التكامل بالاجزاء

هو عملية حاصل ضرب دالتين من نوعين مختلفين . حيث نشتق أحدهما ونكامل الأخرى

تكامل دالة حدودية مع دالة مثلثية مثال :

* $\int x \cos x \, dx$

* $\int x^2 \cos x \, dx$

* $\int x \tan^2 x \, dx$

* $\int \frac{x}{\sin^2 x} \, dx$

* $\int x \sin x \cos x \, dx$

* $\int x \sec^2 x \, dx$

يجب ان تكون النسبة المثلثية زاويتها من الدرجة الاولى

* $\int x \sin x^2 \, dx$

زاويتها ليست من الدرجة الاولى

ثانياً: دالة حدودية   مع دالة أسية :

$$* \int x\, e^{x}\, dx \quad , \quad \int x\, e^{x^2}\, dx$$

ثانياً: دالة حدودية   مع دالة لوغاريتمية :

$$\int x \ln x\, dx \;, \quad \int x^3 \ln x\, dx$$

ثانياً: دالة مثلثية   مع دالة أسية :

$$* \int e^{x} \sin x\, dx \quad , \quad \int e^{x^2} \cos x\, dx$$

استنتاج القانون

$$(u\,v)' = udv + vdu$$

$$\int (uv)' = \int udv + \int vdu$$

$$uv = \int udv + \int vdu$$

$$uv - \int vdu = \int udv$$

$$\therefore \int udv = uv - \int vdu$$

$$\int x \cos 2x \, dx$$ احسب (1)

$$\int x.\cos x \, dx = uv - \int v du$$

$u = x$, $dv = \cos 2x dx$

$du = dx$ $v = \dfrac{\sin 2x}{2}$

$- \int$

$$= x . \frac{\sin 2x}{2} - \frac{1}{2} \int \sin 2x . dx$$

$$= \frac{1}{2} x \sin x - \frac{1}{2} . \frac{-\cos 2x}{2} + c$$

$$= \frac{1}{2} x \sin x + \frac{1}{4} \cos 2x + c$$

(2) احسب $\int x\, sec^2x\, dx$

$$\int x \,.\, secx^2\, dx = uv - \int vdu$$

$u = x \quad , \quad dv = sec^2xdx$

$du = dx \quad , \quad \int \quad v = tanx$

$$= x\ tanx - \int tanx\ dx$$

$$= x\ tan\ x - \int \frac{sinx}{cosx}\, dx$$

$$= x\tan x - (-)\int \frac{-sinx}{cosx}\,dx$$

$$= x\tan x + \int \frac{-sinx}{cosx}\,dx$$

$$= x\tan x + ln|cosx| + c$$

$$3)\int x.\sin x\cos x.dx$$

$$\sin 2x = 2\sin x.\cos x$$

$$\sin x.\cos x = \frac{1}{2}\sin 2x$$

$$= \frac{1}{2}\int x.\sin 2x\ dx$$

$$\int udv = uv - \int vdu$$

$u = x \qquad dv = \sin 2x dx$

$du = dx \qquad v = -\frac{1}{2}\cos 2x$

$$= \frac{1}{2}\left[-\frac{1}{2}x\cos x - \int -\frac{1}{2}\cos 2x dx\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[-\frac{1}{2}xcosx + \frac{1}{2}.\frac{1}{2}sin2x \right] + c$$

$$= \frac{1}{2}\left[-\frac{1}{2}xcosx + \frac{1}{4}sin2x \right] + c$$

حصة 2

1) $\int x \tan^2 x \, dx$

$\tan^2 x = \sec^2 x - 1$

$u = x \qquad dv = \tan^2 x \, dx$

$du = dx \qquad v = \tan x - x$

$= \int u\,dv = uv - \int v\,du$

$$= x(\tan x - x) - \int (\tan x - x)\,dx$$

$$= x(tanx - x) - \int (\frac{sinx}{cosx} - x)dx$$

$$= x(tanx - x) - \left[-ln|cosx| - \frac{x^2}{2}\right] + c$$

$$= x(tanx - x) + ln|cosx| + \frac{x^2}{2} + c$$

$$2)\ \int x^2 \ln x\, dx$$

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du$$

في حالة ان يكون في السؤال Ln x نفرض u =lnx

$u = \ln x$ $\qquad$ $dv = x^2 dx$

$du = \frac{1}{x} dx$ $\qquad$ $v = \frac{x^3}{3}$

$$\int x^2 \ln x\, dx = \frac{x^3}{3} \ln x - \int \frac{x^3}{3} \cdot \frac{1}{x}\, dx$$

$$= \frac{x^3}{3} \ln x - \frac{1}{3} \int x^2 dx$$

$$= \frac{x^3}{3} \ln x - \frac{1}{3} \cdot \frac{x^3}{3} + c$$

$$= \frac{x^3}{3} \ln x - \frac{1}{9} x^3 + c$$

حصة 3

بسبب وجود x^3 سنفرض u, dv 3 مرات
لذا نلجأ إلى التكامل الجدولي الذي يستخدم
في حالة توفر شرطين :
1)الدالة الاولى اشتقاقها يؤدي للصفر
2)الدالة الثانية سهل تكاملها

$$1)\ \int x^3\, sinx\, dx$$

u (نشتق)		dv(نكامل)
x^3		$sinx$
	$+$	
$3x^2$		$-cosx$
	$-$	
$6x$		$-sinx$
	$+$	
6		$cosx$
	$-$	
0		$sinx$

$$= -x^3cosx + 3x^2sinx + 6xcosx - 6sinx + c$$

$$2)\ \int x^4\, e^{2x}\, dx$$

$$= \frac{1}{2}x^4e^{2x} - x^3e^{2x} + \frac{3}{2}x^2e^{2x} - \frac{3}{2}xe^{2x} + \frac{3}{4}e^{2x} + c$$

u (مشتق)		dv (تكامل)
x^4		e^{2x}
$\cancel{4}x^3$	$+$	$\frac{1}{2}e^{2x}$
$12x^2$	$-$	$\frac{1}{\cancel{4}}e^{2x}$
$24x$	$+$	$\frac{1}{8}e^{2x}$
24	$-$	$\frac{1}{16}e^{2x}$
0	$+$	$\frac{1}{32}e^{2x}$

حصة4

$$\int \cos^{-1}x\,dx$$

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du$$

$u = \cos^{-1}x$ $\qquad$ $dv = dx$

$du = \dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}dx$ $\qquad$ $-\int$ $\qquad$ $v = x$

$$= x\cos^{-1}x - \int x \cdot \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$$

$$= x\cos^{-1}x + \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$$

$$u = 1 - x^2$$

$$\frac{du}{dx} = -2x$$

$$dx = \frac{-du}{2x}$$

$$= x\cos^{-1}x + \int \frac{\cancel{x}}{\sqrt{u}}\,\frac{du}{-2\cancel{x}} = x\cos^{-1}x - \frac{1}{2}\int u^{-\frac{1}{2}}\,du$$

$$= x\cos^{-1}x - \frac{1}{\cancel{2}} \cdot \frac{\cancel{2}}{1}\,u^{\frac{1}{2}} + c$$

$$= x\cos^{-1}x - \sqrt{1-x^2} + c$$

$$2)\int \sin\sqrt{x}\,dx$$

$$u = \sqrt{x}$$

$$\frac{du}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$dx = 2\sqrt{x}\,du$$

$$dx = 2u\,du$$

$$= \int \sin u\,(2u\,du) = \int 2u \sin u\,du$$

u (نشتق)		dv(نكامل)
$2u$		$\sin u$
	+	
2		$-\cos u$
	-	
0		$-\sin u$

$$= -2u\cos u + 2\sin u + c$$

$$= -2\sqrt{x}\cos\sqrt{x} + 2\sin\sqrt{x} + c$$

3) $\int \cos(\ln x)\,dx$

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du$$

$$u = \cos(\ln x) \qquad dv = dx$$

$$du = \frac{-\sin(\ln x)}{x}\,dx \qquad -\int \quad v = x$$

$$\int \cos(\ln x)\,dx = \overset{v}{x}\cdot\overset{u}{\cos(\ln x)} - \int \cancel{x}\,.\,\frac{-\sin(\ln x)}{\cancel{x}}\,dx$$

$$= x\cos(\ln x) + \int \sin(\ln x)\,dx$$

$$u = \sin(\ln x) \qquad dv = dx$$

$$du = \frac{\cos(\ln x)}{x}\,dx \qquad -\int \quad v = x$$

$$\int cos(lnx)dx = xcos(lnx) + xsin(lnx) - \int cos(lnx)\ dx$$

$$\int cos(lnx)dx + \int cos(lnx)dx = xcos(lnx) + xsin(lnx) + c$$

$$2\int cos(lnx)dx = xcos(lnx) + xsin(lnx)$$

$$\int cos(lnx)dx = \frac{1}{2}[xcos(lnx) + xsin(lnx)] + c$$

حصة 5

$*\int_0^1 x^5 e^{x^3}\,dx$ اوجد قيمة

$$u = x^3$$

$$\frac{du}{dx} = 3x^2 \rightarrow dx = \frac{du}{3x^2}$$

$$\int_0^1 x^{\cancel{5}\,3} e^u \frac{1\,du}{3\cancel{x^2}} = \frac{1}{3}\int_0^1 x^3 e^u\,du$$

x	0	1
u	0	1

D	I
u	e^u
1 $(+)$	e^u
0 $(-)$	e^u

$$= \frac{1}{3}\int_0^1 u e^u\,du$$

$$= \frac{1}{3}\left[u e^u - e^u\right]_0^1$$

$$= \frac{1}{3}\left[(e^1 - e^1) - (0 - 1)\right] = \frac{1}{3}[1] = \frac{1}{3}$$