الرياضيات

فن وعلم

الثاني عشر متقدم

الفصل الدراسي الثالث

2021\2020

الوحدة السادسة

تطبيقات التكامل

طول القوس - مساحة السطح – حركة المقذوفات
الفيزياء والاحتمال

إعداد الاستاذ

خالد ابوكف

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\; dx$$

أولا

طول المنحنى

1) اوجد طول منحنى الدالة $f(x)$ في الحالات التالي

a) $f(x) = e^{2x}$, $x \epsilon [-1, 3]$

b) $f'(x) = \sqrt{x-1}$, $x \in [1, 4]$

c) $(f'(x))^2 = (x+2)^2 - 1$, $2 \le x \le 4$

d) $f'(x) = x\sqrt{x^2+2}$, $0 \le x \le 3$

e) $f(x) = \int_0^x e^{-u} sinu\ du$, $x \in [1, 4]$

3) التكامل الذي يعبر عن طول منحنى الدالة $f(x) = ln(secx)$ على الفترة $[0, b]$ حيث $0 < b < \frac{\pi}{4}$ هو

a) $\int_0^b sec^2x\, dx$	b) $\int_0^b tan^2x\, dx$
c) $\int_0^b secx\, tanx\, dx$	d) $\int_0^b secx\, dx$

4) التكامل الذي يعبر عن طول منحنى الدالة $f(x) = \frac{2}{3}(x-1)^{\frac{3}{2}}$ على الفترة $[1, 2]$ هو

a) $\int_1^2 \sqrt{x-1}\ dx$	b) $\int_1^2 \sqrt{x}\ dx$
c) $\int_1^2 \sqrt{1+\sqrt{x-1}}\ dx$	d) $\int_1^2 \sqrt{1+\sqrt{x}}\ dx$

5) التكامل الذي يعبر عن طول منحنى الدالة $f(x) = \int_1^x \sqrt{9t^4 - 1}\ dt$ على الفترة $[1, 2]$ هو

a) $\int_1^2\ 9x^4 - 1dx$	b) $\int_1^2 3x^2 - 1\, dx$
c) $\int_1^2\ 3x^2dx$	d) $\int_1^2\ 9x^4dx$

6) أوجد الدالة $f(x)$ التي تمر بالنقطة $(1, 1)$, وطول منحناها يعطى بالتكامل $L = \int_1^4 \sqrt{1 + \frac{1}{4x}}\ dx$

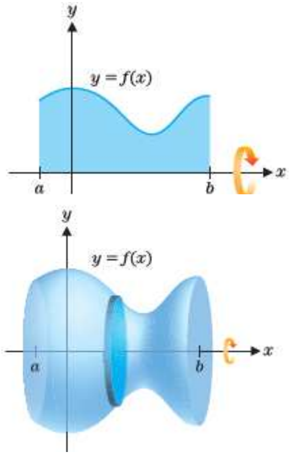
a) $f(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{2}$	b) $f(x) = 2\sqrt{x} - 1$
c) $f(x) = \sqrt{x}$	d) $f(x) = \sqrt{x} + 1$

7) أوجد الدالة $f(x)$ التي تمر بالنقطة $(1, 3)$, وطول منحناها يعطى بالتكامل $L = \int_1^4 \sqrt{1 + 16x^6}\ dx$

a) $f(x) = x^4 - 1$	b) $f(x) = x^4 + 1$
c) $f(x) = 4x^3$	d) $f(x) = x^4 + 2$

ثانيا

مساحة السطح



$$S = \int_{a}^{b} 2\pi f(x)\sqrt{1+\left(f'(x)\right)^{2}}\ dx$$

❖ اوجد مساحة السطح المتولد من تدوير المنحنى حول محور x في الحالات التالية

1) $y = x^2$, $0 \le x \le 2$

2) $y = \sin x$, $0 \le x \le \pi$

3) $y = \sqrt{x+3}$, $1 \le x \le 4$

1) أوجد مساحة السطح المتولد من تدوير المنحنى $y = x^4$ لكل $1 \leq x \leq 2$ حول المحور x

a) $2\pi\int_1^2 x^4\sqrt{1+16x^6}\,dx$ b) $2\pi\int_1^2 4x^3\sqrt{1+4x^6}\,dx$

c) $\pi\int_1^2 x^4\sqrt{1+16x^6}\,dx$ d) $2\pi\int_1^2 x^4\sqrt{1+4x^6}\,dx$

2) أوجد مساحة السطح المتولد من تدوير المنحنى $y = lnx$ لكل $1 \leq x \leq 2$ حول المحور x

a) $2\pi\int_1^2 lnx\sqrt{1+\frac{1}{lnx}}\,dx$ b) $\pi\int_1^2 lnx\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\,dx$

c) $2\pi\int_1^2 \frac{1}{x}\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\,dx$ d) $2\pi\int_1^2 lnx\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\,dx$

3) أوجد مساحة السطح المتولد من تدوير المنحنى $y = 2\sqrt{x}$ لكل $1 \leq x \leq 2$ حول المحور x

a) $2\pi\int_1^2 \sqrt{1+x}\,dx$ b) $4\pi\int_1^2 \sqrt{1+x}\,dx$

c) $2\pi\int_1^2 \frac{1}{x}\sqrt{1+x}\,dx$ d) $4\pi\int_1^2 \sqrt{1+\frac{1}{x}}\,dx$

4) أوجد مساحة السطح المتولد من تدوير المنحنى $y = e^{3x}$ لكل $1 \leq x \leq 2$ حول المحور x

a) $2\pi\int_1^2 e^{3x}\sqrt{1+9e^{6x}}\,dx$ b) $2\pi\int_1^2 e^{3x}\sqrt{1+3e^{6x}}\,dx$

c) $6\pi\int_1^2 e^{3x}\sqrt{1+9e^{6x}}\,dx$ d) $2\pi\int_1^2 e^{3x}\sqrt{1+e^{6x}}\,dx$

5) أوجد مساحة السطح المتولد من تدوير المنحنى $y = \sqrt{4-x^2}$ لكل $0 \leq x \leq 2$ حول المحور x

a) 2π b) 4π

c) 8π d) 16π

ثالثا

حركة المقذوفات

$s(t) = h(t) = \int h'(t)dt$ | $v(t) = h'(t) = \int h''(t)dt$ | $a(t) = h''(t) = -9.8$

- $h(t)$ دالة الموقع (الارتفاع) $h'(t) = v(t)$ دالة السرعة المتجهة $h''(t) = a(t)$ دالة العجلة
- $h''(t) = -g$ حيث g هي ثابت الجاذبية الأرضية $(-32ft/s^2)$ أو $(-9.8m/s^2)$

مثال :- حدد(الحالات) الشروط الابتدائية $y(0)\ ,\ y'(0)$ للجمل التالية

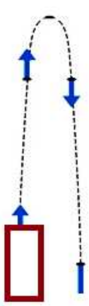
1) يسقط جسم من ارتفاع $40m$.
2) يسقط جسم من ارتفاع $25ft$.
3) اطلق جسم من ارتفاع $60ft$ مع سرعة متجهة صعودا مقدارها $20ft/s$

4) اطلق جسم من ارتفاع $13m$ مع سرعة متجهة هبوطا مقدارها $4m/s$

1) قذفت كرة رأسيا للاعلى من ارتفاع 20m بسرعة ابتدائية مقدارها 98 m/s اوجد مايلي

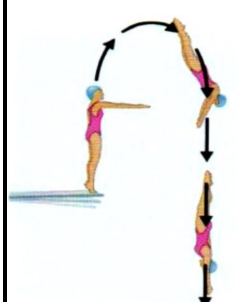
a) ارتفاع الكرة بعد 4 ثوان.

b) اقصى ارتفاع تصله الكرة .



2) يسقط جسم من ارتفاع $37m$ فوق سطح الارض , اوجد سرعته المتجهة لحظة اصطدامه بالارض.

3)اذا كان ارتفاع لوح الغطس $6m$ فوق سطح الماء وبدأ الغواص القفز بسرعة متجهة ابتدائية $3m/s$ (في اتجاه الاعلى) فاوجد السرعة المتجهة للغواص عند الاصطدام بسطح الماء.



4) إذا سقط جسم من إرتفاع $k\ ft$ فإن سرعته المتجهة لحظة إصطدامه بالارض هي

a) $-\frac{k}{4}$	b) $-8\sqrt{k}$	c) $-4\sqrt{k}$	d) $\frac{\sqrt{k}}{8}$

5) لقد أفادت التقارير أن نجم كرة السلة السابق مايكل جوردن كانت له قفزة عمودية بلغت $1.35m$ بتجاهل مقاومة الهواء , ماهي السرعة المتجهة الابتدائية المطلوبة للقفز لهذا الارتفاع.

رابعا

الفيزياء والهندسة

1) الشغل

a) لأي قوة ثابتة F مبذولة لمسافة d يكون الشغل المبذول $W = Fd$

b) إذا كانت القوة متغيرة على الفترة $[a,b]$ يكون الشغل المبذول $W = \int_a^b F(x)dx$

c) قانون هوك:- $F(x) = kx$ حيث x هي المسافة التي ينكمش (أو يتمدد) اليها النابض

$F(x)$ القوة المبذولة على النابض

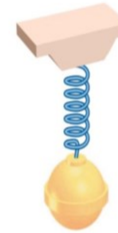
k قيمة ثابت النابض

1) يرفع حامل أثقال كتلة حديدية تزن 800 نيوتن مسافة 2 متر , احسب مقدار الشغل المبذول

2) تؤثر القوة $F(x) = 3x + 700$ نيوتن لتحريك سيارة مسافه x متر .
احسب الشغل المبذول لتحريك السيارة مسافة 100 متر

3) على فرض أن محرك سيارة يبذل قوة $800(1-x)$ رطل عندما تكون السيارة في الموقع x ميل $0 \le x \le 1$. احسب الشغل المبذول

4) تعمل قوة قدرها 10 نيوتن على تمدد نابض 0.08 متر من طوله الطبيعي
اوجد الشغل المبذول في تمدد النابض 0.16 متر اكثر من طوله الطبيعي



5)أحدثت قوة قدرها $5Ib$ تمدد على نابض$4in$. أوجد الشغل المبذول في تمدد هذا النابض $6in$أبعد من طوله الطبيعي . $(1ft = 12in)$

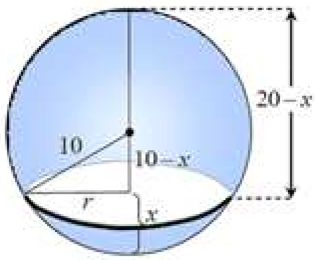
6) تم رفع دلو مسافة $80\ ft$ بمعدل $4\ ft/s$ ، يحتوي الدلو مبدئيا على $100\ Ib$ من الرمال لكن تتسرب منه الرمال بمعدل $2\ Ib/s$ احسب الشغل المبذول

7) يزن صاروخ ممتلئ بالوقود $1000Ib$ عند ألأطلاق ، بعد الأطلاق يحظى الصاروخ بارتفاع ويفقد وزنا حيث يتم حرق الوقود ، على فرض ان الصاروخ فقد $1Ib$ من الوقود لكل $15\ ft$ من الارتفاع المكتسب . احسب الشغل المبذول لارتفاع الصاروخ الى $30,000\ ft$.

❖ كثافة الماء× الجاذبية = $9800kg/m^3$ أو $62.4Ib/ft^3$

مثال1:-

خزان ماء كروي الشكل طول نصف قطره $10m$ ممتلئا بالماء
ما هو الشغل اللازم لتفريغ الماء منه من الاعلى



$$W = \int_a^b F(x)dx$$

$w = \int_0^h$ المسافة × مساحة الشريحة × الكثافة × الجاذبية dx

$$w = \int_0^{20} 9800\pi r^2(20-x)dx$$

$r^2 + (10-x)^2 = 100$
$r^2 = 100 - (10-x)^2$
$r^2 = 100 - (100 - 20x + x^2)$
$r^2 = 20x - x^2$

$$w = \int_0^{20} 9800\pi(20x - x^2)(20-x)dx$$

$$w = \int_0^{20} 9800\pi x(20-x)^2 dx$$

$$w = 4.1 \times 10^7\ J$$

مثال2:-

خزان ماء كروي الشكل طول نصف قطره $10ft$ ممتلئا بالماء
ما هو الشغل اللازم لتفريغ الماء منه من الاعلى

$$w = \int_0^{20} 62.4\pi r^2(20-x)dx$$

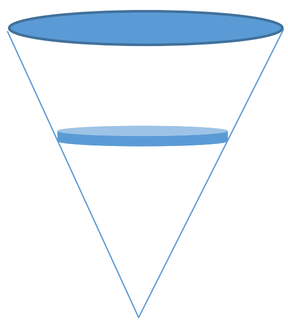
$$w = \int_0^{20} 62.4\pi(20x - x^2)(20-x)dx$$

$$w = \int_0^{20} 62.4\pi x(20-x)^2 dx$$

$$w = 2.61 \times 10^6\ Ib/ft$$

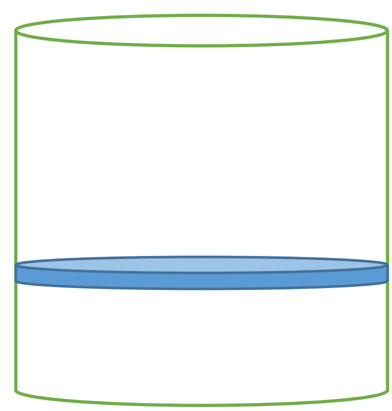
1) خزان ماء على شكل مخروط دائري قائم ارتفاعه $10ft$ وطول نصف قطر قاعدته $5ft$ حيث ان راسه لأسفل على الأرض. إذا كان الخزان ممتلئا

فأوجد الشغل المبذول عند ضخ كل الماء الى الخارج من الجزء العلوي للخزان



2) أسطوانة دائرية قائمة طول نصف قطرها $3m$ وارتفاعها $10m$ ممتلئة بالماء

احسب الشغل المبذول عند ضخ الماء الى الخارج انطلاقا من الجزء العلوي للأسطوانة



2) مركز الكتلة

1) الدفع (الزخم) J لقوة مبذولة $F(t)$ على الفترة الزمنية $[a,b]$ هو $J=\int_a^b F(t)dt$

2) العزم الأول M لجسم له كثافة متغيرة $\rho(x)$ ويمتد من $x=a$ الى $x=b$ هو $M=\int_a^b x\rho(x)dx$

3) الكتلة m لجسم له كثافة متغيرة $\rho(x)$ ويمتد من $x=a$ الى $x=b$ هو $m=\int_a^b \rho(x)dx$

4) يعطى مركز الكتلة لجسم بالقانون $\bar{x}=\frac{M}{m}=\frac{\int_a^b x\rho(x)dx}{\int_a^b \rho(x)dx}$

السؤال الأول :- احسب مركز الكتلة لجسم ما بكثافة تبلغ $\rho(x)=\frac{x}{6}+2$, $0\le x\le 6$.

السؤال الثاني :- اذا كانت كثافة سلك مستقيم $\rho(x)=2\sqrt{x}$ واذا كان طرفا السلك عند $x=4$, $x=0$ اوجد مركز الكتلة لهذا السلك

خامسا

الاحتمال

تعريف :- دالة الكثافة الاحتمالية (pdf) :-

على فرض أن X هو متغير عشوائي متصل

تكون $f(x)$ دالة كثافة احتمالية على x لكل $a \leq x \leq b$ اذا حققت .

1) $f(x) \geq 0$ **لكل** $a \leq x \leq b$ (لا يمكن أن تكون سالبة)

2) $\int_a^b f(x)dx = 1$ **الاحتمال الكلي 1**

يعطي الاحتمال الذي تقع فيه قيمة X بين c, d بالمساحة تحت التمثيل البياني ل pdf

$$P(c \leq X \leq d) = \int_c^d f(x)d$$

ملاحظة :- $pdf = probability\ density\ function$

السؤال الأول :-أثبت أن الدوال المعطاة هي دالة كثافة احتمالية (pdf) على الفترة المعينة .

a) $[0, 1]$, $f(x) = 3x^2$

b) $[0, 1]$, $f(x) = 2x^3 + x$

c) $[0, \pi]$, $f(x) = \frac{1}{2} \sin x$

<u>السؤال الثاني</u> :-أوجد قيمة k لتكون عندها $f(x)$ دالة pdf على الفترة المعينة

a) $f(x) = kx + x^2$, $[0, 1]$

b) $f(x) = \frac{k}{1+x^2}$, $[0, 1]$

c) $f(x) = ksinx$, $[0, \pi]$

d) $f(x) = \frac{k}{x^2}$, $[1, 2]$

e) $f(x) = 2ke^{kx}$, $[0, 2]$

السؤال الثالث :- على فرض أن العمر الافتراضي لمصباح يعطى بالدالة $(pdf)\ f(x) = 4e^{-4x}$
حيث x الزمن بالسنوات ,إذا تم اختيار مصباح عشوائيا

1) أوجد احتمال أن يدوم مصباح محدد لمدة 3 أشهر أو أقل .

2) أوجد احتمال أن يدوم مصباح محدد لمدة سنة أو أقل

3) اوجد احتمال ان يدوم مصباح محدد مابين سنة الى ثلاث سنوات

❖ يعطى **المتوسط** μ لمتغير عشوائي له $pdf\ \ f(x)$ على الفترة $[a,b]$ بالصيغة

$$\mu = \int_a^b x\, f(x)dx$$

❖ يعطى **الوسيط** m بالصيغة $0.5 = \int_a^m f(x)dx$ حيث $f(x)$ هي(pdf)

1) أوجد **المتوسط** و**الوسيط** لدالة الكثافة الاحتمالية $f(x) = x + 2x^3$ على الفترة$[0,1]$

2)اوجد **المتوسط والوسيط** لدالة الكثافة الاحتمالية $f(x) = \frac{1}{2} sinx$ على الفترة$[0,\pi]$