الملف حل أسئلة امتحان نهاية الفصل الثالث 2020-2021
موقع المناهج ⇦ المناهج الإماراتية ⇦ الصف الثاني عشر المتقدم ⇦ رياضيات ⇦ الفصل الثالث

حل امتحان 12 متقدم 2021

الرياضيات

إعداد

د:حيدر عامر السعافين

0505712489

تكاملات محدودة وغير محدودة باستخدام التكامل بالأجزاء2

Evaluate the integral $\int_1^2 x \ln x \, dx$.

أوجد قيمة التكامل $\int_1^2 x \ln x \, dx$.

$u = \ln x \rightarrow du = \frac{1}{x} dx$

$dv = x\,dx \rightarrow v = \frac{1}{2}x^2$

$I = \frac{1}{2}x^2 \ln x \Big|_1^2 - \int_1^2 \frac{1}{2}x^2 \cdot \frac{1}{x} dx$

$= \frac{1}{2}x^2 \ln x \Big|_1^2 - \int_1^2 \frac{1}{2}x\,dx$

a. $x^2 \ln x \,|_1^2 - \int_1^2 x^2 dx$

b. $\frac{1}{2}x^2 \ln x \,|_1^2 + \frac{1}{2}x \,|_1^2$

c. $x^2 \cdot \frac{1}{x} \,|_1^2 - \int_1^2 \ln x \, dx$

d. $\frac{1}{2}x^2 \ln x \,|_1^2 - \int_1^2 \frac{1}{2}x dx$

الشغل المبذول أو الشغل المطلوب في مسائل فيزيائيه2

A force of 10 lb stretches a spring 6 in from its natural length. Find the work done in stretching this spring 9 in beyond its natural length (1 ft = 12 in).

أحدثت قوة من 10 lb تمدد نابض 6 in من طوله الطبيعي. أوجد الشغل المبذول في تمدد هذا النابض 9 in أبعد عن طوله الطبيعي (1 ft = 12 in).

$6\,in = 6 \div 12 = \frac{1}{2}\,ft$

$9\,in = 9 \div 12 = \frac{3}{4}\,ft$

$F = kx$

$10 = k\left(\frac{1}{2}\right) \rightarrow \boxed{k = 20}$

in $F(x) = 20x$

$w = \int_0^{3/4} 20x\,dx$

$= \frac{45}{8}\,ft\text{-}lb$

a. $W = 15$ ft-lb

b. $W = \frac{135}{2}$ ft-lb

c. $W = \frac{45}{8}$ ft-lb

d. $W = \frac{15}{2}$ ft-lb

تكاملات متنوعة باستخدام طريقة التكامل بالتعويض2

$\int \frac{1}{1+x^2}dx = \tan^{-1}x + c$

Determine m if

$$\int \frac{x^3}{1+x^m}\,dx = \frac{1}{4}\tan^{-1}x^4 + c$$

Where $m \neq 0$

أوجد قيمة m إذا كان

$$\int \frac{x^3}{1+x^m}\,dx = \frac{1}{4}\tan^{-1}x^4 + c$$

حيث $m \neq 0$

$\int \frac{x^3}{1+(x^4)^2}dx$

$y = x^4 \rightarrow dy = 4x^3\,dx \rightarrow dx = \frac{dy}{4x^3}$

$I = \int \frac{\cancel{x^3}}{1+y^2}\cdot\frac{dy}{4\cancel{x^3}}$

$= \frac{1}{4}\tan^{-1}y + c$

$= \frac{1}{4}\tan^{-1}x^4 + c$

$\therefore \boxed{m = 8}$

a. $m = 4$

b. $m = 2$

c. $m = 8$

d. $m = 6$

Identify the integral for the surface area of the surface of revolution for the shape described by $y = \sqrt{x}$, $1 \leq x \leq 2$, revolved about the x axis.

حدد التكامل لمساحة السطح الدوراني الذي يتكون بدوران $y = \sqrt{x}$، حيث $1 \leq x \leq 2$، حول المحور x.

$y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

$(y')^2 = \frac{1}{4x}$

$S = 2\pi \int_1^2 \sqrt{x} \sqrt{1 + \frac{1}{4x}}\, dx$

a. $S = 2\pi \int_1^2 \sqrt{1 + \frac{1}{4x}}\, dx$

b. $S = 2\pi \int_1^2 \sqrt{x} \sqrt{1 + \frac{1}{4x}}\, dx$

c. $S = \int_1^2 \sqrt{x} \sqrt{1 + \frac{1}{4x}}\, dx$

d. $S = 2\pi \int_1^2 \sqrt{x} \sqrt{1 + x}\, dx$

A diver drops from 120 ft above the water (about the height of an Olymoic platform dive). What is the -''ver's velocity at impact? (gravitational constant 32 ft/sec^2).

يسقط غطاس من ارتفاع 120 ft فوق الماء (ارتفاع منصة الغطس الأولمبية نفسه تقريبا). ما السرعة المتجهة للغطاس لحظة الاصطدام؟ (ثابت الجاذبية 32 ft/sec^2).

$y'(0)=0$
$y(0)=120$

$y''(t)=-32$

$y'(t)=-32t+y'(0)$

$\Rightarrow y'(t)=-32t$

$y(t)=-16t^2+120$

لحظة الاصطدام يكون

$y(t)=0$

$-16t^2+120=0$

$\Rightarrow t=\frac{\sqrt{30}}{2}$

سرعة الاصطدام يكون

$\Rightarrow y'\left(\frac{\sqrt{30}}{2}\right)=-32\left(\frac{\sqrt{30}}{2}\right)$

$=-16\sqrt{30}$

$\boxed{-32\sqrt{\frac{15}{2}}}$

a. -32 ft/sec

b. $\sqrt{\frac{15}{2}}$ ft/sec

c. $-32\sqrt{\frac{15}{2}}$ ft/sec

d. 120 ft/sec

The differential equation $y' = \frac{xy}{1+x^2}$ is separable. Find the general solution in an explicit form.

المعادلة التفاضلية $y' = \frac{xy}{1+x^2}$ قابلة للفصل.

أوجد الحل العام بصيغة صريحة

$$\frac{dy}{dx} = \frac{xy}{1+x^2}$$

$$\int \frac{1}{y}\,dy = \frac{1}{2}\int \frac{2x}{1+x^2}\,dx$$

$$\ln|y| = \frac{1}{2}\ln|1+x^2| + c$$

$$\ln|y| = \ln(1+x^2)^{1/2} + c$$

$$\ln|y| = \ln\sqrt{1+x^2} + c$$

$$|y| = e^{\ln\sqrt{1+x^2}+c}$$

a. $y = x^2 + 1 + c$

b. $y = e^{\ln|x^2+1|+c}$

c. $y = e^{\ln\sqrt{x^2+1}+c}$

d. $y = \ln|x^2+1| + c$

إذا كان $\dfrac{2x^2-5x+2}{x^3+x}=\dfrac{A}{x}+\dfrac{Bx+C}{x^2+1}$

فما قيمة $\displaystyle\int \frac{2x^2-5x+2}{x^3+x}\,dx$ ؟

a) $2\ln|x|-5\tan^{-1}x+c$

b) $\ln|x|+\ln|x^2+1|+c$

c) $\ln|x^3+x|+c$

d) $5\ln|x|-2\tan^{-1}x+c$

$\dfrac{2x^2-5x+2}{x^3+x}=\dfrac{A}{x}+\dfrac{Bx+C}{x^2+1}=\dfrac{A(x^2+1)+x(Bx+C)}{x(x^2+1)}$

$2x^2-5x+2=Ax^2+A+Bx^2+Cx$

$=(A+B)x^2+Cx+A$

$A=2$

$C=-5$

$A+B=2$

$2+B=2$

$\boxed{B=0}$

$I=\int\frac{2}{x}dx+\int\frac{-5}{x^2+1}dx$

$=2\ln|x|-5\tan^{-1}x+c$

Find the mean of the random variable with the probability density function (pdf) $f(x) = 3x^2$ on the interval $[0, 1]$.

أوجد متوسط المتغير العشوائي لدالة الكثافة الاحتمالية (pdf) $f(x) = 3x^2$ على الفترة $[0, 1]$

a. $\frac{4}{3}$

b. $\frac{5}{4}$

c. $\frac{3}{4}$

d. $\frac{4}{5}$

$$\mu = \int_0^1 x \cdot 3x^2 \, dx = \int_0^1 3x^3 \, dx$$

$$= \boxed{\frac{3}{4}}$$

أي مما يلي ليست دالة كثافة دالة احتمالية pdf على

$a)\ f(x) = e^{-\frac{x}{2}}, [0, ln4]$

$b)\ f(x) = sinx\ , [0, \pi]$

$c)\ f(x) = \frac{3}{8}x^2, [0, 2]$

$d)\ f(x) = \cos x\ , \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

$\int_0^{\ln 4} e^{-\frac{x}{2}}\, dx = \boxed{1}$

$\int_0^{\pi} \sin x\, dx = \boxed{2}$

$\int_0^{2} \frac{3}{8} x^2\, dx = \boxed{1}$

$\int_0^{\pi/2} \cos x\, dx = \boxed{1}$

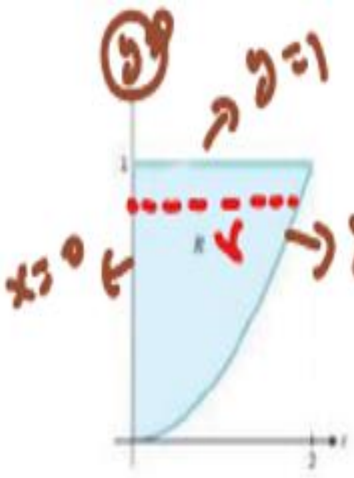
لتكن R هي المنطقة المحدودة بواسطة $x = 0$ و $y = \frac{1}{4}x^2$ و $y = 1$. ما حجم المجسم الذي يتكون من دوران R حول المحور y؟

a. $V = \int_0^2 \pi\left[\left(4 - x^2 + \frac{x^4}{16}\right) - 1\right] dx$

b. $V = \int_0^1 \pi\left(\sqrt{4y}\right)^2 dy$

c. $V = \int_0^2 \pi(1)^2\, dx - \int_0^2 \pi\left(\frac{1}{4}x^2\right)^2 dx$

d. $V = \int_0^1 \left(\sqrt{4y}\right)^2 dy$



$x^2 = 4y$

$\rightarrow x = \pm\sqrt{4y}$

$\therefore x = \sqrt{4y}$

$r = \sqrt{4y}$

$\therefore V = \pi \int_0^1 \left(\sqrt{4y}\right)^2 dy$

أوجد حجم إناء فخاري له مقاطع عرضية دائرية بنصف قطر $\left(4+\sin\frac{x}{2}\right)$ cm، لكل $0 \le x \le 2\pi$.

a. $V = (33\pi^2 + 32\pi)\ cm^3$

b. $V = 33\pi^2\ cm^3$

c. $V = 65\pi\ cm^3$

d. $V = 32\pi\ cm^3$

$$r = 4 + \sin\frac{x}{2}$$

$$A(x) = \pi r^2 = \pi\left(4+\sin\frac{x}{2}\right)^2$$

$$V = \int_0^{2\pi} \pi\left(4+\sin\frac{x}{2}\right)^2\, dx$$

$$V = \pi\int_0^{2\pi} \left(16 + 8\sin\frac{x}{2} + \sin^2\frac{x}{2}\right) dx$$

$$V = \pi\int_0^{2\pi} \left(16 + 8\sin\frac{x}{2} + \frac{1}{2}(1-\cos x)\right) dx$$

$$V = \pi\left[16x - 16\cos\frac{x}{2} + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\sin x\right]_0^{2\pi}$$

اوجد قيمة a حيث $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ إذا كان

$$\int_0^a (\cos^2 x - \sin^2 x)dx = \frac{1}{2}$$

a) $a = \frac{\pi}{3}$

b) $a = \frac{\pi}{4}$

c) $a = \frac{\pi}{6}$

d) $a = \frac{\pi}{8}$

$$\int_0^a (\cos^2 x - \sin^2 x)\,dx = \frac{1}{2}$$

$$\int_0^a \cos 2x\,dx = \frac{1}{2}$$

$$\cancel{\frac{1}{2}} \sin 2x \Big|_0^a = \cancel{\frac{1}{2}}$$

$$\sin 2x \Big|_0^a = 1$$

$$\sin 2a - 0 = 1$$

$$\sin 2a = 1$$

$$2a = \frac{\pi}{2} \rightarrow \boxed{a = \frac{\pi}{4}}$$

أوجد قيمة التكامل $\int \frac{e^{-\frac{2}{x^2}}}{x^3}\,dx$.

a. $e^{x^3} + c$

b. $\ln\left|e^{-\frac{2}{x^2}}\right| + c$

c. $\frac{1}{4} e^{-\frac{2}{x^2}} + c$

d. $\ln|x^3| + c$

$y = \frac{-2}{x^2} \rightarrow y = -2x^{-2}$

$\rightarrow dy = 4x^{-3}\,dx$

$\rightarrow dy = \frac{4}{x^3}\,dx \rightarrow dx = \frac{x^3}{4}\,dy$

$I = \int \frac{e^y}{\cancel{x^3}} \cdot \frac{\cancel{x^3}}{4}\,dy \quad = \frac{1}{4} e^y + c$

$= \frac{1}{4} e^{\frac{-2}{x^2}} + c$

اوجد قيمة m إذا كان

$$m \neq 0 \text{ حيث } \int \frac{lnx}{mx} dx = \frac{1}{8} ln^2 x + c$$

$a)\ m = 6$

$b)\ m = 8$

$c)\ m = 4$

$d)\ m = 2$

$$\frac{1}{m} \int \frac{\ln x}{x} dx = \frac{1}{m} \cdot \int \ln x \cdot \frac{1}{x} dx$$

$y = \ln x$

$dy = \frac{1}{x} dx$

$$= \frac{1}{m} \int y \cdot dy$$

$$= \frac{1}{m} \cdot \frac{y^2}{2} + c$$

$$= \frac{1}{2m} \cdot y^2 + c = \boxed{\frac{1}{2m} (\ln x)^2 + c}$$

$2m = 8$

$m = 4$

Evaluate the integral $\int \frac{1}{a^2+x^2}\,dx$, where $a \neq 0$

أوجد قيمة التكامل $\int \frac{1}{a^2+x^2}\,dx$ ، حيث $a \neq 0$

a. $\frac{1}{a}\cot^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + C$

b. $\frac{1}{a}\tan^{-1}x + C$

c. $\frac{1}{a}\sin^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + C$

d. $\frac{1}{a}\tan^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + C$

$$\int \frac{1}{a^2+x^2}\,dx$$

$$= \frac{1}{a}\tan^{-1}\frac{x}{a} + C$$

Evaluate the integral $\int \frac{4x^3-1}{x^4-x}dx$

أوجد قيمة التكامل $\int \frac{4x^3-1}{x^4-x}dx$

a. $\ln|x^3-1|+\ln|x|+c$

b. $\ln\left|\frac{4x^3-1}{x^4-x}\right|+c$

c. $\ln|4x^3-1|+c$

d. $\ln|x^4-x|+c$

$$\int \frac{4x^3-1}{x^4-x}dx = \ln|x^4-x|+c$$

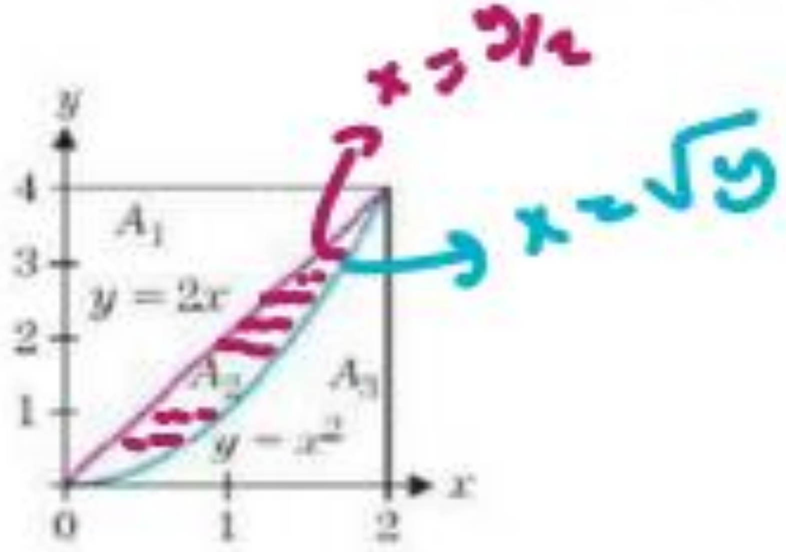
$$= \ln|x(x^3-1)|+c$$

$$= \ln|x|+\ln|x^3-1|+c$$

!!!

بدلالة A_1 و A_2 و A_3، حدد المساحة المعطاة بالتكامل $\int_0^4 \left(\sqrt{y} - \frac{y}{2}\right) dy$.

In terms of A_1, A_2 and A_3, identify the area given by the integral $\int_0^4 \left(\sqrt{y} - \frac{y}{2}\right) dy$.



a. $A_1 + A_2$

b. A_2

c. A_3

d. A_1

Identify the integral for the surface area of the surface of revolution for the shape described by $y = e^x$, $0 \le x \le 1$, revolved about the x-axis.

حدد التكامل لمساحة السطح الدوراني الذي يتكون بدوران $y = e^x$، حيث $0 \le x \le 1$، حول المحور x.

$y' = e^x$

$(y')^2 = e^{2x}$

$S = 2\pi \int_0^1 e^x \sqrt{1 + e^{2x}}\, dx$

a. $S = \pi \int_0^1 e^x \sqrt{1 + e^{2x}}\, dx$

b. $S = 2\pi \int_0^1 e^x \sqrt{1 + e^{2x}}\, dx$

c. $S = 2\pi \int_0^1 \sqrt{1 + e^{2x}}\, dx$

d. $S = \pi \int_0^1 e^x \sqrt{1 + e^x}\, dx$

A force of 5 lb stretches a spring 4 in from its natural length. Find the work done in stretching this spring 6 in beyond its natural length (1 ft = 12 in).

أحدثت قوة من 5 lb تمدد نابض 4 in من طوله الطبيعي. أوجد الشغل المبذول في تمدد هذا النابض 6 in أبعد عن طوله الطبيعي (1 ft = 12 in).

a. $W = \frac{45}{2}$ ft-lb

b. $W = \frac{15}{8}$ ft-lb

c. $W = 15$ ft-lb

d. $W = 7.5$ ft-lb