تم تحميل هذا الملف من موقع المناهج الإماراتية

almanahj.com/ae

موقع المناهج الإماراتية

*للحصول على أوراق عمل لجميع الصفوف وجميع المواد اضغط هنا

https://almanahj.com/ae

* للحصول على أوراق عمل لجميع مواد الصف الثاني عشر المتقدم اضغط هنا

https://almanahj.com/ae/15

* للحصول على جميع أوراق الصف الثاني عشر المتقدم في مادة رياضيات ولجميع الفصول, اضغط هنا

https://almanahj.com/ae/15

* للحصول على أوراق عمل لجميع مواد الصف الثاني عشر المتقدم في مادة رياضيات الخاصة بـ اضغط هنا

https://almanahj.com/ae/15

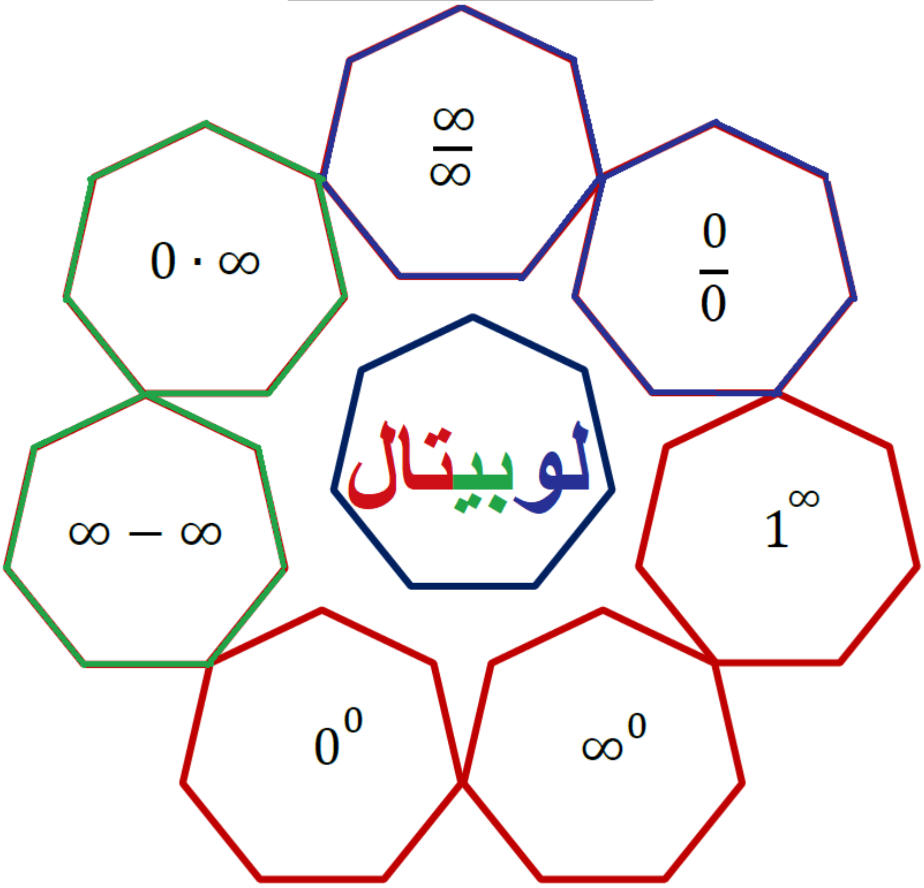
* لتحميل كتب جميع المواد في جميع الفصول للـ الصف الثاني عشر المتقدم اضغط هنا

https://almanahj.com/ae/grade15

للتحدث إلى بوت المناهج على تلغرام: اضغط هنا

https://t.me/almanahj_bot

الصيغ غير المعرفة



النظرية 1 . 2 (قاعدة لوبيتال)

على فرض أن الدالتين f و g قابلتان للاشتقاق

وأن $\lim\limits_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)}$ لها الصيغة غير المعرفة $\frac{0}{0}$ أو $\frac{\infty}{\infty}$

إذن: $\lim\limits_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to c} \frac{f'(x)}{g'(x)}$

ملاحظة 1: تنطبق قاعدة لوبيتال أيضًا عندما

$x \to -\infty \quad , x \to \infty$

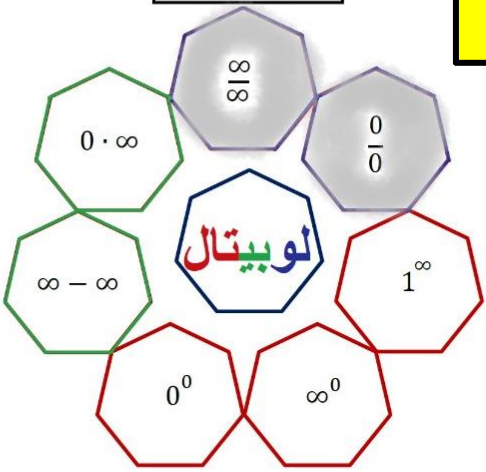
$x \to c^- \quad , x \to c^+$

ملاحظة 2: لا نستخدم قاعدة لوبيتال من دون أن نتحقق أولًا من أن النهاية لها الصيغة $\frac{0}{0}$ أو $\frac{\infty}{\infty}$

(2 - 4) الصيغ غير المعرفة وقاعدة لوبيتال

أولًا: معالجة الصيغ $\frac{0}{0}$ و $\frac{\infty}{\infty}$

الصيغ غير المعرفة



1) عوض للتحقق من أن الناتج $\frac{0}{0}$ أو $\frac{\infty}{\infty}$

2) اشتق كلًا من البسط والمقام.

3) بسط إن كان ضروريًا.

4) عوض مرة أخرى لتحصل على عدد حقيقي أو $\pm\infty$

تمارين ص 247 و 248: أوجد النهايات التالية

1) $\lim\limits_{x\to -2} \frac{x+2}{x^2-4}$ $\left(\frac{0}{0}\right)$

$$\frac{\frac{d}{dx}(x+2)}{\frac{d}{dx}(x^2-4)} = \frac{1}{2x}$$

$$\lim_{x\to -2} \frac{1}{2x} = \frac{1}{2(-2)} = -\frac{1}{4}$$

4) $\lim\limits_{x\to -\infty} \frac{x+1}{x^2+4x+3}$ $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$

$$\frac{\frac{d}{dx}(x+1)}{\frac{d}{dx}(x^2+4x+3)} = \frac{1}{2x+4}$$

$$\lim_{x\to -\infty} \frac{1}{2x+4} = \frac{1}{\infty} = 0$$

7) $\lim\limits_{t\to 0} \frac{\tan^{-1} t}{\sin t}$ $\left(\frac{0}{0}\right)$

$$\frac{\frac{d}{dt}(\tan^{-1} t)}{\frac{d}{dt}\sin t} = \frac{\frac{1}{1+t^2}}{\cos t} = \frac{1}{(1+t^2)\cos t}$$

$$\lim_{t\to 0} \frac{1}{(1+t^2)\cos t} = \frac{1}{1} = 1$$

9) $\lim\limits_{x\to \pi} \frac{\sin 2x}{\sin x}$ $\left(\frac{0}{0}\right)$

$$\frac{\frac{d}{dx}\sin 2x}{\frac{d}{dx}\sin x} = \frac{2\cos 2x}{\cos x}$$

$$\lim_{x\to \pi} \frac{2\cos 2x}{\cos x} = \frac{2}{-1} = -2$$

13) $\lim\limits_{t\to 1} \frac{\sqrt{t}-1}{t-1}$ $\left(\frac{0}{0}\right)$

$$\frac{\frac{d}{dt}(\sqrt{t}-1)}{\frac{d}{dt}(t-1)} = \frac{\frac{1}{2\sqrt{t}}}{1} = \frac{1}{2\sqrt{t}}$$

$$\lim_{t\to 1} \frac{1}{2\sqrt{t}} = \frac{1}{2}$$

تذكر:

1) $\frac{C}{\pm\infty} = 0 \quad , C \neq 0$

2) $\frac{\pm C}{0} = \pm\infty \quad , C \neq 0$

تكرار تطبيق قاعدة لوبيتال

تذكر:

1) $\dfrac{C}{\pm\infty} = 0 \qquad , C \neq 0$

2) $\dfrac{\pm C}{0} = \pm\infty \qquad , C \neq 0$

تمارين ص 247 و 248: أوجد النهايات التالية

29) $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\ln x}{\cot x} \qquad \left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)$

$$\frac{\frac{d}{dx}\, ln\, x}{\frac{d}{dx}\, cot\, x} = \frac{\frac{1}{x}}{-csc^2 x}$$

$$= -\frac{1}{x}\,.sin^2 x = -\frac{sin\, x}{x}\,.sin\, x$$

$$\lim_{x\to 0^+}\left(-\frac{sin\, x}{x}\,.sin\, x\right) = 0$$

3) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{3x^2+2}{x^2-4} \qquad \left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)$

$$\frac{\frac{d}{dx}(3x^2+2)}{\frac{d}{dx}(x^2-4)} = \frac{6x}{2x} = 3$$

$$\lim_{x\to\infty} 3 = 3$$

15) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^3}{e^x} \qquad \left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)$

$$\frac{\frac{d}{dx}\, x^3}{\frac{d}{dx}\, e^x} = \frac{3x^2}{e^x}$$

$$\frac{\frac{d}{dx}\, 3x^2}{\frac{d}{dx}\, e^x} = \frac{6x}{e^x}$$

$$\frac{\frac{d}{dx}\, 6x}{\frac{d}{dx}\, e^x} = \frac{6}{e^x}$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{6}{e^x}\right) = 0$$

22) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{ln\, x}{\sqrt{x}} \qquad \left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)$

$$\frac{\frac{d}{dx}\, ln\, x}{\frac{d}{dx}\sqrt{x}} = \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{2\sqrt{x}}} = \frac{2\sqrt{x}}{x}$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2}{\sqrt{x}}\right) = 0$$

تمارين ص 248: أوجد كل الأخطاء

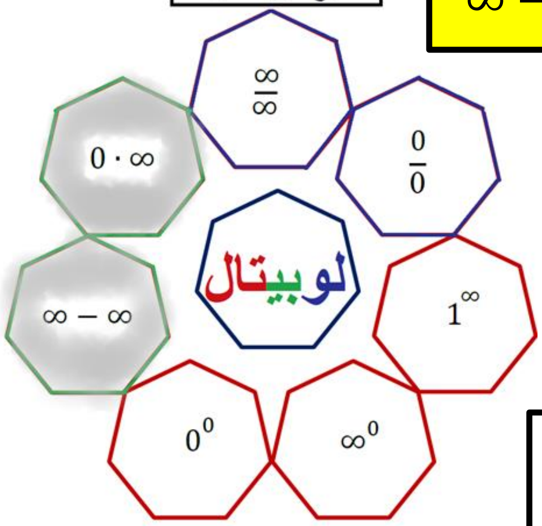
41. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos x}{x^2} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{-\sin x}{2x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{-\cos x}{2} = -\dfrac{1}{2}$

42. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - 1}{x^2} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x}{2x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x}{2} = \dfrac{1}{2}$

(2 - 4) الصيغ غير المعرفة وقاعدة لوبيتال

ثانيًا: معالجة الصيغ $0 \cdot \infty$ و $\infty - \infty$

الصيغ غير المعرفة



1) عوض للتحقق من أن الناتج $0 \cdot \infty$ أو $\infty - \infty$

2) تعديل الدالة لتُصبح دالة نسبية واحدة نهايتها بالتعويض $\frac{0}{0}$ أو $\frac{\infty}{\infty}$

3) تطبيق خطوات لوبيتال (اشتق ـ بسط ـ عوض).

ملاحظة: عند تطبيق خطوات لوبيتال في الخطوة (3) قد نحتاج إلى تكرار الاشتقاق أكثر من مرة.

تمارين ص 248: أوجد النهايات التالية

24) $\lim_{t\to\infty} t \sin\left(\frac{1}{t}\right)$ $\quad \lim_{t\to\infty} \frac{\sin\frac{1}{t}}{\frac{1}{t}} \quad \frac{0}{0}$

$$\frac{\frac{d}{dt}\sin\frac{1}{t}}{\frac{d}{dt}\frac{1}{t}} = \frac{-\frac{1}{t^2}\cos\frac{1}{t}}{-\frac{1}{t^2}}$$

$$\lim_{t\to\infty}\left(\cos\frac{1}{t}\right) = 1$$

23) $\lim_{t\to\infty} t\, e^{-t}$ $\quad \lim_{t\to\infty}\left(\frac{t}{e^t}\right) \quad \frac{\infty}{\infty}$

$$\frac{\frac{d}{dt}t}{\frac{d}{dt}e^t} = \frac{1}{e^t}$$

$$\lim_{t\to\infty}\left(\frac{1}{e^t}\right) = 0$$

تمارين ص 248: أوجد النهايات التالية

18) $\lim_{x\to 0}\left(\cot x - \frac{1}{x}\right)$ $\quad (\dots\dots\dots\dots)$

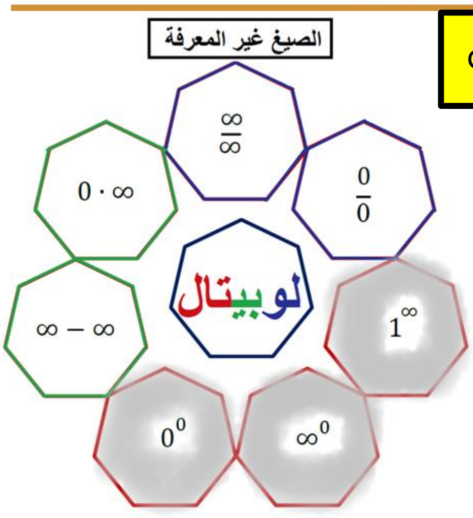
$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\cos x}{\sin x} - \frac{1}{x}\right) = \lim_{x\to 0}\left(\frac{x\cos x - \sin x}{x \sin x}\right) \quad \frac{0}{0}$$

$$\frac{\frac{d}{dx}[x\cos x - \sin x]}{\frac{d}{dx}[x \sin x]} = \frac{\cos x - x\sin x - \cos x}{\sin x + x\cos x} \quad \frac{-x\sin x}{\sin x + x\cos x} \quad \frac{0}{0}$$

$$\frac{\frac{d}{dx}[-x\sin x]}{\frac{d}{dx}[\sin x + x\cos x]} = \frac{-\sin x - x\cos x}{\cos x + \cos x - x\sin x} \quad \frac{0}{2} = 0$$

(2 - 4) الصيغ غير المعرفة وقاعدة لوبيتال

ثالثًا: معالجة الصيغ 1^{∞} و 0^{0} و ∞^{0}



1) عوض للتحقق من أن الناتج 1^{∞} أو 0^{0} أو ∞^{0}

2) تعديل الدالة لتُصبح دالة نسبية واحدة نهايتها بالتعويض $\frac{0}{0}$ أو $\frac{\infty}{\infty}$

3) تطبيق خطوات لوبيتال (اشتق ـ بسط ـ عوض).

مثال8 ص 245: أوجد النهايات التالية

$$\lim_{x\to 1^{+}} (x)^{\left(\frac{1}{x-1}\right)} \qquad (\dots\dots\dots\dots)$$

1) عوض للتحقق:

2) تعديل الدالة لتُصبح دالة نسبية واحدة:

بفرض أن: $y = x^{\left(\frac{1}{x-1}\right)}$ . ...

بأخذ ln للطرفين: .... $\ln y = \left(\frac{1}{x-1}\right)\ln x$ .... $\ln y = \ln x^{\left(\frac{1}{x-1}\right)}$ ....

بأخذ $\lim\limits_{x\to 1^{+}}$ للطرفين والتعويض: (..............) .... $\lim\limits_{x\to 1^{+}} \ln y = \lim\limits_{x\to 1^{+}} \left(\frac{\ln x}{x-1}\right)$ ..

جعلها دالة نسبية واحدة والتعويض: (..... $\frac{0}{0}$ ....) .... $\lim\limits_{x\to 1^{+}} \ln y = \lim\limits_{x\to 1^{+}} \left(\frac{\ln x}{x-1}\right)$

3) تطبيق خطوات لوبيتال:

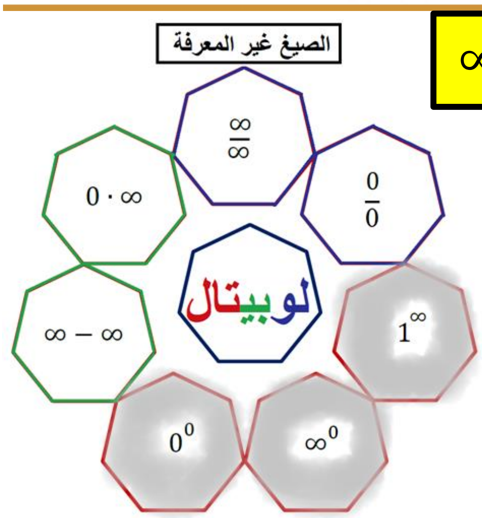
$$\frac{\frac{d}{dx}\ln x}{\frac{d}{dx}(x-1)} \dots\dots\dots\dots \frac{\frac{1}{x}}{1} = \frac{1}{x} \dots\dots\dots\dots \ln y = \frac{1}{x} \dots\dots\dots\dots$$

$$\dots\dots\dots\dots \lim_{x\to 1^{+}} y = \lim_{x\to 1^{+}} e^{\frac{1}{x}} = e \dots\dots\dots\dots$$

$$\therefore \ln y = \ln y = \frac{1}{x} \quad \Rightarrow y = e^{\frac{1}{x}} \ . \dots \dots$$

(2 - 4) الصيغ غير المعرفة وقاعدة لوبيتال

تابع: معالجة الصيغ 1^{∞} و 0^{0} و ∞^{0}



1) **عوض** للتحقق من أن الناتج 1^{∞} **أو** 0^{0} **أو** ∞^{0}

2) **تعديل** الدالة لتُصبح **دالة نسبية واحدة** نهايتها بالتعويض $\frac{0}{0}$ **أو** $\frac{\infty}{\infty}$

3) **تطبيق** خطوات لوبيتال (اشتق ـ بسط ـ عوض).

تمارين ص 248: أوجد النهايات التالية

37) $\lim\limits_{x \to 0^{+}} \left(\frac{1}{x}\right)^{(x)}$

1) عوض للتحقق: $\left(\frac{1}{0}\right)^{0} = \infty^{0}$

2) تعديل الدالة لتُصبح دالة نسبية واحدة:

بفرض أن: $y = \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots$

بأخذ ln للطرفين: ....

بأخذ $\lim\limits_{x \to 0^{+}}$ للطرفين والتعويض: (..............) ....

جعلها دالة نسبية واحدة والتعويض: (..............) ....

3) تطبيق خطوات لوبيتال:

....

....

$\therefore \ln y = \dots \dots \qquad \Rightarrow y = \dots \dots \dots \dots$

الاختبارات المعيارية ص 248

27. $\lim_{x \to 0} \frac{\sin(\sinh x)}{\sinh(\sin x)}$

$A)\ 0$ $B)\ 1$ $C)\ \infty$ $D)\ -\infty$

30. $\lim_{x \to 0^+} \frac{\sqrt{x}}{\ln x}$

$A)\ 0$ $B)\ 1$ $C)\ \infty$ $D)\ -\infty$

36. $\lim_{x \to 1} \frac{\sqrt{5-x}-2}{\sqrt{10-x}-3}$

$A)\ 0$ $B)\ \infty$ $C)\ \frac{3}{2}$ $D)\ \frac{2}{3}$

40. $\lim_{t \to \infty} \left(\frac{t-3}{2t+1}\right)^t$

$A)\ 0$ $B)\ \infty$ $C)\ \frac{1}{2}$ $D)\ -\infty$

38. $\lim_{x \to 0^+} (\cos x)^{\frac{1}{x}}$

$A)\ 1$ $B)\ \infty$ $C)\ 0$ $D)\ -\infty$