الصف : 12 متقدم

الدرس : 2-6

الحجم : شرائح وأقراص وحلقات

الهدف : معرفة حساب الحجم بطريقة الشرائح
معرفة حساب حجم مجسم بطريقة الأقراص .
معرفة حساب حجم مجسم بطريقة الحلقات .

تذكرة : نعلم أن حجم الاسطوانة = القاعدة × الارتفاع

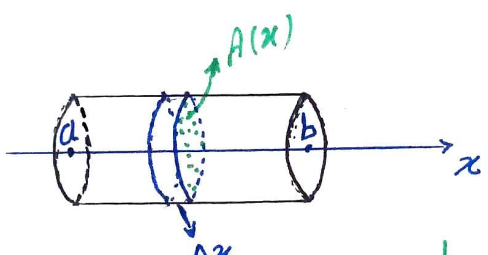
$$V = \pi r^2 \times h$$

حجم الصندوق = (العرض × الطول) × الارتفاع
= القاعدة × الارتفاع .

بشكل عام :

$V =$ مساحة مقطع × الارتفاع

«1» طريقة الشرائح :



في الشكل المجاور اسطوانة .
لحساب حجمها
نقسم الاسطوانة الى شرائح
ارتفاع كل شريحة منها Δx حيث $\Delta x = \frac{b-a}{n}$
وتكون مساحة قاعدة الشريحة $A(x)$. «مساحة الدائرة πr^2»
حجم الشريحة $\boxed{V(x) = A(x) \times \Delta x}$

من أجل عدد n شريحة يكون حجم الاسطوانة

$$\boxed{V = \sum_{i=1}^{n} A(c_i)\,\Delta x}$$

ومنه

$$V = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} A(c_i)\,\Delta x$$

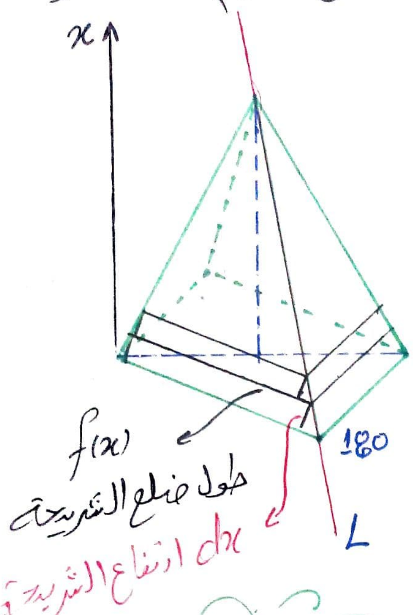
$$\boxed{V = \int_a^b A(x)\,dx}$$

حيث $A(x)$ مساحة المقطع .

«2»

مثال : حساب الحجم من مساحات المقاطع العرضية :

اذا كانت قاعدة هرم مربع طول ضلعها 180 مترًا وارتفاع الهرم 100 متر أوجد حجم الهرم .



الحل :

حجم الشريحة $V(x)=f(x)^2\cdot dx$

نوجد $f(x)$.

كلما ازداد ارتفاع الشريحة عن الأرض حيث $x=0$ يقل طول ضلع قاعدة الشريحة لأنه المستقيم الذي هو حرف الهرم ~~يمي~~ يميل

نوجد معادلة المستقيم L .

ميل المستقيم $m=\frac{180-0}{0-100}=\frac{180}{-100}=-\frac{18}{10}=-\frac{9}{5}$

يتقاطع مع y عند $p=180$

فتكون معادلته $y=mx+p$

$$y=-\frac{9}{5}x+180$$

ميل المستقيم $m=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$

إذن طول ضلع الشريحة $f(x)=-\frac{9}{5}x+180$ مساحتها $A(x)=\left(-\frac{9}{5}x+180\right)^2$

مساحة المربع $(\text{الضلع})^2$

$$V=\int_a^b A(x)\,dx=\int_0^{100}\left(-\frac{9}{5}x+180\right)^2\cdot dx$$

$$=\int_0^{100}\left(\frac{81}{25}x^2-648x+32400\right)dx$$

$$=\left[\frac{81}{25}\times\frac{1}{3}x^3-648\times\frac{1}{2}x^2+32400x\right]_0^{100}$$

$$=\frac{81}{75}(100)^3-324(100)^2+32400(100)-(0-0+0)$$

$$=1{,}080{,}000\ m^3$$

طريقة «2»: يمكن حساب التكامل بالتعويض :

$$V = \int_0^{100} \left(-\frac{9}{5}x + 180\right)^2 dx$$

نفرض $u = -\frac{9}{5}x + 180 \Leftarrow du = -\frac{9}{5}dx \quad \left(-\frac{5}{9} \times\right)$

$$-\frac{5}{9}du = dx$$

حدود التكامل :

$$x = 0 \Rightarrow u = -\frac{9}{5}(0) + 180 = 180$$

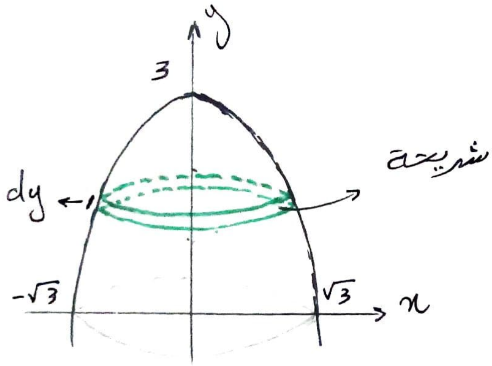
$$x = 100 \Rightarrow u = -\frac{9}{5}(100) + 180 = 0$$

$$V = \int_{180}^{0} u^2\left(-\frac{5}{9}du\right) = -\frac{5}{9}\int_{180}^{0} u^2 du$$

$$= -\frac{5}{9}\left[\frac{1}{3}u^3\right]_{180}^{0} = -\frac{5}{9}\left[\frac{1}{3}(0)^3 - \frac{1}{3}(180)^3\right]$$

$$= 1{,}080{,}000$$

حساب حجم قبة :



مثال: في الشكل المجاور قبة
نصف قطرها عند $y=0$ هو $r=\sqrt{3}$
وارتفاع القبة 3 .
ويعطى الرسم التخطيطي لها بالعلاقة
$y = -x^2 + 3$ على $-\sqrt{3} \leq x \leq \sqrt{3}$
احسب حجم القبة .

الحل: نقسم القبة الى شرائح ارتفاع كل منها dy وتكون الشرائح اسطوانية

$$y = -x^2 + 3 \Rightarrow x^2 = 3 - y \Rightarrow x = \sqrt{3-y} = r$$

$$A(y) = \pi r^2 = \pi(\sqrt{3-y})^2 = \pi(3-y)$$

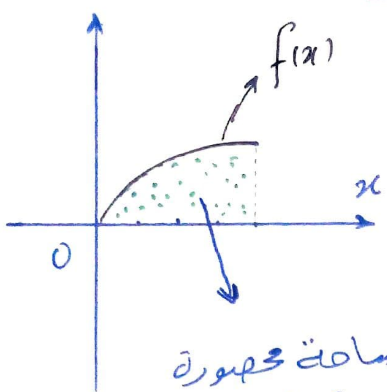
$$V = \int_0^3 A(y)\,dy = \int_0^3 \pi(3-y)\,dy = \left[\pi\left(3y - \frac{1}{2}y^2\right)\right]_0^3$$

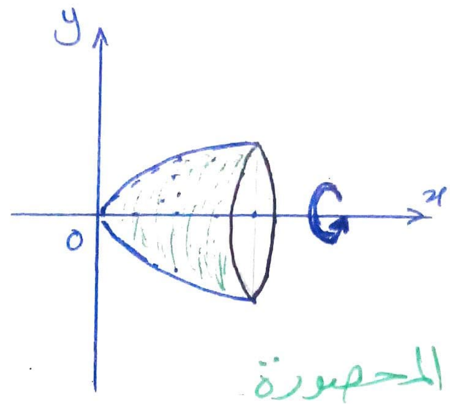
$$= \pi\left(3(3) - \frac{1}{2}(3)^2\right) - \pi\left(3(0) - \frac{1}{2}(0)^2\right)$$

$$= \pi\left(9 - \frac{9}{2}\right) = \frac{9}{2}\pi = 14.137$$

«4»

حساب حجم ناتج عن دوران تمثيل بياني حول محور:



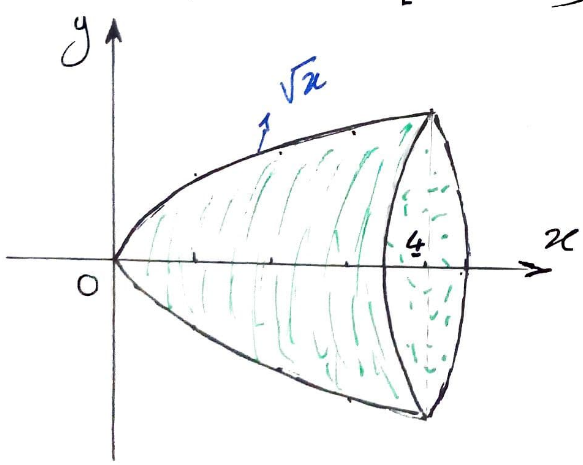


عند دوران المساحة المحصورة بين تمثيل $f(x)$ والمحور x على الفترة $[a,b]$ فإن حجم المجسم الناتج يعطى بالقانون

$$\boxed{V = \int_a^b \pi [f(x)]^2 dx}$$

وتدعى هذه الطريقة بطريقة الأقراص.

مثال: احسب حجم المجسم الناتج من دوران المنطقة التي تقع تحت المنحني $y=\sqrt{x}$ على الفترة $[0,4]$ حول المحور x.



الحل:

$$V = \int_0^4 \pi f^2(x)\, dx$$

$$V = \int_0^4 \pi (\sqrt{x})^2 dx$$

$$V = \pi \int_0^4 x\, dx = \pi \left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^4$$

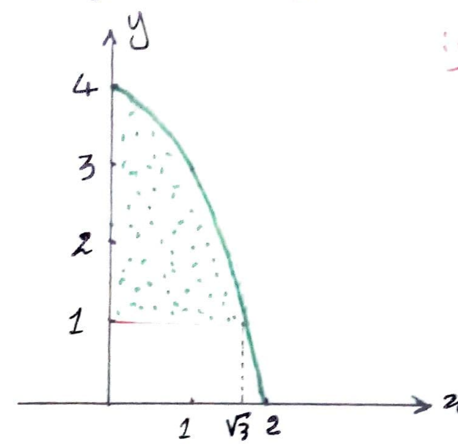
$$V = \pi \left[\frac{1}{2}(4^2) - \frac{1}{2}(0)\right]$$

$$V = \pi (8-0) = 8\pi$$

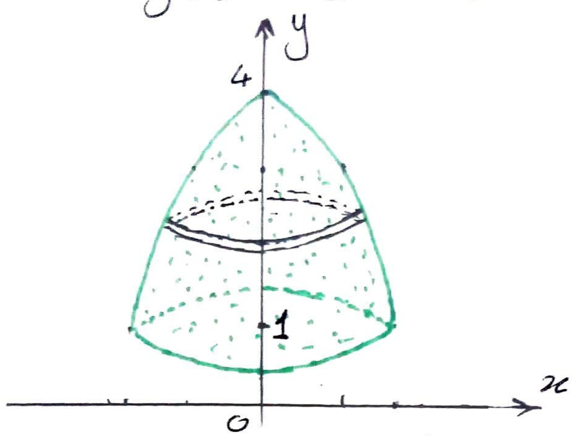
استخدام طريقة الأقراص مع y كمتغير مستقل :

مثال : أوجد حجم الجسم الناتج عن دوران المنطقة المحدودة بين المنحنيين $y = 4 - x^2$ و $y = 1$ من $x = 0$ الى $x = \sqrt{3}$ حول المحور y .

الحل :



التمثيل البياني .



الجسم الناتج عن الدوران

لدينا $y = 4 - x^2 \Rightarrow x^2 = 4 - y \Rightarrow x = \sqrt{4-y}$

المساحة المطلوب دورانها من $y = 1$ حتى $y = 4$.

فيكون

$$V = \pi \int_1^4 f(y)\, dy = \pi \int_1^4 (\sqrt{4-y})^2 dy$$

$$= \pi \int_1^4 (4-y)\, dy = \pi \left[4y - \frac{1}{2} y^2 \right]_1^4$$

$$= \pi \left[\left(4(4) - \frac{1}{2}(4)^2\right) - \left(4(1) - \frac{1}{2}(1)^2\right) \right] = \frac{9\pi}{2}$$

طريقة الحلقات :

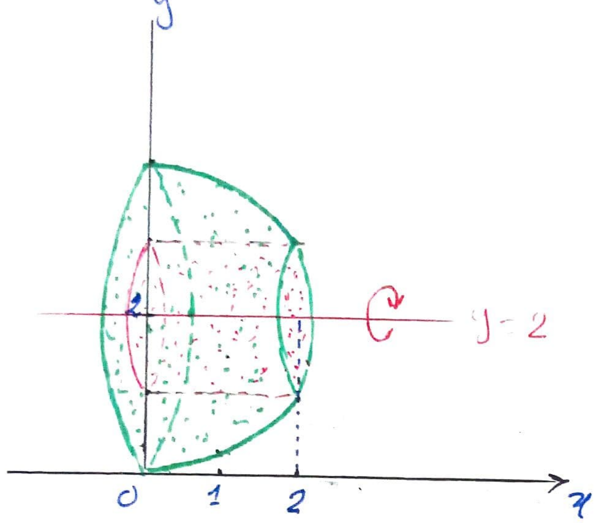
تستخدم هذه الطريقة لحساب حجم المنطقة المحدودة بالتمثيلين البيانيين .

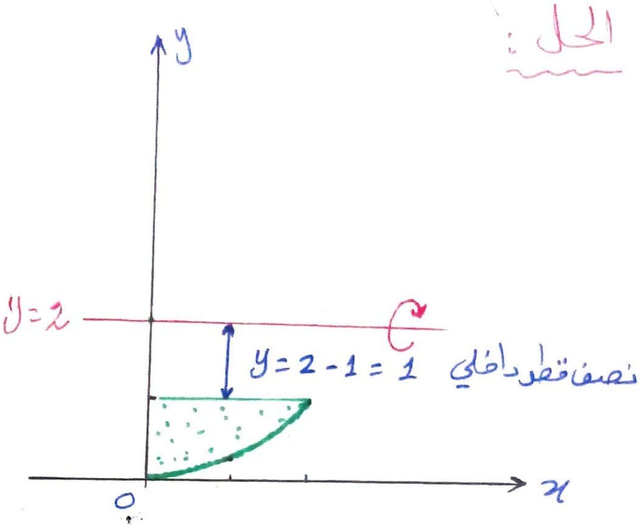
مثال :

«6»

مثال: لتكن R هي المنطقة المحدودة بالتمثيلات البيانية
$y=1$ ، $y=\frac{1}{4}x^2$ ، $x=0$.
احسب حجم الجسم الناتج من دوران R حول المستقيم $y=2$

الحل:





لاحظ أنه في الجسم الناتج من الدوران:
نصف القطر الخارجي هو من المستقيم $y=2$ حتى $y=\frac{1}{4}x^2$

$$r_0 = 2 - \frac{1}{4}x^2$$

ونصف القطر الداخلي «نصف قطر الثقب» هو $r_1 = 2-1 = 1$

$$V = V_{\text{الخارجي}} - V_{\text{الثقب}}$$

$$V = \int_0^2 \pi\left(2-\frac{1}{4}x^2\right)^2 dx - \int_0^2 \pi 1\, dx$$

$$= \pi\int_0^2 \left(4 - x^2 + \frac{1}{16}x^4\right) dx - \pi\int_0^2 dx$$

$$= \pi\left[4x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{80}x^5\right]_0^2 - \pi\left[x\right]_0^2$$

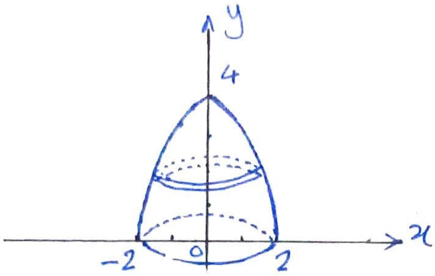
$$= \pi\left[4(2) - \frac{1}{3}(2)^3 + \frac{1}{80}(2)^5 - (0-0+0)\right] - \pi\left[2-0\right]$$

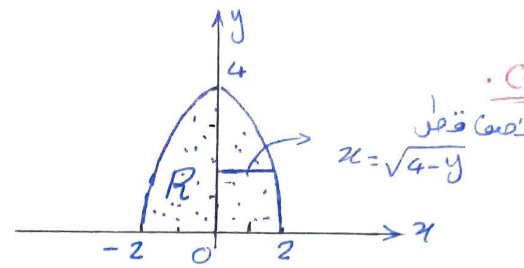
$$= \frac{56}{15}\pi$$

«7»

مثال: لتكن R المنطقة المحدودة بواسطة $y=4-x^2$ ، $y=0$
أوجد حجم المجسمات:
a- دوران R حول y
b. دوران R حول ~~المحور~~ $y=-3$.

الحل:
a.

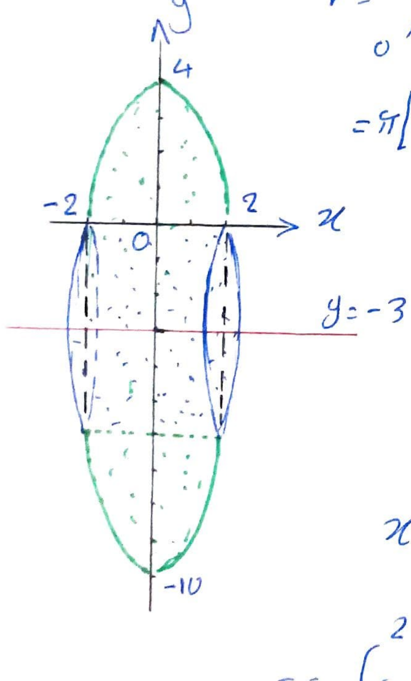




$$f(y)=x=\sqrt{4-y} \Leftarrow x^2=4-y \Leftarrow y=4-x^2$$ لدينا

$$V=\int_0^4 \pi f(y)^2\,dy=\int_0^4 \pi(\sqrt{4-y})^2 dy=\int_0^4 \pi(4-y)\,dy$$

$$=\pi\left[4y-\tfrac{1}{2}y^2\right]_0^4=\pi\left[\left(4(4)-\tfrac{1}{2}(4)^2\right)-\left(4(0)-\tfrac{1}{2}(0)^2\right)\right]=8\pi$$



b. إن المقاطع العرضية في هذه الحالة هي عبارة عن حلقات
نصف قطرها الخارجي هو من المحور $y=-3$ حتى القطع المكافئ:

$$r_0=(4-x^2)-(-3)=4-x^2+3=7-x^2$$

ونصف القطر الداخلي بين محور الدوران $y=-3$ والمحور x

$$r_1=0-(-3)=3$$

فيكون الحجم:

$$V=\int_{-2}^{2}\pi(7-x^2)^2dx-\int_{-2}^{2}\pi(3)^2dx$$

$$=\int_{-2}^{2}\pi(49-14x^2+x^4)\,dx-\int_{-2}^{2}\pi\,9\,dx$$

$$=\pi\left[49x-14\cdot\tfrac{1}{3}x^3+\tfrac{1}{5}x^5\right]_{-2}^{2}-\pi\left[9x\right]_{-2}^{2}$$

$$=\pi\left[\left(49(2)-\tfrac{14}{3}(2)^3+\tfrac{1}{5}(2)^5\right)-\left(49(-2)-\tfrac{14}{3}(-2)^3+\tfrac{1}{5}(-2)^5\right)\right]$$

$$-\pi\left[9(2)-9(-2)\right]=\frac{1472}{15}\pi$$