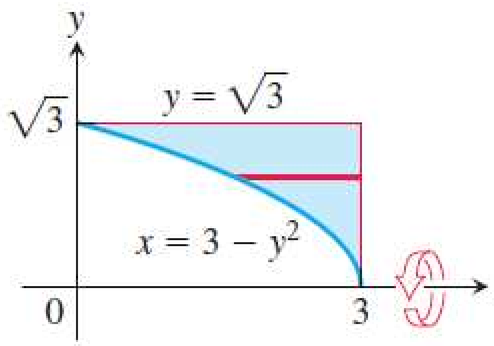


In Exercises 1–6, use the shell method to find the volumes of the solids generated by revolving the shaded region about the indicated axis.

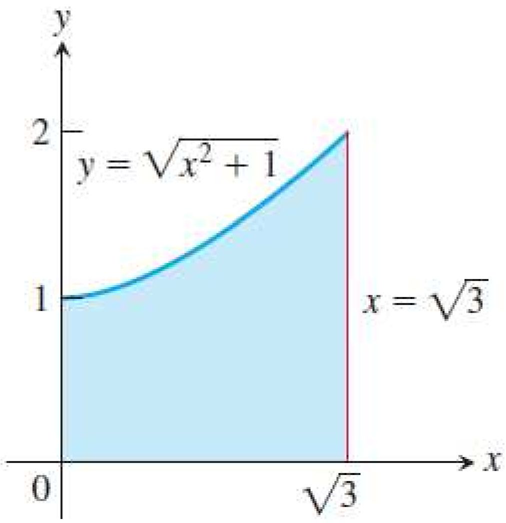
3.



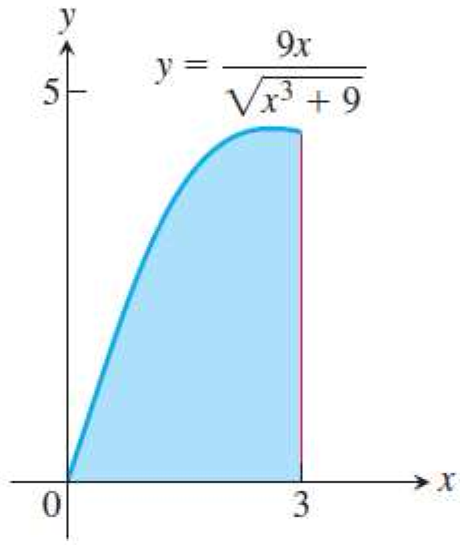
4.



5. The y-axis



6. The y-axis



Mr. Mohamed Abdel Aal – Math HOD – Madar International School
Email m.abdelaal1969@hotmail.com - Al Ain -Al Hilli – UAE – 050 7374551

Revolution About the y-Axis

Use the shell method to find the volumes of the solids generated by revolving the regions bounded by the curves and lines in Exercises 7–12 about the y-axis.

7. $y = x, \quad y = -x/2, \quad x = 2$

Revolution About the y-Axis

Use the shell method to find the volumes of the solids generated by revolving the regions bounded by the curves and lines in Exercises 7–12 about the y-axis.

8. $y = 2x, \quad y = x/2, \quad x = 1$

Revolution About the y-Axis

Use the shell method to find the volumes of the solids generated by revolving the regions bounded by the curves and lines in Exercises 7–12 about the y-axis.

9. $y = x^2, \quad y = 2 - x, \quad x = 0, \quad \text{for } x \geq 0$

Revolution About the y-Axis

Use the shell method to find the volumes of the solids generated by revolving the regions bounded by the curves and lines in Exercises 7–12 about the y-axis.

10. $y = 2 - x^2, \quad y = x^2, \quad x = 0$

Revolution About the y-Axis

Use the shell method to find the volumes of the solids generated by revolving the regions bounded by the curves and lines in Exercises 7–12 about the y-axis.

11. $y = 2x - 1, \quad y = \sqrt{x}, \quad x = 0$

Revolution About the y-Axis

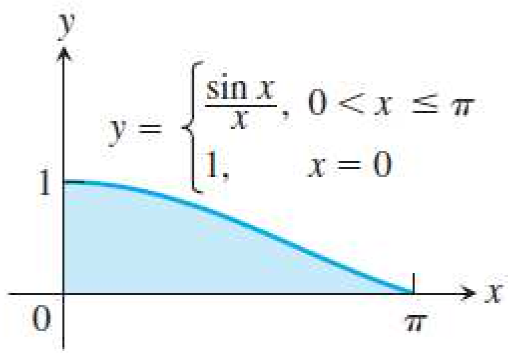
Use the shell method to find the volumes of the solids generated by revolving the regions bounded by the curves and lines in Exercises 7–12 about the y-axis.

12. $y = 3/\left(2\sqrt{x}\right), \quad y = 0, \quad x = 1, \quad x = 4$

13. Let $f(x) = \begin{cases} (\sin x)/x, & 0 < x \leq \pi \\ 1, & x = 0 \end{cases}$

a. Show that $xf(x) = \sin x,\ 0 \leq x \leq \pi$.

b. Find the volume of the solid generated by revolving the shaded region about the y-axis in the accompanying figure.

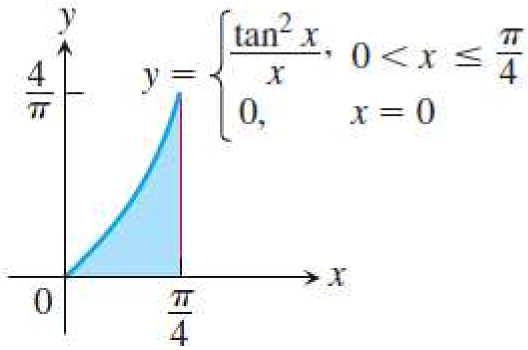


Mr. Mohamed Abdel Aal – Math HOD – Madar International School
Email m.abdelaal1969@hotmail.com - Al Ain -Al Hilli – UAE – 050 7374551

14. Let $g(x) = \begin{cases} (\tan x)^2/x, & 0 < x \le \pi/4 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$

a. Show that $x\,g(x) = (\tan x)^2,\ 0 \le x \le \pi/4$.

b. Find the volume of the solid generated by revolving the shaded region about the y-axis in the accompanying figure.



Use the shell method to find the volumes of the solids generated by revolving the regions bounded by the curves and lines in Exercises 15–22 about the x-axis.

15. $x = \sqrt{y}, \quad x = -y, \quad y = 2$

Use the shell method to find the volumes of the solids generated by revolving the regions bounded by the curves and lines in Exercises 15–22 about the x-axis.

16. $x = y^2, \quad x = -y, \quad y = 2, \quad y \geq 0$

Use the shell method to find the volumes of the solids generated by revolving the regions bounded by the curves and lines in Exercises 15–22 about the x-axis.

17. $x = 2y - y^2, \quad x = 0$

Use the shell method to find the volumes of the solids generated by revolving the regions bounded by the curves and lines in Exercises 15–22 about the x-axis.

18. $x = 2y - y^2, \quad x = y$

Mr. Mohamed Abdel Aal – Math HOD – Madar International School
Email m.abdelaal1969@hotmail.com - Al Ain -Al Hilli – UAE – 050 7374551

Use the shell method to find the volumes of the solids generated by revolving the regions bounded by the curves and lines in Exercises 15–22 about the x-axis.

19. $y = |x|, \quad y = 1$

Use the shell method to find the volumes of the solids generated by revolving the regions bounded by the curves and lines in Exercises 15–22 about the x-axis.

20. $y = x, \quad y = 2x, \quad y = 2$

Mr. Mohamed Abdel Aal – Math HOD – Madar International School
Email m.abdelaal1969@hotmail.com - Al Ain -Al Hilli – UAE – 050 7374551

Use the shell method to find the volumes of the solids generated by revolving the regions bounded by the curves and lines in Exercises 15–22 about the x-axis.

21. $y = \sqrt{x}, \quad y = 0, \quad y = x - 2$

Use the shell method to find the volumes of the solids generated by revolving the regions bounded by the curves and lines in Exercises 15–22 about the x-axis.

22. $y = \sqrt{x}, \quad y = 0, \quad y = 2 - x$

Mr. Mohamed Abdel Aal – Math HOD – Madar International School
Email m.abdelaal1969@hotmail.com - Al Ain -Al Hilli – UAE – 050 7374551

In Exercises 23–26, use the shell method to find the volumes of the solids generated by revolving the regions bounded by the given curves about the given lines.

23. $y = 3x, \quad y = 0, \quad x = 2$

a. The y-axis

b. The line $x = 4$

c. The line $x = -1$

d. The x-axis

e. The line $y = 7$

f. The line $y = -2$

Mr. Mohamed Abdel Aal – Math HOD – Madar International School
Email m.abdelaal1969@hotmail.com - Al Ain -Al Hilli – UAE – 050 7374551

24. $y = x^3, \quad y = 8, \quad x = 0$

a. The y-axis

b. The line $x = 3$

c. The line $x = -2$

d. The x-axis

e. The line $y = 8$

f. The line $y = -1$

Mr. Mohamed Abdel Aal – Math HOD – Madar International School
Email m.abdelaal1969@hotmail.com - Al Ain -Al Hilli – UAE – 050 7374551

25. $y = x + 2, \quad y = x^2$

a. The line $x = 2$

b. The line $x = -1$

c. The x-axis

d. The line $y = 4$

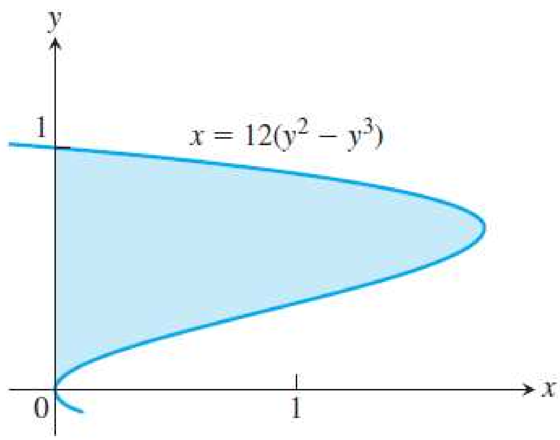
26. $y = x^4, \quad y = 4 - 3x^2$

a. The line $x = 1$ **b.** The x-axis

In Exercises 27 and 28, use the shell method to find the volumes of the solids generated by revolving the shaded regions about the indicated axes.

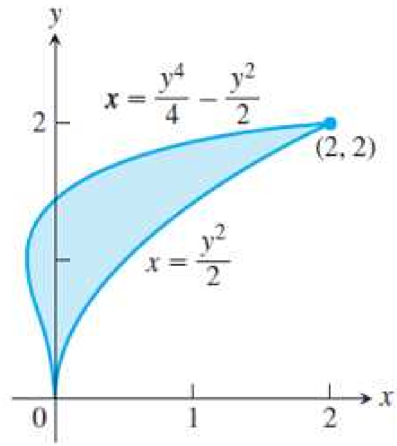
27. **a.** The x-axis **b.** The line $y = 1$

c. The line $y = 8/5$ **d.** The line $y = -2/5$



Mr. Mohamed Abdel Aal – Math HOD – Madar International School
Email m.abdelaal1969@hotmail.com - Al Ain -Al Hilli – UAE – 050 7374551

28. **a.** The x-axis **b.** The line $y = 2$
c. The line $y = 5$ **d.** The line $y = -5/8$



In Exercises 31–36, find the volumes of the solids generated by revolving the regions about the given axes. If you think it would be better to use washers in any given instance, feel free to do so.

31. The triangle with vertices (1, 1), (1, 2), and (2, 2) about

a. the x-axis **b.** the y-axis

c. the line $x = 10/3$ **d.** the line $y = 1$

32. The region bounded by $y = \sqrt{x}, y = 2, x = 0$ about

a. the x-axis

b. the y-axis

c. the line $x = 4$

d. the line $y = 2$

33. The region in the first quadrant bounded by the curve $x = y - y^3$ and the y-axis about

a. the x-axis **b.** the line $y = 1$

Mr. Mohamed Abdel Aal – Math HOD – Madar International School
Email m.abdelaal1969@hotmail.com - Al Ain -Al Hilli – UAE – 050 7374551

34. The region in the first quadrant bounded by $x = y - y^3$, $x = 1$, and $y = 1$ about

a. the x-axis

b. the y-axis

c. the line $x = 1$

d. the line $y = 1$

35. The region bounded by $y = \sqrt{x}$ and $y = x^2/8$ about

a. the x-axis **b.** the y-axis

Mr. Mohamed Abdel Aal – Math HOD – Madar International School
Email m.abdelaal1969@hotmail.com - Al Ain -Al Hilli – UAE – 050 7374551

36. The region bounded by $y = 2x - x^2$ and $y = x$ about

a. the y-axis **b.** the line $x = 1$

Mr. Mohamed Abdel Aal – Math HOD – Madar International School
Email m.abdelaal1969@hotmail.com - Al Ain -Al Hilli – UAE – 050 7374551

37. The region in the first quadrant that is bounded above by the curve $y = 1/x^{1/4}$, on the left by the line $x = 1/16$, and below by the line $y = 1$ is revolved about the x-axis to generate a solid. Find the volume of the solid by

a. the washer method. **b.** the shell method.

Mr. Mohamed Abdel Aal – Math HOD – Madar International School
Email m.abdelaal1969@hotmail.com - Al Ain -Al Hilli – UAE – 050 7374551

38. The region in the first quadrant that is bounded above by the curve $y = 1/\sqrt{x}$, on the left by the line $x = 1/4$, and below by the line $y = 1$ is revolved about the y-axis to generate a solid. Find the volume of the solid by

a. the washer method. **b.** the shell method.