مقاييس النزعة المركزية

تميل القيم إلى التجمع نحو قيمة معينة تسمى بمتوسط هذه القيم ويطلق على خاصية تجمع القيم حول نقطة خاصية النزعة المركزية كما يطلق على المقاييس المستخدمة لقياس هذه النزعة بالمتوسطات (Averages) وسنتناول في هذا البند أنواع من مقاييس النزعة المركزية (أو المتوسطات) أهمها:

- الوسط (Mean) .
- الوسيط (Median) .
- المنوال (Mode) .

الوسط Mean

الوسط (Mean) ويطلق عليه أيضاً الوسط الحسابي (Arithmetic Mean) ويمكن الحصول عليه بقسمة مجموع القيم على عدد القيم.

$$\boxed{\text{الوسط} = \frac{\text{مجموع القيم}}{\text{عدد القيم}}}$$

ولحساب الوسط للعينة فأننا نرمز له بالرمز $\bar{x}$ ويقرأ (x bar) ويرمز لمجموع القيم بالرمز Σx حيث x قيم العينة، (Σ) حرف أغريقي، يقرأ (سجما) ويدل على (مجموع)، و (n) عدد القيم.

$$\therefore \boxed{\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}}$$

أما لحساب الوسط للمجتمع فأننا نرمز له بالرمز μ ويقرأ (mu) ويرمز لمجموع القيم بالرمز Σx حيث x قيم المجتمع. وعدد القيم بالرمز N.

$$\therefore \boxed{\mu = \frac{\sum_{i=1}^{N} x_i}{N}}$$

الدراسات الإحصائية

المجتمع الكلي: هو كل العناصر المشتملة في الدراسة.

العينة: هي جزء مأخوذ من المجتمع، بحيث يمكن أن تمثل ذلك المجتمع.

الدراسات المسحية: هي الدراسات التي تهتم بجمع البيانات ، دون القيام بإجراءات فيها . إذا شملت الدراسة المجتمع الكلي تسمى **(تعداداً عاماً)** .

العينة المتحيزة: هي العينة التي يتم تفضيلها على سائر عناصر المجتمع. أمّا **العينة غير المتحيزة:** وهي العينة التي يتم اختيارها عشوائيا أو لم تعتمد على خاصية عندما تم تحديدها.

*** ملاحظة:** العينة المتحيزة تكون إذا و إذا فقط لم كانت غير عشوائية.

مثال (١): انظر الكتاب مثال (١)، (٢) ص١٣٢، ١٣٣.

الدراسة بالملاحظة: وهي الدراسة التي يتم فيها ملاحظة الأفراد دون محاولة التأثير في النتائج. أمّا **الدراسات التجريبية:** وهي الدراسة التي يتم فيها إجراء تعديل متعمد على الأشياء قيد الدراسة و تجرى ملاحظة استجاباتهم.

ويسمى الأشخاص أو الحيوانات أو الأشياء التي تخضع للمعالجة في الدراسات التجريبية بـ**(المجموعة التجريبية)** أما النصف الثاني ممن يخضعون لعلاجات شكلية أو لا يخضعون للعلاج بـ**(المجموعة الضابطة)**؛ على ألا يعرف الفرد إلى أي مجموعة ينتمي و إلا كانت الدراسة متحيزة.

مثال(٣): انظر الكتاب مثال(٣) ص ١٣٣

اختيار الدراسة المناسبة

عندما تتطلب الدراسة جمعا للبيانات أو اخذ الآراء فقط فإن الدراسة المناسبة هي **المسحية.** وإذا كان الأمر ملاحظة تأثير شيئا ما دون أن نقوم بعلاج فالدراسة **بالملاحظة** هي المناسبة، أما لو كان الأمر اختبار علاج على الأشياء قيد الدراسة بوجود مجموعة **تجريبية** وأخرى **ضابطة**، فإننا نستخدم الدراسة **التجريبية.**

مثال(٤): انظر الكتاب مثال(٤) ص ١٣٤.

التمييز بين الارتباط و السببية

عندما توجد علاقة بين شيئين بحيث يكون وقوع ظاهرة معينة يكون سببا مباشرا في وقوع الأخرى فإن هذا يسمى (سببية) بينما لو أثرت ظاهرة معينة على الأخرى فإنها تسمى (ارتباط)، وقد يكون هذا الارتباط قويا أو ضعيفا.

مثال (٥): انظر الكتاب مثال(٥) ص١٣٤

مثال (١)

القيم التالية تمثل درجات مجموعة من الطلبة في أحد امتحانات مقررات الحاسوب الاختيارية

18 , 15 , 10 , 14 , 12 , 15 , 13 , 20 , 18 , 13 , 17 , 16 , 19 , 20 , 11

والمطلوب إيجاد :

أولاً: قيمة الوسط.

ثانياً: قيمة الوسط لدرجات الطلبة الحاصلين على أكثر من 17

الحل:

أولاً: الدرجات السابقة تمثل مجتمع من 15 طالب

∴ الوسط هو

$$\mu = \frac{\sum_{i=1}^{N} x_i}{N} \quad , N = 15$$

$$\mu = \frac{18+15+10+14+12+15+13+20+18+13+17+16+19+20+11}{15}$$

$$= \frac{231}{15}$$

$$= 15.4$$

ثانياً: درجات الطلبة الحاصلين على أكثر من 17 :

18 , 18 , 19 , 20 , 20

الدرجات السابقة تمثل عينة

∴ الوسط هو

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} \quad , n = 5$$

$$= \frac{18+18+19+20+20}{5}$$

$$= \frac{95}{5}$$

$$= 19$$

مثال (٢)

سجل مدير أحد محلات بيع الأحذية القياسات التالية للأحذية التي بيعت في أحد الأيام :

36 , 35 , 39 , 37 , 36 , 35 , 38 , 36 , 37 , 38 , 40

أوجد قيمة الوسط لقياسات الأحذية.

الحل:

القياسات السابقة تمثل عينة

∴ الوسط هو

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} \quad , n = 11$$

$$= \frac{36+35+39+37+36+35+38+36+37+38+40}{11}$$

$$= \frac{407}{11}$$

$$= 37$$

الوسيط Median

الوسيط لمجموعة من القيم هي القيمة التي تتوسط مجموعة القيم عندما ترتب هذه القيم تصاعدياً أو تنازلياً.

لإيجاد الوسيط لعدة قيم نتبع الخطوات التالية :

(١) نرتب القيم ترتيباً تصاعدياً أو تنازلياً .

(٢) نوجد ترتيب الوسيط في المجموعة. وهنا نميز بين الحالتين التاليتين :

– إذا كان عدد قيم العينة فردياً وليكن n ، في هذه الحالة يكون الوسيط قيمة واحدة وترتيبه $\frac{n+1}{2}$.

أما إذا كانت القيم تمثل مجتمع فأن ترتيب الوسيط $\frac{N+1}{2}$.

– إذا كان عدد قيم العينة زوجياً وليكن n ، في هذه الحالة توجد قيمتان للوسيط ترتيبها $\frac{n}{2}$ ، $\frac{n}{2}+1$ ونحصل على الوسيط بجمع هاتين القيمتان وقسمتهما على (2) .

أما إذا كانت القيم تمثل مجتمع فأن ترتيب قيمتي الوسيط هما $\frac{N}{2}$ ، $\frac{N}{2}+1$.

مثال (٣)

أختير خمسة أشخاص من أحد الأندية الصحية والقيم التالية تمثل الأوزان المفقودة (بالكيلو جرام) خلال شهرين.

10 , 5 , 19 , 8 , 3

أوجد قيمة الوسيط لهذه القيم.

الحل:

نرتب القيم ترتيباً تصاعدياً كالتالي :

3 , 5 , 8 , 10 , 19

∴ ترتيب الوسيط هو :

$$\frac{n+1}{2} = \frac{5+1}{2} = 3$$

∴ قيمة الوسيط هي 8 .

مثال (٤)

في إحدى الدول الأوروبية سجلت درجات الحرارة لمدن هذه الدولة كالتالي:

5 , −7 , 2 , 0 , −9 , 12 , 10 , 7 , −1 , 4

أوجد قيمة الوسيط لهذه الدرجات.

الحل:

الدرجات السابقة تمثل مجتمع

نرتب الدرجات ترتيباً تصاعدياً كالتالي:

−9 , −7 , −1 , 0 , 2 , 4 , 5 , 7 , 10 , 12

$\because N = 10$

∴ ترتيب قيمتي الوسيط هما

$$\frac{N}{2} = \frac{10}{2} = 5 , \frac{N}{2} + 1 = 5 + 1 = 6$$

قيمة الوسيط هي :

$$\frac{2+4}{2} = \frac{6}{2} = 3$$

المنوال Mode

المنوال هو القيمة الأكثر شيوعاً (الأكثر تكراراً) بين مجموعة من القيم فيمكن أن يكون لمجموعة القيم منوال، أو أكثر من منوال أو لا يوجد منوال.

مثال (٥)

القيم التالية توضح أسعار جهاز تلفاز لنفس الماركة في ثمان محلات تجارية بالدينار البحريني:

120 , 121 , 119 , 120 , 122 , 121 , 119.5 , 120

أوجد قيمة المنوال.

الحل:

المنوال هو BD 120 (لماذا ؟)

مثال (٦)

القيم التالية توضح الدخل الشهري لخمس عائلات أختيرت عشوائياً بالدينار البحريني.

130 , 220 , 540 , 370 , 630

أوجد قيمة المنوال.

الحل:

لا يوجد منوال (لماذا ؟)

القيمة المتطرفة

هي واحدة من البيانات أكبر أو أقل بكثير من بقية البيانات، وليس بالضرورة أن تكون ضمن البيانات قيم متطرفة.

مثال تحديدُ القيمِ المُتطرِّفةِ

١ مَدينةُ الألعابِ: ما القيمةُ المتطرِّفةُ في البياناتِ الآتيةِ؟

عدد تذاكر الدخول المبيعة							
اليوم	السبت	الأحد	الإثنين	الثلاثاء	الأربعاء	الخميس	الجمعة
العدد	٢٣٥	٢٥٢	١١٠	٢٣٢	٢٤٤	٣٠٦	٢٨٥

إبحثْ عنْ عددٍ أكبرَ أوْ أقلَّ بكثيرٍ منْ بقيةِ البياناتِ. عددُ التذاكرِ المَبيعةِ يومَ الإثنينِ ١١٠، وهذا العددُ أقلُّ بكثيرٍ من بقيةِ البياناتِ، التي قيمُها تتراوحُ بينَ ٢٣٢ و ٣٠٦. إذَن، العددُ ١١٠ قيمةٌ متطرِّفةٌ.

ويفضّل استخدام الوسط الحسابي فيها، ويرمز له بالرمز (σ^2) للمجتمع، وبالرمز (S^2) للعيّنة، حيث:

$$\sigma^2 = \frac{\sum_i (x_i - \mu)^2}{n} \quad \text{(للمجتمع)} \qquad ، \qquad S^2 = \frac{\sum_i (x_i - \bar{x})^2}{n-1} \quad \text{(للعيّنة)}$$

ويدعى كلاً من $(x_i - \mu)$ ، $(x_i - \bar{x})$ بانحراف القيمة عن الوسط الحسابي.

(٢) الانحراف المعياري (Standard deviation): هو الجذر التربيعي الموجب للتباين ويرمز له بالرمز (σ) للمجتمع، و(S) للعيّنة.

<u>مثال (١):</u> القيم التالية تبين المصروف الأسبوعي لوجبة الغداء لست عائلات بحرينية بالدينار البحريني: 85, 39, 100, 63, 40, 51 .

<u>**فأجد الانحراف المعياري لهذه العيّنة.**</u>

<u>الحل</u>

لإيجاد الانحراف المعياري نحتاج للوسط الحسابي والتباين.

<u>**أولاً:**</u> نوجد الوسط الحسابي للعينة:

$$\bar{x} = \frac{\sum_i x_i}{n} = \frac{378}{6} = 63$$

<u>**ثانيًا:**</u> نوجد التباين (S^2):

$$S^2 = \frac{\sum_i (x_i - \bar{x})^2}{n-1} = \frac{3102}{5} = 620.4$$

<u>**ثالثاً:**</u> نوجد الانحراف المعياري (S):

$$S = \sqrt{620.4} \approx 24.9$$

n	x_i	$(x_i - \bar{x})$	$(x_i - \bar{x})^2$
1	85	22	484
2	39	-24	576
3	100	37	1369
4	63	0	0
5	40	23	529
6	51	-12	144
المجموع	378	**المجموع**	3102

<u>*** ملاحظة:**</u>

(١) كلما كبر الانحراف المعياري كلما زاد انحراف قيم البيانات عن الوسط.

اختيار مقياس النزعة المركزية المناسب لوصف البيانات

المقياس	متى يتم استخدامه
الوسط	لا يوجد في البيانات قيم متطرفة
الوسيط	عندما يكون في البيانات قيم متطرفة، على أن لا توجد فراغات كبيرة في منتصف البيانات
المنوال	في البيانات التي تتكرر فيها قيم عديدة

مثال (١): انظر الكتاب مثال (١) ص ١٣٩.

المَعْلَمة والإحصائي

<u>**المعلمة:**</u> هي مقياس يصف خاصية في المجتمع الكلي، مثل: متوسط دخل الأفراد في المملكة. أمّا <u>**الإحصائي:**</u> فهي للعينة، مثل: متوسط دخل الأفراد في قرية الحجر.

مثال **تعيين إحصائيات العينة ومعالم المجتمع**

عيّن العينة والمجتمع في كل من المواقف الآتية، ثم صف إحصائي العينة ومَعْلَمة المجتمع:

أ) اختيرت من إحدى الجامعات عينة عشوائية مكوّنة من ٤٠ من طالبي المنح الدراسية، ثم حُسب الوسط لدرجاتهم.

العينة : مجموعة الطلاب الأربعين المتقدمين بطلبات المنح الدراسية .

المجتمع : جميع الطلاب طالبي المنح الدراسية .

إحصائي العينة : وسط درجات الطلاب الأربعين .

مَعْلَمة المجتمع : وسط درجات جميع طالبي المنح الدراسية .

ب) اختيرت عينة عشوائية طبقية من الممرضين العاملين في جميع مستشفيات المناطق الشرقية والغربية والوسطى، ثم حُسب وسيط رواتب هؤلاء الممرضين.

٢٠١١/٤/٢٨ [illegible]

العينة : الممرضون الذين تم اختيارهم عشوائيًا من جميع مستشفيات المناطق الثلاث.

المجتمع : جميع الممرضين العاملين في هذه المستشفيات في المناطق الثلاث.

إحصائي العينة : وسيط رواتب الممرضين في العينة.

مَعْلَمة المجتمع : وسيط رواتب جميع الممرضين العاملين في جميع مستشفيات المناطق الثلاث.

الاحتمال المشروط

٢٠١١/٥/٢

الاحتمال

هو نسبة تقيس فرصة وقوع حدث معيّن. وغالبًا ما نسمّي وقوع الشيء المرغوب بـــ « نجاح » ويرمز له بالرمز « S » ، وعدم حصوله « فشلاً » ويرمز له بالرمز « F ». ومجموعة النواتج تسمى « فضاء العيّنة ».

إذ كانت عدد مرات النجاح لوقوع الحدث s من المرات، وعدد مرات الفشل في وقوعه f مرة، فإنّ احتمال النجاح: $P(S)=\frac{s}{f+s}$ ، والفشل: $P(F)=\frac{f}{f+s}$

الاحتمال باستخدام التوافيق

عندما يكون ترتيب الأشياء غير مهم. انظر الكتاب مثال (٢) ص ١٥٣.

الاحتمال باستخدام التباديل

عندما يكون ترتيب الأشياء مهمًا. انظر الكتاب مثال (٣) ص ١٥٤.

الاحتمال باستخدام التوافيق والتباديل

هنا الترتيب غير مهمّ لكن توجد عدّة أمور يمكن تمييزها بتوظيف الترتيب. انظر الكتاب مثال (٤) ص ١٥٤.

الاحتمال المشروط

وهو احتمال وقوع الحدث B بشرط أن يكون الحدث A قد وقع فعلاً.

ويرمز له بالرمز: $P(B|A)$ حيث: $P(B|A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)},\ \ P(A)\neq 0$

مثال (١): تمرين (١)، (٢)، (٣) ص ١٤٨.

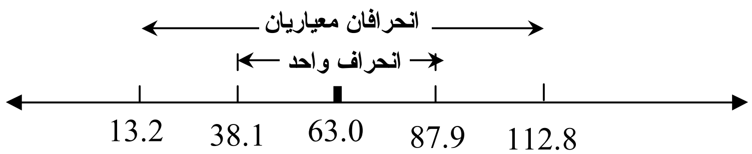
(١) $P(G|B)$ حيث G حدث سحب الكرة الثانية خضراء، B الأولى زرقاء

$P(B)=\frac{8}{19}$ = احتمال سحب الكرة الأولى زرقاء

$P(G\cap B)=\frac{8}{19}\times\frac{5}{18}$ = احتمال سحب الكرة الأولى زرقاء والثانية خضراء

$$\therefore P(G|B)=\frac{P(G\cap B)}{P(B)}=\frac{\cancel{\frac{8}{19}}\times\frac{5}{18}}{\cancel{\frac{8}{19}}}=\frac{5}{18}$$

(٢) مجموعة البيانات تقع جميعها تقريبًا في نطاق انحرافين معياريين؛ ففي المثال السابق:



(٣) يمكن تطبيق القانون: $\sigma=\sqrt{\frac{\sum_i (x_i-\mu)^2}{n}}$ مباشرة دون إيجاد التباين.

هامش خطأ المعاينة

عند سحب عيّنة حجمها n من مجتمع كلي، فإنّه يمكن تقريب هامش الخطأ في المعاينة بالقيمة $\pm\frac{1}{\sqrt{n}}$

مثال (٢): في دراسة مسحية شملت 3247 شخصًا، قال 41% منهم أنّهما مرتاحون للنهضة العلمية.

(١) ما هامش خطأ المعاينة؟

إذن: $n=3247$

$$\textbf{هامش خطأ المعاينة}=\pm\frac{1}{\sqrt{n}}=\pm\frac{1}{\sqrt{3247}}=0.017549261915\approx\pm 0.0175$$

هامش خطأ المعاينة $\approx \pm 1.75\%$

(٢) ما الفترة الممكنة التي تحتوي على نسبة أفراد المجتمع المرتاحين للنهضة العلمية؟

$41\%+1.75\%=42.75\%$ $\qquad$ $41\%-1.75\%=39.25\%$

أي أن الفترة الممكنة التي تحتوي على نسبة أفراد المجتمع المرتاحين للنهضة العلمية بين 39.25% و 42.75%

الجداول التوافقية (الجداول ذات التكرارات المشتركة)

هي عبارة عن جداول يتم تسجيل بياناتها بحيث تُمثّل كل خلية تكرارًا نسبيًا منسوبًا إلى مجموع التكرارات الكلية (أو تكرارات الصف) (أو تكرارات العمود).

مثال (٣): تمرين (٥) ص ١٤٨.

	أخذ حصصًا (T)	لم يأخذ حصصًا (NT)
ناجح (P)	64	48
راسب (NP)	18	32

مجموع البيانات يساوي: 162

(a) ما احتمال ينجح راشد، علمًا بأنّه أخذ حصصًا؟

$$P(P\mid T)=\frac{\frac{64}{162}}{\frac{64+18}{162}}=\frac{64}{82}=\frac{32}{41}$$

*ملاحظة:

في المثال السابق وجدنا أنّ مقام البسط ومقام المقام سوف يحذف دائمًا، وللتسهيل فإنّنا نقوم بتجاهل المقام في الجداول التوافقية، كما في الأمثلة المتبقية الآتية.

(b) ما احتمال يرسب خالد، علمًا بأنّه لم يأخذ حصصًا؟

$$P(NP\mid NT)=\frac{32}{32+48}=\frac{32}{80}=\frac{2}{5}$$

(c) ما احتمال ألاّ يأخذ عبد اللطيف حصصًا، علمًا بأنّه ناجح؟

$$P(NT\mid P)=\frac{48}{48+64}=\frac{48}{112}=\frac{3}{7}$$

مثال (٤): تمرين (١٢) ص ١٤٨.

المثل اجتماعي = S ، عادل = A

$$P(S\mid A')=\frac{145+4}{119+145+302+244+4+182}=\frac{149}{996}=14.959839\%\approx 15.0\%$$

الخيار (J) هو الخيار الصحيح.

(٢) $P(R\mid G)$ حيث R حدث سحب الكرة الثانية حمراء، G الأولى خضراء

احتمال سحب الكرة الأولى زرقاء $=P(G)=\frac{5}{19}$

احتمال سحب الكرة الأولى خضراء والثانية حمراء $=P(R\cap G)=\frac{5}{19}\times\frac{6}{19}$

$$\therefore P(R\mid G)=\frac{P(R\cap G)}{P(G)}=\frac{\cancel{\frac{5}{19}}\times\frac{6}{19}}{\cancel{\frac{5}{19}}}=\frac{6}{19}$$

(٣) $P(R\mid A)$ حيث R حدث سحب الكرة الثالثة حمراء، A حدث سحب الأولى حمراء والثانية زرقاء

احتمال سحب الكرة الأولى حمراء والثانية زرقاء $=P(A)=\frac{6}{19}\times\frac{8}{18}$

احتمال سحب الكرة الأولى والثالثة حمراء والثانية زرقاء $=P(R\cap A)=\frac{6}{19}\times\frac{8}{18}\times\frac{5}{17}$

$$\therefore P(R\mid A)=\frac{P(R\cap A)}{P(A)}=\frac{\cancel{\frac{6}{19}\times\frac{8}{18}}\times\frac{5}{17}}{\cancel{\frac{6}{19}\times\frac{8}{18}}}=\frac{5}{17}$$

مثال (٢): تمرين (٧) ص ١٤٨:

B هو حدث ظهور العدد 6 على أحد الأوجه، A هو حدث ظهور الأعداد زوجية

احتمال ظهور عدد زوجي للمكعب الواحد $=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$

احتمال ظهور عدد زوجي للمكعبات الثلاثة $=P(A)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{8}$

احتمال ظهور العدد 6 على وجه واحد والأوجه الظاهرة زوجية $=\frac{2}{6}\times\frac{2}{6}\times\frac{1}{6}=\frac{1}{54}$

$$\therefore P(A\cap B)=\frac{1}{54}+\frac{1}{54}+\frac{1}{54}=\frac{3}{54}=\frac{1}{18}$$

$$\therefore P(B\mid A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{\frac{1}{18}}{\frac{1}{8}}=\frac{8}{18}=\frac{4}{9}$$

*** ملاحظة:** تذكر أنّ **الأحداث المستقلة** يكون فيها $P(A\cap B)=P(A).P(B)$ وهو ما فعلناه لحساب احتمال ظهور الأعداد الزوجية في المكعبات الثلاثة.

الاحتمال والتوزيعات الاحتمالية

٢٠١١/٥/٣

المتغير العشوائي (X)

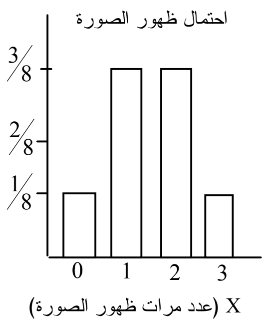
هو المتغيّر الذي يأخذ مجموعة قيم لها احتمالات معلومة. ترتبط تسميته بالبيانات التي يرتبط بها، فإذا ارتبط بمجموعة قابلة للعدّ (محدودة) سمّي **بالمتغير العشوائي المنفصل**، ولو ارتبط ببيانات فترة حقيقية فيكون **متغيرًا عشوائيًّا متصلاً**.

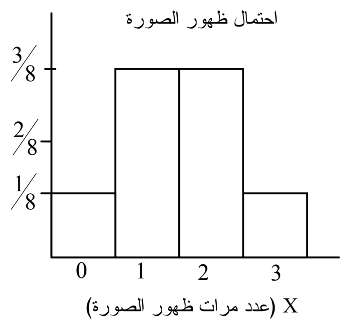
التوزيع الاحتمالي

هو احتمال جميع القيم الممكنة للمتغير العشوائي. ففي تجربة رمي ثلاث قطع نقود متمايزة، واهتممنا بعدد مرات ظهور الصورة، فإنّه يكون كالتالي:

TTT	TTH	THT	HTT	THH	HTH	HHT	HHH	فضاء النواتج
0	1	1	1	2	2	2	1	عدد الصور

هنا مركز الاهتمام هو ظهور الصورة، فلو اعتبرناه هو المتغير العشوائي X فإنّا يمكن وضعه بصورة جدول أو مدرج احتمالي ليمثل التوزيع الاحتمالي.





الاحتمال	X عدد مرات ظهور الصورة
$\frac{1}{8}$	0
$\frac{3}{8}$	1
$\frac{3}{8}$	2
$\frac{1}{8}$	3

التمثيل بالأعمدة **المدرج التكراري** **الجدول**

المثال السابق مثال واضح للتوزيعات الاحتمالية المنفصلة، إذ به عدد محدود من النواتج الممكنة، واحتمالاته هي احتمالات نظرية مبنية على افتراضات يتوقّع الحصول عليها، وسنلاحظ أنّ التوزيع السابق تنطبق علي خاصيتين مهمّتين:

(١) احتمال كل قيمة من قيم المتغير العشوائي X صفر على الأقل، و1 على الأكثر.

(٢) مجموع احتمالات قيم المتغير العشوائي X جميعها تساوي 1.

مثال (١): تمرين (١٧) ص ١٥٩.

(a) بيّن أنّ التوزيع صحيح.

كل الاحتمالات الواردة في الجدول لا تتجاوز 1 ولا تقل عن 0، ومجموعها:

مجموع الاحتمالات= $0.29+0.43+0.17+0.11+0=1$

إذن التوزيع صحيح

(b) احتمال ألا يزيد تقديره على B يعني إمّا أن يساوي B أو C أو D أو F

$P($B حدث أن لا يزيد تقديره عن$) = P(B)+P(C)+P(D)+P(E)$

$= 0.43+0.17+0.11+0=0.71$

ويمكن حله بشكل أسهل: وهو أنّه لا يحصل على A فقط؛ أي أنّ:

$P($B حدث أن لا يزيد تقديره عن$) = 1-P(A) = 1-0.29 = 0.71$

مثال (٢): تمرين (١) ص ١٥٧.

(b) $P(X=2)=0.34$

(a) $P(X\geq 3) = P(X=3)+P(X\geq 4) = 0.24+0.23 = 0.45$

القيمة المتوقعة E(X)

هي الوسط الموزون للقيم في التوزيع الاحتمالي أي أنّ: $E(X)=\sum_{i=1}^{n} x_i P(X=x_i)$

مثال (٣): تمرين (٧) ص ١٥٨.

$$E(X)=\frac{1}{500}(100)+\frac{2}{500}(10)+\frac{5}{500}(5)=\frac{100+20+25}{500}=BD0.29$$

العدد المتوقع E(A)

هو عبارة عن حاصل ضرب احتمال نجاح الحدث في عدد مرات التجربة.

مثال (٤): تمرين (١٣) ص ١٥٨.

ليكن A هو حدث الحصول على الترتيب الصحيح

$P(S)=\frac{1}{10}\times\frac{1}{9}\times\frac{1}{8}=\frac{1}{720}$ (لاحظ أنّ الترتيب محدّد مسبقًا)

$$\therefore P(A)=P(S).n=\frac{1}{720}\times 5=\frac{1}{144}$$

التوزيـع الطبيعي

٢٠١١/٥/٤

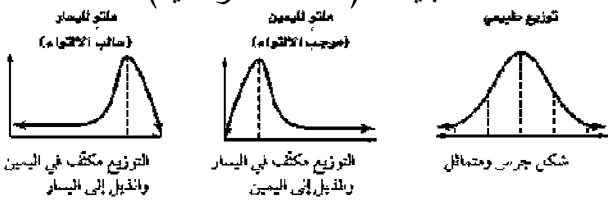
التوزيع الطبيعي: هو أحد أمثلة التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي المتصل، وهو يمثّل كمنحنى يشبه الجرس (أو سنام الجمل) ويتضف بالخواص التالية:

(١) لديه قيمة عظمى عند الوسط يستاويى فيها الوسط والوسيط والمنوال.

(٢) منحنى التوزيع الطبيعي ممتد من $-\infty$ وحتى $+\infty$ دون يمس المحور X

(٣) المساحات تحت المنحنى تمثل الاحتمالات، والمساحة تحت المنحنى تساوي 1

(٤) يستعمل μ و σ لتحديد الاحتمالات كمتباينات (احتمالات تراكمية)

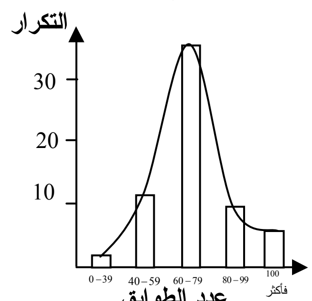


وقد تظهر التوزيعات بأشكال أخـــرى ملتوية، كما يتضح بالأشكال المجاورة.

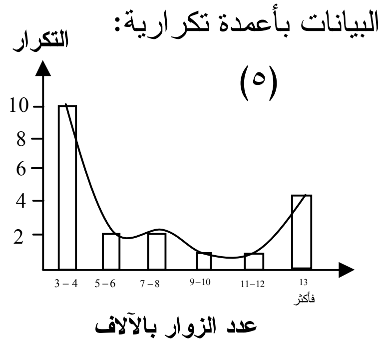
وتصنف بيانات التوزيع السابقة حتى مع التوزيعات المنفصلة.

مثال (١): تمرين (٥) ، (٤) ص ١٦٥.

باستخدام الجدول التكراري سنمثل البيانات بأعمدة تكرارية:



توزيع طبيعي



توزيع ملتوٍ التواء موجب

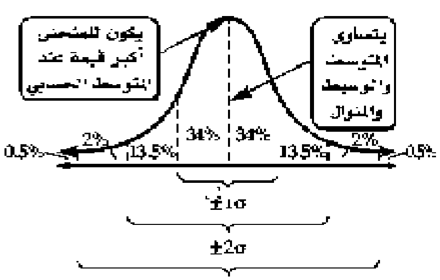
القانون التجريبي:

يتصف التوزيع الطبيعي الذي متوسطه μ وانحرافه المعياري σ بالخصائص التالية:

(١) 68% تقع ضمن انحراف معياري واحد

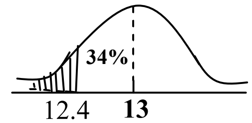
(٢) 95% تقع ضمن انحرافين معياريين

(٣) 99% تقع ضمن ثلاثة انحرافات معيارية



مثال (٢): تمرين (٧) ص ١٦٥: $\mu = 13$ ، $\sigma = 0.4$ ، $P(x<12.6)$

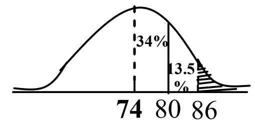
نقوم بتجهيز المحنى:



$$P(x<12.6) = 0.5-0.34 = 0.16 = 16\%$$

مثال (٣): تمرين (٦) ص ١٦٥: $\mu = 74$ ، $\sigma = 6$ ، $P(x>86)$

$$P(x>86) = 0.5-0.34-0.135 = 0.025 = 2.5\%$$

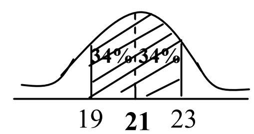


أو يمكن حلها كما يأتي:

$$P(x>86) = 0.02+0.05 = 0.025 = 2.5\%$$

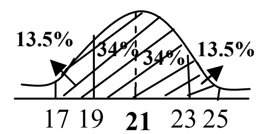
مثال (٤): تمرين (٣) ص ١٦٥: $\mu = 21$ ، $\sigma = 2$

(a) $P(19<x<23)$



$$P(19<x<23) = 0.34+0.34 = 0.68 = 68\%$$

(b) $P(17<x<25)$



$$P(19<x<23) = 0.68+0.135+0.135$$
$$= 0.95 = 95\%$$

مثال (٥): أوجد عدد الطلاب التي حسبت احتمالهم في الفرع b من المثال (٤) إذا كان عدد الطلاب الكلي 36 طالبًا.

$$\text{عدد الطلاب} = 36\times\frac{95}{100}\approx 34$$

*** ملاحظة:**

(١) في المثال (٤) يمكن كتابة الناتج مباشرة لأنّ جزء من التعريف.

(٢) يمكن في بعض المسائل تُعطى مجموعة القيم وعليك إيجاد الوسط والانحراف المعياري، جرّب تمرين (١٣) ص ١٦٦.

(٣) الأفضل كتابة الاحتمال بعدد عشري وبنسبة مئوية معًا.

التوزيعات ذات الحدين

٢٠١١/٥/٥

تجربة ذات الحدين:

* لكل تجربة ناتجان؛ نجاح (احتماله s) أو فشل (احتماله f) حيث $s+f=1$
* يوجد عدد محدد من المحاولات n
* احتمال النجاح ثابت في كل محاولة
* المحاولات مستقلة
* المتغير العشوائي هو عدد مرات النجاح في n من المحاولات.

الاحتمال التجريبي عبر المحاكاة

مثال (١): انظر مثال (١) ص ١٧٠.

توظيف مخطط الشجرة البيانية لحساب الاحتمال

مثال (٢): انظر مثال (٢) ص ١٧١.

توزيع ذات الحدين

إذا كان احتمال النجاح x مرة في n من المحاولات المستقلة فإنّ:

$\boxed{P(x)={}_nC_x\ s^x f^{n-x}}$ ، **القيمة المتوقعة:** $\boxed{E(x)=ns}$

مثال (٣): تمرين (٣) ص ١٤٧: $s=0.11$ ، $n=25$ ، $P(x\ge 5)=?$

الحل

$$s=0.11\Rightarrow\ f=1-0.11=0.89$$

$$\begin{aligned}P(x\ge 5)&=1-P(x<5)\\&=1-\left(P(0)+P(1)+P(2)+P(3)+P(4)\right)\\&=1-P(0)-P(1)-P(2)-P(3)-P(4)\\&=1-{}_{25}C_0\ (0.11)^0(0.89)^{25}-{}_{25}C_1\ (0.11)^1(0.89)^{24}-{}_{25}C_2\ (0.11)^2(0.89)^{23}\\&\quad-{}_{25}C_3\ (0.11)^3(0.89)^{22}-{}_{25}C_4\ (0.11)^4(0.89)^{21}\approx 0.133=13.3\%\end{aligned}$$

وسوف نخفف على أنفسنا فيما بعد بدلاً من استخدام هذه الحسابات المعقدة!

مثال(٤): تمرين (٢) ص ١٧٤: $s=0.5$

(a) $n=4$ ، $P(x\ge 3)=?$

يمكن استخدام مفكوك: $(s+f)^4$ باستخدام مثلث باسكال:

$$\begin{aligned}(s+f)^4&=1s^0f^4+4s^1f^3+6s^2f^2+4s^3f^1+1s^4f^0\\&=1(0.5)^0(0.5)^4+4(0.5)^1(0.5)^3+6(0.5)^2(0.5)^2+4(0.5)^3(0.5)^1+1(0.5)^4(0.5)^0\\&=0.065+0.25+0.375+0.25+0.065\end{aligned}$$

٠ ذكر   ذكر   ذكرين   **٣ ذكور**   **٤ ذكور**

من المفكوك السابق نستنتج أن:

$$P(x\ge 3)=P(x=3)+P(x=4)=0.25+0.065=0.3125=31.25\%$$

(b) $n=6$ ، $E(X)=?$ ، $s=0.5$

$$E(X)=ns=6(0.5)=3$$

التمثيل البياني لتوزيع ذي الحدين

مثال (٥) انظر مثال (٥) ص ١٧٣.

تقريب توزيع ذي الحديث من خلال التوزيع الطبيعي

إذا كان: $ns,nf\ge 5$ فإنّ التوزيع ذي الحدين يقترب من التوزيع الطبيعي حيث:

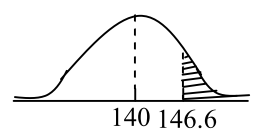
وسطه الحسابي: $\boxed{\bar{x}=ns}$ ، وانحرافه المعياري $\boxed{\sigma=\sqrt{nsf}}$

مثال (٦): تمرين (١٩) ص ١٧٦: $s=0.7$ ، $n=200$ ، $P(x\ge 146)$

الحل

$s=0.7\Rightarrow\ f=0.3$ ومنه يكون: $ns=200(0.7)=140\ge 5$ ، $nf=60\ge 5$

إذن يقترب التوزيع ذي الحدين إلى التوزيع الطبيعي حيث:



$\bar{x}=ns=140$ ، $\sigma=\sqrt{nsf}=\sqrt{140(0.3)}\approx 6.5$

$$\therefore\ P(x\ge 146)=0.5-0.34=0.16=16\%$$

*** ملاحظات:**

(١) لن يتغير الحل في مثال (٥) إذا كان قيل « أكثر من » بدلاً من « على الأقل » لأنّ التوزيع الطبيعي تمثله متباينات، أمّا احتمال عند نقطة محددة يساوي صفر.

(٢) في كثير من المسائل كمثال (٦) سنقرّب للوصول إلى نقاطنا المعروفة.

(٣) كل ما نقوم به هو حساب احتمالات، ولا نضمن ما نتوقعه فيها سوى تخميناً.