تم تحميل هذا الملف من موقع المناهج الإماراتية

*للحصول على أوراق عمل لجميع الصفوف وجميع المواد اضغط هنا

https://almanahj.com/ae

* للحصول على أوراق عمل لجميع مواد الصف الثاني عشر المتقدم اضغط هنا

https://almanahj.com/ae/15

* للحصول على جميع أوراق الصف الثاني عشر المتقدم في مادة رياضيات ولجميع الفصول, اضغط هنا

https://almanahj.com/ae/15

* للحصول على أوراق عمل لجميع مواد الصف الثاني عشر المتقدم في مادة رياضيات الخاصة بـ اضغط هنا

https://almanahj.com/ae/15

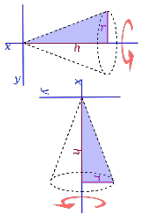
* لتحميل كتب جميع المواد في جميع الفصول للـ الصف الثاني عشر المتقدم اضغط هنا

https://almanahj.com/ae/grade15

للتحدث إلى بوت المناهج على تلغرام: اضغط هنا

https://t.me/almanahj_bot

(6-2) الحجوم الدّورانية: شرائح (slices) وأقراص(disks) وحلقات(washers)



- الحجوم الدّورانية وهي الحجوم التي تنشأ من دوران المساحة حول محور دوران ما.
- محاور الدّوران محوران: حول محور $(x) \Leftarrow y = 0$ أو حول المستقيم $y = c$.

وحول محور $(y) \Leftarrow x = 0$ أو حول المستقيم $x = d$.

- نوجد الحجم عن طريق: الارتفاع . $Area$(المساحة)(مساحة مقطع عرضي) $= v$
- $v_i = A(c_i)\,\Delta x$

العرض مساحة مقطع عرضي

$$v = \sum_{i=1}^{n} A(c_i)\,\Delta x \Longrightarrow v = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} A(c_i)\,\Delta x$$

- وبصيغة التّكامل هي:

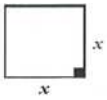
1) حجم مجسّم ذو مساحة مقطع $A(x)$ معروفة وقابلة للتّكامل من $x = a$ إلى $x = b$ هو $v = \int_{x=a}^{x=b} A(x)\,dx$

أو من $y = c$ إلى $y = d$ هو $v = \int_{y=c}^{y=d} A(y)\,dy$

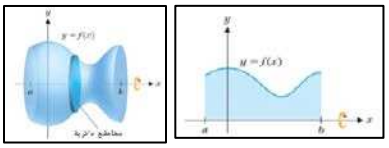
2) الحجم معروف بأنّه $v = Bh$

مساحة القاعدة Δy Δx

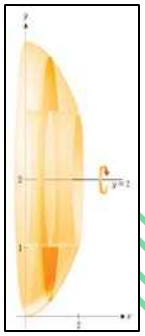
3) في المقاطع العرضية المربّعة والتي تكون عمودية عند (x) فإنّ المساحة هي $A(x) = x^2$



4) في المقاطع العرضية الدائرية فإنّ نصف القطر $= f(x) \Leftarrow y = f(x) = r$ ، وعليه فإنّ المساحة $A(x) = \pi r^2$ أي أنّ $A(x) = \pi[f(x)]^2$. وهذه تكون في حال قسمنا المنطقة إلى مستطيلات تعامد محور الدوران ويدور طرف واحد فقط والآخر يكون على محور الدوران.

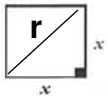


وهي ما تسمّى بطريقة الأقراص (*Disks*) أي عدم وجود فراغ أو ثقب.

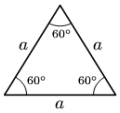


5) أمّا عند وجود ثقب أو فراغ فيدور الطّرفان وعندها تسمّى طريقة حلقات (washers) أو (العجل).

وفي هذه الحالة فإنّ المساحة (أي مساحة حلقة الرّبط) $\pi R^2 - \pi r^2$ حيث R هو نصف القطر الخارجي و r هو نصف القطر الداخلي. $A(x) = \pi(R^2 - r^2)$

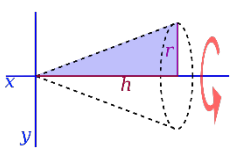


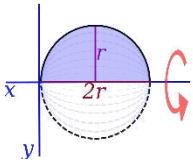
6) ملاحظة: قطر المربّع $=$ (طول الضّلع) $\sqrt{2}$ أي أنّ $r = \sqrt{2}x$.

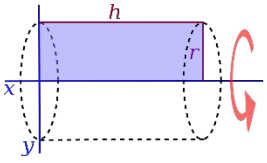


7) ارتفاع مثلّث متساوي الأضلاع هو (طول الضّلع) $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

8)







Juma alhobaki 0508124370

أسئلة الحجوم تتدرّج بالصّورة التالية:

1 حجم مجسّم مع مساحة مقطع عرضي $A(x)$

س1) جد حجم المجسّم إذا كانت $A(x) = 2(x+1)^2$ ، $1 \leq x \leq 4$ ؟

2 س2) قدّر الحجم من مساحات المقطع العرضي

$x(m)$	0.0	0.5	1.0	1.5	2
$A(x)\ m^2$	1	1.2	1.4	1.3	1.2

3 قم بإعداد تكامل وحساب الحجم / الشّرائح (أي جزّئ المجسّم إلى شرائح عمودية على محور الدوران).

س3) **A)** يبلغ ارتفاع الهرم الأكبر 152 متر ويرتفع من قاعدة مربّعة طول ضلعها 230 متر. احسب حجمه باستخدام التّكامل؟

B) على فرض أنّه بدلاً من إكمال الهرم ، توقّف عمّال البناء عند ارتفاع 70 متر، بهضبة علوية مربّعة طول ضلعها 115 متر. احسب حجم هذا البناء؟

الشبكي
juma alshobaki 0508124370

س4) لإناء فخّاري مقاطع عرضية دائرية بنصف قطر $4 + sin\frac{x}{2}$ لكل $0 \leq x \leq 2\pi$. ارسم صورة للإناء واحسب حجمه؟

س5) إنّ قاعدة المجسّم (v) هي الدائرة $x^2 + y^2 = 1$. جد الحجم إذا كان لدى v: **A)** مقاطع عرضية مربّعة متعامدة على (x) ؟

B) مقاطع عرضية على شكل نصف دائرة متعامدة على (x) ؟

س6) جد حجم المجسّم الذي قاعدته المنطقة المحصورة بمنحنى الدالة $y = e^{-x}$ والمستقيمات $y = 0$, $x = 1$, $x = 0$ إذا كانت المقاطع العرضية مثلّثات متساوية الأضلاع ومتعامدة على المحور السّيني؟

Juma alshobaki 0508124370

س7) قاعدة المجسّم v هي المنطقة المحدودة بِ $y = x^2$ و $y = 2 - x^2$. جد الحجم إذا كان لدى v:

A) مقاطع عرضية مربّعة متعامدة على المحور x ؟

B) مقاطع عرضية على شكل نصف دائرة متعامدة على المحور x ؟

juma alshobaki 0508124370

C) مقاطع عرضية مثلّثات متساوية الأضلاع متعامدة على المحور x ؟

س8) يتم إعطاء الرّسم التخطيطي لقبّة $y = 60 - \frac{x^2}{60}$ لكل $-60 \le x \le 60$ بمقاطع عرضية دائرية متعامدة على المحور y . جد حجم القبّة؟

مفهوم الأقراص (Disks) والحلقات (العجل) (washers)

الأقراص تكون بدون فراغات	الحلقات تكون بفراغات أو ثقب
أقراص دوران حول (x) : $v = \int_{x=a}^{x=b} \pi[f(x)]^2\, dx$	حلقات دوران حول (x) : $v = \int_{x=a}^{x=b} \pi(R^2 - r^2)\, dx$
أقراص دوران حول (y) : $v = \int_{y=c}^{y=d} \pi[g(y)]^2\, dy$	حلقات دوران حول (y) : $v = \int_{y=c}^{y=d} \pi(R^2 - r^2)\, dy$

أقراص حول (x)

س1) احسب حجم المجسّم الذي تكوّن من دوران المنطقة المذكورة المحدودة بـ: $y = 2 - x$ ، $y = 0$ ، $x = 0$ حول المحور (x) ؟

س2) جد الحجم المتولّد من دوران المنطقة المحدودة بـ: $y = \sqrt{x}$ ، $y = 1$ ، $x = 4$ حول $y = 1$ ؟

juma alshobaki 0508124370

أقراص حول (y)

س1) احسب حجم المجسّم الذي تكوّن من دوران المنطقة المحدودة بِ: $y = \sqrt{x}$ ، $y = 2$ ، $x = 0$ حول y ؟

س2) جد الحجم المتولّد من دوران المنطقة المحدودة بِ: $x = y^2 + 1$ ، $x = 3$ حول $x = 3$ ؟

حلقات حول (x)

س1) جد الحجم النّاتج من دوران المنطقة المحدودة بِ: $y = x^2 + 1$ ، $y = -x + 3$ حول محور (x) ؟

الشوبكي
0508124370
juma alshobaki

حلقات حول (y)

س1) جد الحجم النّاتج من دوران المنطقة المحدودة بِـ: $y = x^2$ ، $y = 2x$ في الرّبع الأوّل والدّوران حول y ؟

س2) أثبت قانون حجم الكرة بدوران الدائرة $x^2 + y^2 = r^2$ حول المحور y ؟

juma alshobaki 0508124370

س3) جد الحجم النّاتج من دوران المنطقة المحدودة بِـ: $x = 2$ ، $x = 0$ ، $y = 0$ ، $y = e^x$ حول المحور y ؟

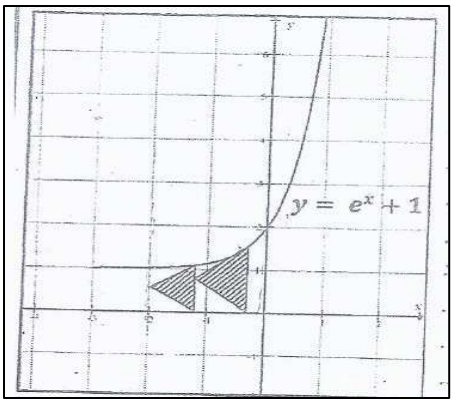
أسئلة متنوّعة

س1) لتكن R هي المنطقة المحدودة بواسطة $y = 4 - x^2$ ، $y = 0$. جد أحجام الأجسام التي تمّ الحصول عليها من دوران R حول كل من التّالي: A) المحور y ؟ B) $y = -3$ ؟ C) $y = 7$ ؟ D) $x = 3$ ؟

الشوبكي
juma alshobaki 0508124370

س2) جد الحجم النّاتج من دوران المنطقة المحدودة بِـ: $y = \sqrt{\frac{x}{x^2+2}}$ والمحور x و $x = 1$ حول المحور x ؟

س3) جد حجم المجسّم الذي يقع بين مستويين عموديين على المحور السيني عند $x = 0$ ، $x = -2$ والمقاطع العرضية العمودية على المحور السيني في الفترة $[-2, 0]$ هي مثلّثات متطابقة الأضلاع، ويقع أحد ضلعيه بين المنحنى $y = e^x + 1$ ومحور السينات؟



س4) على فرض أنّه يتم دوران المربّع المكوّن من نقاط (x, y) مع $-1 \leq x \leq 1$ ، $-1 \leq y \leq 1$ حول المحور y . أثبت أنّ حجم المجسّم الناتج هو 2π ؟

س5) على فرض أنّه يتم دوران الدائرة $x^2 + y^2 = 1$ حول المحور y. أثبت أنّ حجم المجسّم الناتج هو $\frac{4}{3}\pi$ ؟

الشوبكي
0508124370
jumaa alshobaki

س6) على فرض يتم دوران المثلّث الذي رؤوسه $(-1,-1)$, $(0,1)$, $(1,-1)$ حول المحور y . أثبت أنّ حجم المجسّم الناتج هو $\frac{2}{3}\pi$ ؟

س7) أرسم المربّع والدائرة والمثلّث في الأسئلة من (4-6)، وبيّن أنّ الأحجام النسبية للمناطق التي تمّ دورانها هي أسطوانة، كرة، مخروط، والنسبة هي $3:2:1$ ؟

س8) أثبت أنّ ناتج دوران $x=y^2$ و $x=r$ حول r هو $\frac{16}{15}\pi r^{\frac{5}{2}}$ ؟

juma alshobaki 0508124370

س9) جد بالتّكامل حجم المجسّم الناتج من دوران المنطقة المثلّثية التي رؤوسها $(0,0)$, $(b,0)$, $(0,h)$ حول محور السينات؟

الشوبكي
juma alshobaki 0508124370