تم تحميل هذا الملف من موقع المناهج البحرينية

مذكرة الأنشطة الصفية مقرر ريض 253

موقع المناهج ⇦ المناهج البحرينية ⇦ الصف الثاني الثانوي ⇦ رياضيات ⇦ الفصل الأول ⇦ مذكرات وبنوك ⇦ الملف

تاريخ إضافة الملف على موقع المناهج: 2024-12-06 17:50:53

المزيد من مادة رياضيات:	ملفات ا كتب للمعلم ا كتب للطالب ا اختبارات الكترونية ا اختبارات ا حلول ا عروض بوربوينت ا أوراق عمل منهج انجليزي ا ملخصات وتقارير ا مذكرات وبنوك ا الامتحان النهائي ا للمدرس

التواصل الاجتماعي بحسب الصف الثاني الثانوي

صفحة المناهج البحرينية على فيسبوك					
المواد على تلغرام	التربية الاسلامية	اللغة العربية	اللغة الانجليزية	الرياضيات	

المزيد من الملفات بحسب الصف الثاني الثانوي والمادة رياضيات في الفصل الأول

1	مذكرة و ملف أعمال الطالب 253
2	مذكرة ريض 253
3	ملف أعمال الطالب مذكرة ريض 261
4	ملخص قوانين ريض 261
5	حل مذكرة مقرر رض 261

BD 1.000

مملكة البحرين

وزارة التربية و التعليم

مدرسة غازي القصيبي الثانوية للبنات

قسم الرياضيات

مذكرة الأنشطة الصفية لمقرر

رياضيات 253

الاسم : .....

الصف : .....

الرقم الاكاديمي : .....

معلمة المقرر :أ.جنان محمد

مديرة المدرسة :أ.سارة راشد الرويعي

نشاط (1) : العمليات على الدوال

الأهداف :
1- إيجاد مجموع الدوال و الفرق بينها و حاصل ضربها و قسمتها ، 2- إيجاد تركيب دالتين
3- إيجاد قيمة تركيب دالتين عند نقطة معينة ، 4- حل تمارين لفظية و حياتية على تركيب دالتين

أولا : العمليات على الدوال :

تمارين 1 : بمعلومية الدوال أدناه أوجد المطلوب في ما يلي :

أولا : $f(x) = x^2 - 16$, $g(x) = 2x + 8$, $h(x) = -3x$

1) $(f+g)(x) = f(x) + g(x) = x^2 - 16 + 2x + 8$
$= x^2 + 2x - 8$

2) $(g-h)(x) = g(x) - h(x) = 2x + 8 + 3x = 5x + 8$

3) $(f.h)(x) = f(x) \cdot h(x) = (x^2 - 16)(-3x)$
$= -3x^3 + 48x$

4) $(\frac{h}{g})(x) = \frac{h(x)}{g(x)} = \frac{-3x}{2x+8}$, $x \neq -4$

$2x + 8 \neq 0$
$2x \neq -8$
$x \neq -4$ ← المقام $\neq 0$

5) $(g+h)(x) = g(x) + h(x) = 2x + 8 + -3x = -x + 8$

6) $(f-g)(x) = f(x) - g(x) = x^2 - 16 - 2x - 8 = x^2 - 2x - 24$

7) $(f.g)(x) = f(x) \cdot g(x) = (x^2 - 16)(2x + 8)$
$= 2x^3 + 8x^2 - 32x - 128$

8) $(f.g)(2) = f(2) \cdot g(2)$
$= (2^2 - 16)(2(2) + 8)$
$= -144$

9) $(\frac{g}{h})(x) =$

$\frac{g(x)}{h(x)} = \frac{2x+8}{-3x}$, $x \neq 0$

$-3x \neq 0$
$x \neq 0$ ← المقام $\neq 0$

تم إيجاد القيمة في تمرين 2

10) $(\frac{g-h}{f})(x) = \frac{(g-h)(x)}{f(x)}$

$= \frac{5x+8}{x^2-16}$, $x \neq 4, x \neq -4$.

$x^2 - 16 \neq 0$
$\sqrt{x^2} \neq \sqrt{16}$
$x \neq \pm 4$ ← المقام $\neq 0$

ثانيا : $k(x)=3x-5\ ,\ m(x)=x^2+5x+6$

1) $(m-k)(1)=$

$(m-k)(x)=x^2+5x+6-3x+5$

تعويض $=x^2+2x+11$

$\Rightarrow (m-k)(1)=(1)^2+2(1)+11$

$=14$

2) $(\frac{k}{m})(x)=\frac{k(x)}{m(x)}$

$=\frac{3x-5}{x^2+5x+6}\ ,\ \begin{matrix}x\neq -2\\ x\neq -3\end{matrix}$

$\Rightarrow$ المقام $\neq 0$

$x^2+5x+6\neq 0$ mode 5→3

$a=1$

$b=5$

$c=6$

$x_1\neq -2$

$x_2\neq -3$

ثانيا : تركيب دالتين : أنظر مفهوم أساسي صـ 12

دالتين f,g فإن دالة التركيب $f\circ g$ هي : $(f\circ g)(x)=f(g(x))$

تمارين 2 :

أولا : إذا كانت $f=\{(\overset{x}{-1},\overset{y}{-5}),(\overset{x}{3},\overset{y}{-2}),(\overset{x}{4},\overset{y}{7}),(\overset{x}{10},\overset{y}{8})\}$, $g=\{(4,3),(2,-1),(9,4),(3,10)\}$

أوجد إن أمكن :

1) $f(4)=7$ 2) $g(2)=-1$ 3) $g(10)=$ غير معرف 4) $f(0)=$ غير معرف

5) $[f\circ g](9)=f(g(9))=f(4)=7$ 6) $[f\circ g](4)=f(g(4))=f(3)=-2$.

7) $[g\circ f](10)=g(f(10))=g(8)=$ غير معرف 8) $f[g(2)]=f(-1)=-5$.

9) $[f\circ g](x)=f(g(x))$

10) $[g\circ f](x)$

ثانيا: إذا كانت $f=\{(-4,-14),(0,-6),(-6,-18),(2,-2)\}$

$g=\{(-6,1),(-18,-13),(-14,9),(-2,-3)\}$

أوجد إن أمكن :

1) $[g\circ f](-6)=g(f(-6))=g(-18)=-13$ 2) $f[g(-2)]=f(-3)=$ غير معرف

7) $[g\circ f](x)=g(f(x))$

تذكر أن : $(x \pm y)^2 = x^2 \pm 2xy + y^2$

تمارين 3 :

أولا : إذا كانت $f(x) = 3x - 2 , g(x) = x^2 + 2x - 1 , h(x) = 5 - 6x$

أوجد كلا مما يلي :

1) $[f \circ g](x) = f(g(x)) = f(x^2 + 2x - 1)$
$= 3(x^2 + 2x - 1) - 2 = 3x^2 + 6x - 3 - 2 = \boxed{3x^2 + 6x - 5}$

2) $[g \circ h](1) = g(h(1)) = g(5 - 6(1)) = g(-1) = (-1)^2 + 2(-1) - 1$
$= 1 - 2 - 1 = \boxed{-2}$

3) $[g \circ f](x) = g(f(x)) = g(3x - 2) = (3x - 2)^2 + 2(3x - 2) - 1$
$= 9x^2 - 12x + 4 + 6x - 4 - 1 = \boxed{9x^2 - 6x - 1}$

4) $[h \circ f](x) = h(f(x)) = h(3x - 2) = 5 - 6(3x - 2)$
$= 5 - 18x + 12 = \boxed{17 - 18x}$

5) $[h \circ (f \circ g)](-1) = h(f(g(-1))) = h(f((-1)^2 + 2(-1) - 1))$
$= h(f(-2)) = h(3(-2) - 2) = h(-8)$
$= 5 - 6(-8) = \boxed{53}$.

ثانيا : إذا كانت $f(x) = 5x + 3 , g(x) = x^2 - 4 , h(x) = 3 - 2x + 5x^2$

أوجد كلا مما يلي :

1) $[f \circ g](x) = f(g(x)) = f(x^2 - 4) = 5(x^2 - 4) + 3$
$= 5x^2 - 20 + 3 = \boxed{5x^2 - 17}$

2) $[g \circ f](x) = g(f(x)) = g(5x + 3) = (5x + 3)^2 - 4$
$= 25x^2 + 30x + 9 - 4$
$= \boxed{25x^2 + 30x + 5}$

3) $[h \circ f](x) = h(f(x)) = h(5x + 3) = 3 - 2(5x + 3) + 5(5x + 3)^2$
$= 3 - 10x - 6 + 5(25x^2 + 30x + 9)$
$= 3 - 10x - 6 + 125x^2 + 150x + 45$
$= 125x^2 + 140x + 42$.

4) $[g \circ h](2) = g(h(2)) = g(3 - 2(2) + 5(2)^2) = g(19)$
$= (19)^2 - 4 = 357$.

تذكر أن : $(x \pm y)^2 = x^2 \pm 2xy + y^2$

تمارين 3 :

أولا : إذا كانت $f(x) = 3x - 2 , g(x) = x^2 + 2x - 1 , h(x) = 5 - 6x$

أوجد كلا مما يلي :

1) $[f \circ g](x) = f(g(x)) = f(x^2 + 2x - 1) = (3x - 2)^2 + 2(3x - 2) - 1$
$= 9x^2 - 12x + 4 + 6x - 4 - 1 = 9x^2 - 6x - 1.$

2) $[g \circ h](1) = g(h(1)) = g(5 - 6) = g(-1) = (-1)^2 + 2(1) = 3.$

3) $[g \circ f](x) = g(f(x)) = g(3x - 2) = 3(x^2 + 2x - 1) - 2$
$= 3x^2 + 6x - 3 - 2 = 3x^2 + 6x + 5.$

4) $[h \circ f](x) = h(f(x)) = h(3x - 2) = 3(5 - 6x) - 2$
$= 15 - 18x - 2 = 13 - 18x.$

5) $[h \circ (f \circ g)](-1) = f(g(-1)) = f(1 - 2 - 1) = f(-2)$
$= 3(-2) - 2$
$= -6 - 2 = -8.$

ثانيا : إذا كانت $f(x) = 5x + 3 , g(x) = x^2 - 4 , h(x) = 3 - 2x + 5x^2$

أوجد كلا مما يلي :

1) $[f \circ g](x) = f(g(x)) = f(x^2 - 4) = (5x + 3)^2 - 4$
$= 25x^2 + 30x + 9 - 4$
$= 25x^2 + 30x + 5.$

2) $[g \circ f](x) = g(f(x)) = g(5x + 3) = 5(x^2 - 4) + 3$
$= 5x^2 - 20 + 3$
$= 5x^2 - 17.$

3) $[h \circ f](x) = h(f(x)) = h(5x + 3) = 5(3 - 2x + 5x^2) + 3$
$= 15 - 10x + 25x^2 + 3$
$= 18 - 10x + 25x^2.$

4) $[g \circ h](2) = g(h(2)) = g(3 - 2(2) + 5(2)^2)$
$= g(19) = (19)^2 - 4$
$= 357.$

تمارين 4 :

أولا (تأكد 4 صـ 13) :

يقدم محل أجهزة كهربائية عرضين معا على جهاز كهربائي هما : خصم BD3.5 و تخفيض نسبته 15% من السعر ، فإذا كان سعر الجهاز الأصلي BD30 .

إفترض أن x تمثل السعر الأصلي للسيارة

1) أوجد سعر السيارة بعد التخفيض

$f(x) = x - 0.15x$

$f(x) = 0.85x$

2) أوجد سعر السيارة بعد الخصم

$g(x) = x - 3.5$

3) أوجد السعر النهائي للجهاز إذا طبق التخفيض :

A) قبل الخصم

$(g \circ f)(x)$

$= g(f(x))$

$= g(0.85x)$

$= 0.85x - 3.5$

$x = 30$ بالتعويض

$= 0.85(30) - 3.5 = 22.$

B) بعد الخصم

$(f \circ g)(x)$

$= f(g(x))$

$= f(x - 3.5)$

$= 0.85(x - 3.5)$

$x = 30$ بالتعويض

$= 0.85(30 - 3.5)$

$= 22.525.$

ثانيا (من إختبار سابق) :

يقدم معرض للسيارات عرضا بتخفيض 20% من قيمة كل سيارة جديدة مضافا إليه خصم قدره BD130

إفترض أن x تمثل السعر الأصلي للسيارة

1) أوجد سعر السيارة بعد التخفيض

$f(x) = x - 0.2x$

$f(x) = 0.8x$

2) أوجد سعر السيارة بعد الخصم

$g(x) = x - 130$

3) إذا أراد محمد شراء سيارة جديدة سعرها الأصلي BD8370 فأوجد السعر النهائي لسيارة محمد إذا تم تطبيق التخفيض قبل الخصم .

$(g \circ f)(8370)$

$g(f(x))$

$= g(0.8x)$

$= 0.8x - 130$

$= 0.8(8370) - 130$

$= 6566.$

ثالثا : أجب عن تمرين (7) صـ 14

نشاط (2) : العلاقات و الدوال العكسية

الأهداف :
1- التعريف بالدالة العكسية ، 2- إيجاد معكوس دالة فيها أزواج مرتبة
3- إيجاد معكوس دوال مختلفة خطية و تربيعية و جذرية ، 4- حل تمارين لفظية و حياتية على الدالة العكسية .

أولا : معكوس الدالة و تمارين على كيفية إيجاده :

للدالة f فإن f^{-1} (يقرأ f inverse) هو معكوس الدالة

تمارين 1 : أوجد معكوس الدوال التالية :

1) $f = \{(-1,4), (2,0), (3,1)\}$ $f^{-1} = \{(4,-1), (0,2), (1,3)\}$

2) $g(x) = 4x - 7$, $g^{-1}(5) = ?$

$y = 4x - 7$

$x = 4y - 7$

$\frac{x+7}{4} = y$

$f^{-1}(x) = \frac{x+7}{4}$

$f^{-1}(5) = \frac{5+7}{4} = \frac{12}{4} = 3$

3) $h(x) = 6 - 3x$

$y = 6 - 3x$

$x = 6 - 3y$

$x - 6 = -3y$

$\frac{x-6}{-3} = y$

$h^{-1}(x) = \frac{-1}{3}(x-6)$

4) $k(x) = \frac{x-4}{3}$, $k^{-1}(2) = ?$

$y = \frac{x-4}{3}$

$x = \frac{y-4}{3}$

$3x = y - 4$

$3x + 4 = y$

$k^{-1}(x) = 3x + 4$

$\Rightarrow k^{-1}(2) = 3(2) + 4$

$= 10$

Almanahj.com/bh 2024

5) $g(x) = x^2 - 3$

$y = x^2 - 3$

$x = y^2 - 3$

$x + 3 = y^2$

$y = \pm\sqrt{x+3}$

$g^{-1}(x) = \pm\sqrt{x+3}$.

6) $h(x) = \frac{1}{2}x^2 - 1$

$y = \frac{1}{2}x^2 - 1$

$x = \frac{1}{2}y^2 - 1$

$x + 1 = \frac{1}{2}y^2$

$2(x+1) = y^2$

$y = \pm\sqrt{2(x+1)}$

$h^{-1}(x) = \pm\sqrt{2(x+1)}$

7) $g(x) = (x+6)^2$

$y = (x+6)^2$

$x = (y+6)^2$

$\sqrt{x} = \sqrt{(y+6)^2}$

$\sqrt{x} = y + 6$

$\sqrt{x} - 6 = y$

$g^{-1}(x) = \sqrt{x} - 6$.

8) $g(x) = \frac{1}{3}\sqrt{x+5}$

$y = \frac{1}{3}\sqrt{x+5}$

$x = \frac{1}{3}\sqrt{y+5}$

$3x = \sqrt{y+5}$

$(3x)^2 = (\sqrt{y+5})^2$

$9x^2 = y + 5$

$9x^2 - 5 = y$

$g^{-1}(x) = 9x^2 - 5$.

ثانيا : العلاقة بين الدالة و معكوسها :

تكون f, g دالة و معكوسها إذا كان : $[f \circ g](x) = x = [g \circ f](x)$

تمارين 2 : حدد إذا كانت كل دالتين تمثل دالة و معكوسها مع ذكر السبب :

1) $f(x) = 2x + 3$, $g(x) = 2x - 3$

$(f \circ g)(x) = f(g(x))$

$= f(2x - 3)$

$= 2(2x - 3)$

$= 4x - 6 \neq x$

$f \circ g$ ليست معكوس ودالتها.

2) $f(x)=18-3x\ ,\ g(x)=6-\frac{x}{3}$

$(f\circ g)(x)=f(g(x))$

$=f\left(6-\frac{x}{3}\right)$

$=18-3\left(6-\frac{x}{3}\right)$

$=18-18+x$

$=x$

$(g\circ f)(x)=g(f(x))$

$=g(18-3x)$

$=6-\frac{(18-3x)}{3}$

$=6-6+x$

$=x$

إذا f و g دالة ومعكوسها

3) $f(x)=(x+6)^2\ ,\ g(x)=\sqrt{x}-6\ ;x\geq 0$

$(f\circ g)(x)=f(g(x))$

$=f(\sqrt{x}-6)$

$=(\sqrt{x}-6+6)^2$

$=(\sqrt{x})^2$

$=x$

$(g\circ f)(x)=g(f(x))$

$g((x+6)^2)$

$=\sqrt{(x+6)^2}-6$

$=x+6-6$

$=x$

إذا f و g دالة ومعكوسها

تمرين 3 : يعبر عن مساحة سطح الدائرة بالدالة $A=\pi\ r^2$ ، فأوجد :

1) معكوس الدالة

$y=\pi x^2$

$x=\pi y^2$

$\frac{x}{\pi}=y^2 \Rightarrow y=\pm\sqrt{\frac{x}{\pi}} \Rightarrow r=\pm\sqrt{\frac{A}{\pi}}$

2) أوجد نصف قطر دائرة مساحة سطحها $36cm^2$.

$r=\sqrt{\frac{A}{\pi}}=\pm\sqrt{\frac{36}{\pi}}=3.39\ cm$

تمرين 4 ** : إذا علمت أن :

$f=\{(0,2),(1,-3),(5,4),(-1,10)\}\ ,\ g=\{(6,5),(3,0),(8,1),(7,-1)\}$

أوجد :

1) $[f\circ g]^{-1}(x)$

2) $[g^{-1}\circ f^{-1}](x)$

ماذا تستنتج ؟

نشاط (3) : دوال الجذر التربيعي

الأهداف :

1- بيان الدالة الأم لدوال الجذر التربيعي و تمثيلها بيانيا ، 2- تمثيل الدوال الجذرية بيانيا

3- دراسة تحويلات التمثيلات البيانية لدوال الجذر التربيعي ، 4- كتابة قواعد دوال الجذر التربيعي من الرسم .

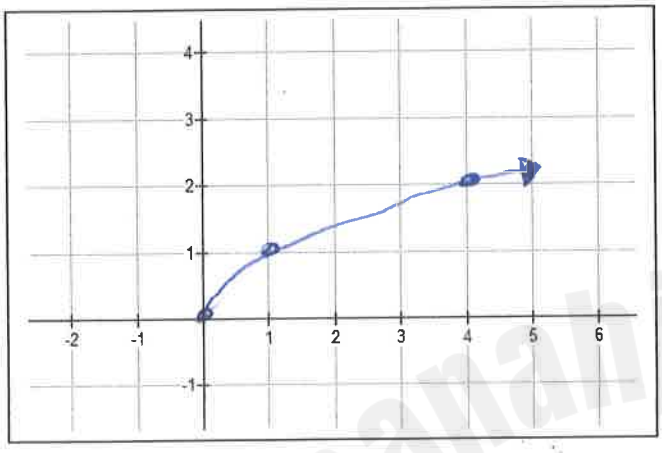
أولا : الدالة الأم لدوال الجذر التربيعي :

الدالة الأم هي $f(x)=\sqrt{x}$

$x \geq 0$

تمثيلها بيانيا :

x	0	1	4
$f(x)$	0	1	2



المجال هو :

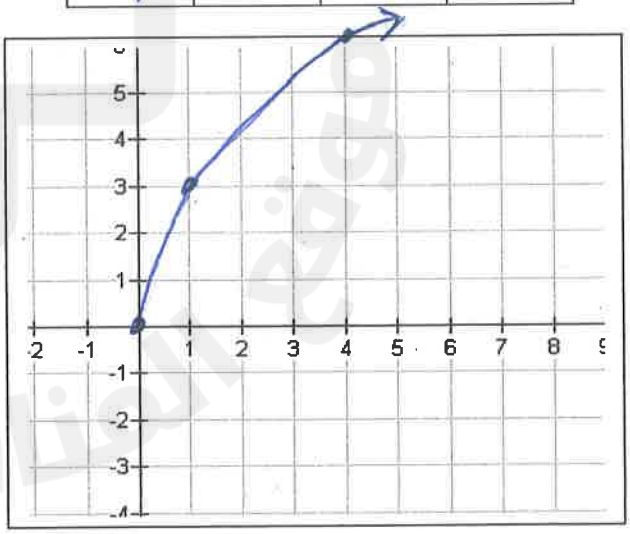
المدى هو :

ثانيا : تمثيل دوال الجذر التربيعي بيانيا :

*** تمارين (1)** : مثل بيانيا كل من الدوال التالية ثم حدد مجالها و مداها :

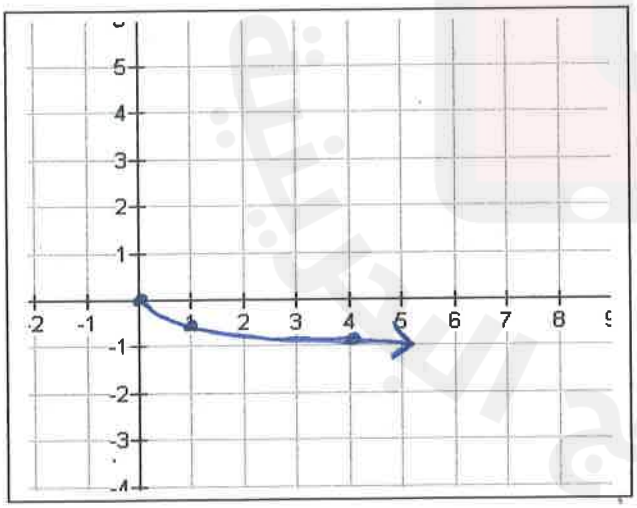
1) $f(x)=3\sqrt{x}$

x	0	1	4
$f(x)$	0	3	6



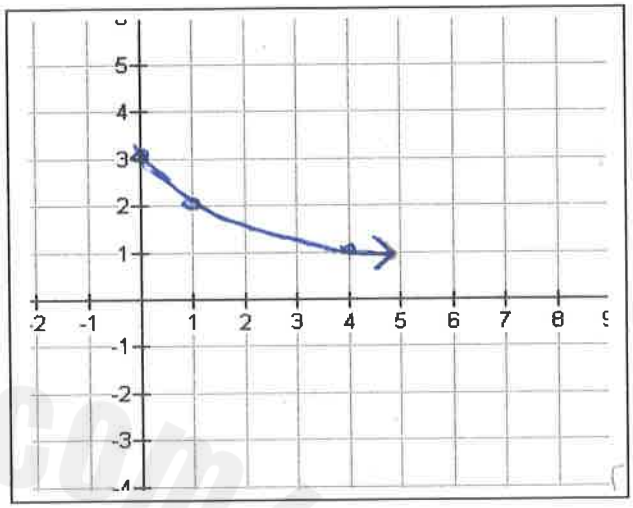
2) $g(x)=-\frac{1}{2}\sqrt{x}$

x	0	1	4
$g(x)$	0	$-\frac{1}{2}$	-1



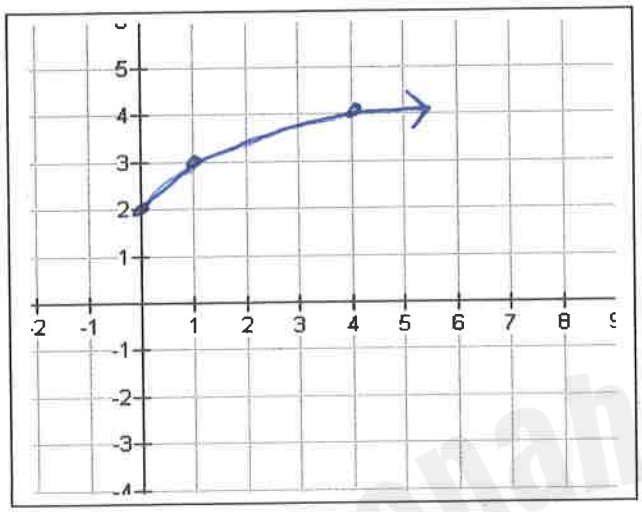
3) $h(x) = -\sqrt{x} + 3$

x	0	1	4
$h(x)$	3	2	1



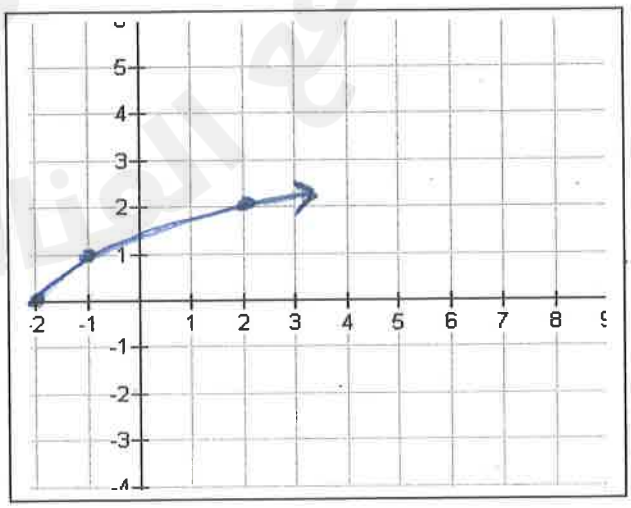
4) $k(x) = 2 + \sqrt{x}$

x	0	1	4
$K(x)$	2	3	4



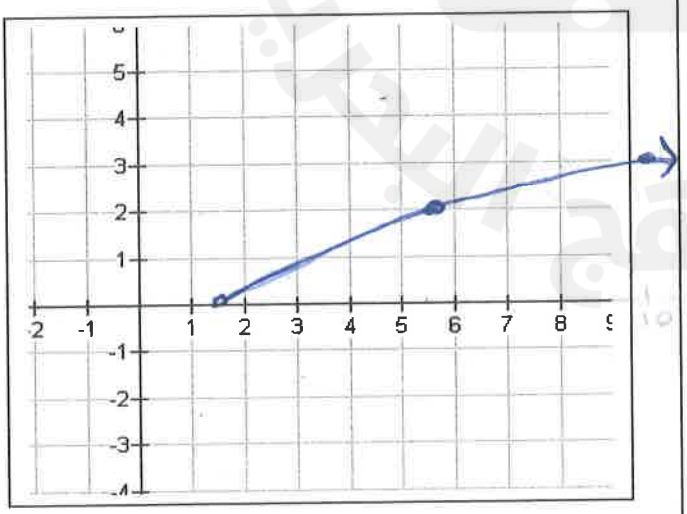
5) $t(x) = \sqrt{x+2}$ $x+2 \geq 0$, $x \geq -2$

x	-2	-1	2
$t(x)$	0	1	2



6) $p(x) = \sqrt{x - 1.5}$ $x - 1.5 \geq 0$, $x \geq 1.5$

x	1.5	5.5	10.5
$P(x)$	0	2	3



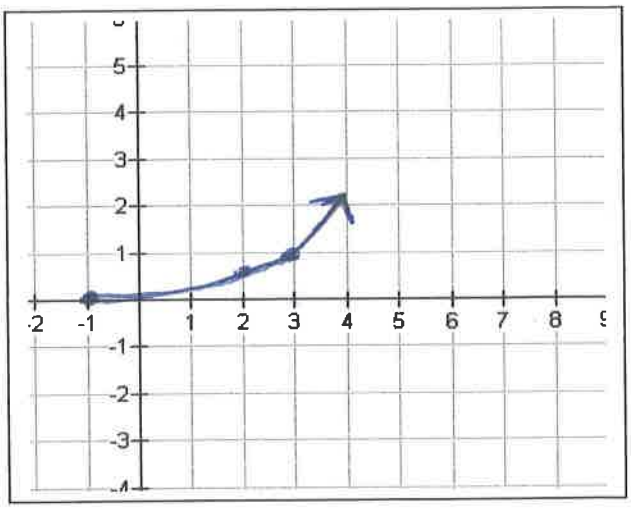
7)** $t(x) = -\frac{1}{2}\sqrt{3-x}+1$

$3-x \geq 0$

$3 \geq x$

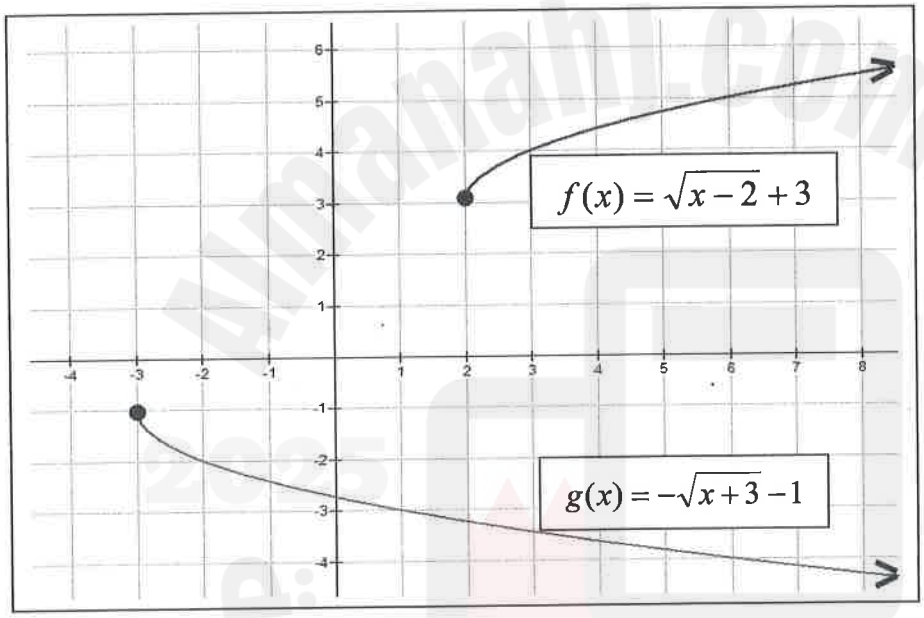
$x \leq 3$

x	-1	2	3
$f(x)$	0	$\frac{1}{2}$	1



ثالثا : تحويلات التمثيلات البيانية لدالة الجذر التربيعي :

$f(x) = a\sqrt{x-h}+k$ حيث : (h,k) رأس منحنى الدالة



1) دلالة h,k :

h : إزاحة أفقية (يمين + ، يسار −) ، k : إزاحة عمودية (أعلى + ، أسفل −)

2) دلالة a

إشارتها (تحدد إتجاهه)	قيمتها (تحدد إتساع المنحنى)
$a>0$ المنحنى مفتوح للأعلى	$\lvert a\rvert > 1$ يتسع رأسيا
$a<0$ المنحنى مفتوح للأسفل	$0 < \lvert a\rvert < 1$ يضيق رأسيا

3) مجال الدالة الجذرية : قيم x التي تجعل ما داخل الجذر (أكبر من أو يساوي صفر)

4) مدى الدالة الجذرية (يعتمد على اشارة ما قبل الجذر)

$a>0$	$a<0$
المدى : $\{y \mid y \geq k\}$	المدى : $\{y \mid y \leq k\}$

*** تمارين (2) : للدوال التالية أكمل كلا مما يلي :**

1) $f(x) = \sqrt{x-3} + 5$

$a = 1$ ، $k = 5$
$h = 3$

الرأس : $(h,k) = (3,5)$

المنحنى تحويل للتمثيل البياني للدالة $g(x) = \sqrt{x}$

مع إزاحة 3 جهة اليمين

و إزاحة 5 جهة الأعلى

$a = 1$ ⇐ المنحنى ـــــ رأسيا

المجال : $[3, +\infty[$

المدى : $[5, +\infty[$

2) $g(x) = -2\sqrt{x+1} + 7$

$a = 2$
$h = -1$
$k = 7$

الرأس : $(-1, 7)$

المنحنى تحويل للتمثيل البياني للدالة $f(x) = \sqrt{x}$

مع إزاحة 1 جهة اليسار

و إزاحة 7 جهة الأعلى

$a = 2$ ⇐ المنحنى يوسع رأسيا

المجال : $[-1, +\infty[$

المدى : $]-\infty, 7]$

الدالة كدالة تأثير العكس حول محور x

3) $h(x) = -3 + \frac{1}{2}\sqrt{x+4}$

$a = \frac{1}{2}$
$h = -4$
$k = -3$

الرأس : $(h,k) = (-4,-3)$

المنحنى تحويل للتمثيل البياني للدالة $f(x) = \sqrt{x}$

مع إزاحة 4 جهة اليسار

و إزاحة 3 جهة الأسفل

$a = \frac{1}{2}$ ⇐ المنحنى يضيق رأسيا

المجال : $[-4, +\infty[$

المدى : $[-3, +\infty[$

4) $k(x) = 8 - 3\sqrt{x+2}$

$a = 3$
$h = -2$
$k = 8$

الرأس : $(h,k) = (-2,8)$

المنحنى تحويل للتمثيل البياني للدالة $f(x) = \sqrt{x}$

مع إزاحة 2 جهة اليسار

و إزاحة 8 جهة الأعلى

$a = 3$ ⇐ المنحنى يوسع رأسيا

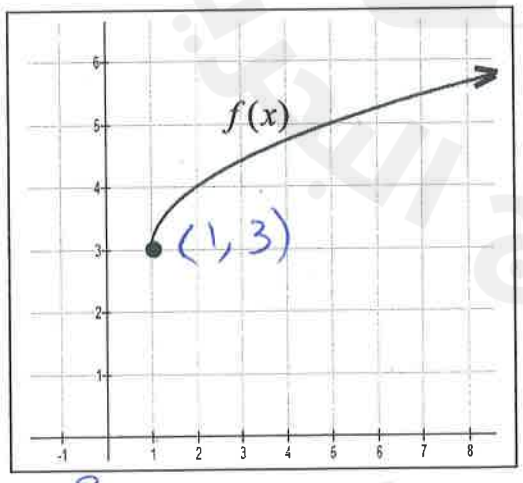
المجال : $[-2, +\infty[$

المدى : $]-\infty, 8]$

*** تمارين (3) : إكتب قاعدة دالة الجذر التربيعي من الرسم ثم إكتب مجالها ومداها**

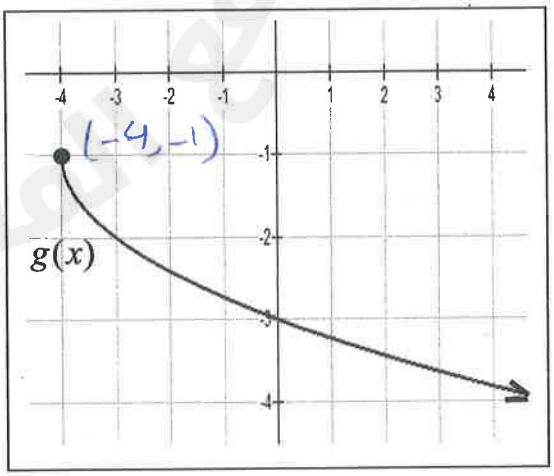
(**ملاحظة :** إعتبر أنه لايوجد توسع أو تضييق رأسي) :

(A)



$f(x) = \sqrt{x-1} + 3$

(B)



$g(x) = -\sqrt{x+4} - 1$

نشاط (4) : الجذر النوني

الأهداف :
1- تعريف الجذر النوني الحقيقي ، 2- بيان قواعد إيجاد الجذر النوني بحالاته ، 3- تبسيط تعابير جذرية
4- إستخدام الآلة الحاسبة لتقرب قيم جذور ، 4- حل مسائل لفظية بإستخدام التعابير الجذرية .

*** تمهيد :**

$a^3 = 27 \Rightarrow a =$, $a^2 = 36 \Rightarrow a =$

و بشكل عام فإن : $a^n = b \Rightarrow a =$

*** تذكر أن :** (1) ما داخل الجذر $\sqrt[n]{b}$ الدليل ، (2) الجذر التربيعي $\sqrt{x} = \sqrt[2]{x}$

*** قواعد إيجاد الجذر النوني :**

الناتج	المقدار
لا توجد جذور حقيقية	الدليل m زوجي ← $\sqrt[m]{a}$ سالب
الناتج $\frac{n}{m}$ زوجي , $a^{\frac{n}{m}}$	$\sqrt[m]{a^n}$ =
الناتج $\frac{n}{m}$ فردي , $\lvert a^{\frac{n}{m}} \rvert$	

ملاحظة :
إذا كان الدليل m فردي
$\sqrt[m]{a^n} = a^{\frac{n}{m}}$
بالتالي فإن جميع الجذور الفردية معرفة

$\sqrt{-1} = i$

***تمارين (1) :** بسط كلا مما يلي :

1) $\sqrt{49x^8y^{12}} = 7x^2y^6$

2) $-\sqrt{(k+7)^{16}} = -(k+7)^8$

3) $\sqrt{32a^{16}b^{10}} = 4\sqrt{2}\,a^8b^5$

4) $\sqrt[3]{-27p^{15}q^9} = -3p^5q^3$

5) $\sqrt{-16x^{24}} =$ غير معرف في $\mathbb{R}$ ، $4x^{12}$ في $\mathbb{C}$

6) $\sqrt[6]{64(2y+1)^{30}} = 2\lvert(2y+1)^5\rvert$

7) $\pm\sqrt{225a^{16}b^{36}} = \pm 15a^8b^{18}$

8) $-\sqrt{400x^{32}y^{40}} = -20x^{16}y^{20}$

9) $\sqrt[3]{64(x+y)^6} = 4(x+y)^2$

10) $\sqrt[4]{-(x+2)^{12}} =$ غير معرف في $\mathbb{R}$

11) $\sqrt{(a^2+4a)^2} = \lvert a^2+4a\rvert$

12) $\sqrt[6]{x^{18}}\ , x>0$ $\lvert x^3\rvert$

***تمارين (2)** : مستخدماً الآلة الحاسبة أوجد قيمة كل مما يلي مقرباً لثلاث منازل عشرية :

1) $\sqrt{58} \approx 7.61567 \approx 7.616$, 2) $-\sqrt{76} \approx -8.71777 \approx -8.718$, 3) $\sqrt[5]{-43} = -2.1217 \approx -2.122$.

***تمارين (3) - تأكد صفحة 31** :

يمكن إيجاد مساحة سطح كرة S بمعلومية حجمها V بإستخدام القانون $S = \sqrt[3]{36\pi V^3}$

أولا : أوجد مساحة سطح كرة حجمها $200\ in^3$.

$S = \sqrt[3]{36\pi(200)^3}$

$= 967.195$

≈ 967.20

ثانيا : إذا كانت مساحة سطح كرة تساوي $214.5\ in^2$ فأوجد حجم الكرة .

$(214.5)^3 = (\sqrt[3]{36\pi V^3})^3$

$\frac{(214.5)^3}{36\pi} = \frac{36\pi V^3}{36\pi}$

$\sqrt[3]{V^3} = \sqrt[3]{\frac{(214.5)^3}{36\pi}}$

$V = 44.355 \approx 44.36$

تمارين (4)* : بسط كلاً مما يلي :

1) $\sqrt{x^2+2x+1} = \sqrt{(x+1)^2} = |(x+1)|$

2) $\sqrt{(4x^2-12x+9)^3} = \sqrt{(2x-3)(2x-3)}$

$= \sqrt{((2x-3)^2)^3}$

$= \sqrt{(2x-3)^6}$

$= |(2x-3)^3|$

نشاط (5) : العمليات على التعابير الجذرية

الأهداف :
1- تبسيط جذور حقيقية ، 2- ضرب تعابير جذرية ، 3- جمع و طرح تعابير جذرية
4- قسمة تعابير جذرية عن طريق إنطاق المقام أو الضرب بالمرافق ، 4- حل مسائل لفظية بإستخدام التعابير الجذرية .

*** تذكر أن -1 (ضرب الجذور) :**

1) $\sqrt[n]{a\,b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$ — الدليل n فردي / الدليل n زوجي و a , b ما داخل الجذر غير سالبين

2) $a^n . b^n = a^{n+m}$

***تمارين (1) :** بسط كلا مما يلي :

1) $\sqrt{75x^{16}} = 5\sqrt{3}\ x^8$

2) $\sqrt[3]{27y^{12}z^7} = 3\ y^4 z^2 \sqrt[3]{z}$ — $\frac{7}{3} = 2\frac{1}{3}$

3) $\sqrt[4]{81k^{20}t^{11}} = 3|k^5|\ t^2 \sqrt[4]{t^3}$ — $\frac{11}{4} = 2\frac{3}{4}$

4) $6\sqrt{8c^3d^5} \cdot 4\sqrt{2cd^3} =$

$= 24\sqrt{8 \times 2\, c^3 d^5 \cdot c d^3}$

$= 24\sqrt{16\, c^4 d^8}$

$= 24 \cdot 4\, c^2 d^4 = 96 c^2 d^4$

5) $5\sqrt{12} + 2\sqrt{27} - \sqrt{128} =$

$= 5 \times 2\sqrt{3} + 2 \times 3\sqrt{3} - 8\sqrt{2}$

$= 10\sqrt{3} + 6\sqrt{3} - 8\sqrt{2}$

$= 16\sqrt{3} - 8\sqrt{2}$

6) $\sqrt{36ab^4c^5} = \sqrt{36} \cdot \sqrt{a} \cdot \sqrt{b^4} \cdot \sqrt{c^5}$

$= 6\sqrt{a}\ b^2 c^2 \sqrt{c}$

$= 6b^2c^2\sqrt{ac}$

7) $\sqrt{144x^7y^5} = 12\, x^3\sqrt{x}\ y^2\sqrt{y}$

$= 12 x^3 y^2 \sqrt{xy}$

8) $4\sqrt{5a^5} \cdot \sqrt{125a^3} =$

$4\sqrt{5a^5 \cdot 125a^3}$

$4\sqrt{625a^8} = 4 \times 25\, a^4$

$= 100\, a^4$

9) $\sqrt[4]{3x^3y^2} \cdot \sqrt[4]{27xy^2} =$

$\sqrt[4]{3 x^3 y^2 \cdot 27 x y^2}$

$= \sqrt[4]{81\, x^4 y^4} = 3|x||y|$

10) $4\sqrt{40} + 3\sqrt{28} - \sqrt{200} =$

$= 4 \cdot 2\sqrt{10} + 3 \cdot 2\sqrt{7} - 10\sqrt{2}$

$= 8\sqrt{10} + 6\sqrt{7} - 10\sqrt{2}$

≈ 27.031

* تذكر أن -2 (قسمة الجذور) :

1) $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$ ← الدليل n فردي
← الدليل n زوجي و ما داخل الجذر a , b غير سالبين
$b \neq 0$

2) $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$

*إنطاق المقام : أنظر التفاصيل صـ 37

فمثلا :

	إذا كان المقام يحوي	نضرب في
1	$\sqrt{y}$	$\sqrt{y}$
2	$\sqrt[4]{xy^3}$	$\sqrt[4]{x^3y}$
3	$\sqrt[5]{2^3t^3}$	$\sqrt[5]{2^2t^2} = \sqrt[5]{4t^2}$
4	$\sqrt[3]{x}$	$\sqrt[3]{x^2}$
5	$\sqrt[5]{3xz^4}$	$\sqrt[5]{3^4x^4z}$

*تمارين (2) : بسط كلا مما يلي :

1) $\sqrt{\frac{7x}{10y^3}} = \sqrt{\frac{7x}{10y^3} \cdot \frac{10y}{10y}}$

$\frac{\sqrt{70xy}}{\sqrt{10^2y^4}}$

$= \frac{\sqrt{70xy}}{10y^2}$

2) $\sqrt[5]{\frac{3}{4y^2}} = \sqrt[5]{\frac{3}{2^2y^2} \cdot \frac{2^3y^3}{2^3y^3}}$

$= \frac{\sqrt[5]{24y^3}}{\sqrt[5]{2^5y^5}} =$

$= \frac{\sqrt[5]{24y^3}}{2y}$

3) $\sqrt[3]{\frac{6x^2}{5y}} = \sqrt[3]{\frac{6x^2}{5y} \cdot \frac{5^2y^2}{5^2y^2}}$

$= \frac{\sqrt[3]{6.25x^2y^2}}{\sqrt[3]{5^3y^3}} = \frac{\sqrt[3]{150x^2y^2}}{5y}$

4) $\sqrt{\frac{a^5}{b^9}} = \frac{a^2\sqrt{a}}{b^4\sqrt{b}} \cdot \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{b}} = \frac{a^2\sqrt{ab}}{b^4.b}$

$= \frac{a^2\sqrt{ab}}{b^5}$

b: $\frac{9}{2} = 4\frac{1}{2}$

a: $\frac{5}{2} = 2\frac{1}{2}$

5) $(4+2\sqrt{5}).(3\sqrt{3}+4\sqrt{5})=$

$12\sqrt{3}+16\sqrt{5}+6\sqrt{15}+40$

6) $\frac{4+\sqrt{2}}{\sqrt{2}-3}=$

$\frac{4+\sqrt{2}}{\sqrt{2}-3}\cdot\frac{\sqrt{2}+3}{\sqrt{2}+3}$

$=\frac{4\sqrt{2}+12+2+3\sqrt{2}}{2-9}$

$=\frac{7\sqrt{2}+14}{-7}$

$=\boxed{-\sqrt{2}-2}$

7) $\frac{8}{6-\sqrt{5}}=$

$\frac{8}{6-\sqrt{5}}\cdot\frac{6+\sqrt{5}}{6+\sqrt{5}}$

$=\frac{8(6+\sqrt{5})}{36-5}=\frac{8(6+\sqrt{5})}{31}$

$=\boxed{\frac{48+8\sqrt{5}}{31}}$

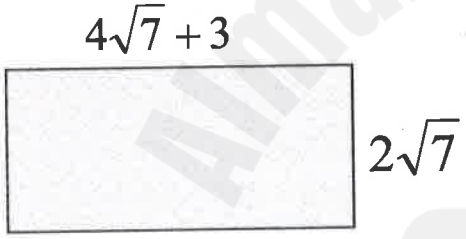
8) $\frac{x+1}{\sqrt{x}-1}=$ الحل في المرفق

$\frac{x+1}{\sqrt{x}-1}\cdot\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+1}$

$\frac{(x+1)(\sqrt{x}+1)}{x-1}$

$=\boxed{\frac{x\sqrt{x}+x+\sqrt{x}+1}{x-1}}$

***تمارين (3)** : من الشكل التالي أوجد لأبسط صورة :



أولا : محيط المستطيل

$2($ الطول + العرض $)$

$=2(4\sqrt{7}+3+2\sqrt{7})$

$=2(6\sqrt{7}+3)=\boxed{12\sqrt{7}+6}$

ثانيا : مساحة المستطيل

الطول × العرض

$=2\sqrt{7}(4\sqrt{7}+3)$

$=8\times7+2\sqrt{7}\times3$

$\boxed{56+6\sqrt{7}}$

Almanahi.com

نشاط (6) : الأسس النسبية

الأهداف :
1- التعرف على قوانين الأسس ، 2- التحويل من الصورة الجذرية إلى الأسية و العكس
3- ضرب و قسمة تعابير تحوي أسسا نسبية ، 4- قسمة تعابير تحوي أسسا نسبية بإنطاق المقام أو الضرب بالمرافق

*** تذكر (قوانين الأسس) :**

بشرط المقامات معرفة

1) $a^m . a^n = a^{m+n}$	2) $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$
3) $(a^m)^n = a^{m.n}$	
4) $(a.b)^n = a^n . b^n$	5) $(\frac{a}{b})^n = \frac{a^n}{b^n}$
6) $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$	
7) $a^0 = 1$	

الصورة الأسية	الصورة الجذرية
$a^{\frac{n}{m}}$	$\sqrt[m]{a^n}$

*** ملخص المفاهيم :** أنظر التفاصيل صـ 45

***تمارين (1) :** حول من الصورة الأسية إلى الجذرية و بالعكس :

الصورة الجذرية	الصورة الأسية
1) $\sqrt[4]{10^1}$	$10^{\frac{1}{4}}$
2) $\sqrt{15}$	$15^{\frac{1}{2}}$
3) $\sqrt[5]{x^3}$	$x^{\frac{3}{5}}$
4) $\sqrt[4]{16\,x^6\,y^9}$	$16^{\frac{1}{4}} x\, y^{\frac{9}{4}}$
5) $\sqrt[3]{(125)^2}$	$125^{\frac{2}{3}}$
6) $\sqrt[5]{243\,x^3}$	$(243)^{1/5}\, x^{3/5}$

***تمارين (2) :** بسط كلا مما يلي :

1) $a^{\frac{1}{2}} . a^{\frac{1}{4}} = a^{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}} = a^{\frac{3}{4}}$

2) $\frac{x^{\frac{4}{5}}}{x^{\frac{3}{5}}} = x^{\frac{4}{5}-\frac{3}{5}} = x^{\frac{1}{5}}$

3) $\frac{(b^{\frac{1}{3}})^3 . c}{(c^{\frac{1}{2}})^2 . b^{\frac{2}{3}}} = \frac{b^3 c}{c^{1/2} b^{2/3}}$

$= b^{3-\frac{2}{3}} \cdot c^{1-\frac{1}{2}}$

$= b^{\frac{7}{3}} c^{\frac{1}{2}}$

4) $\frac{(k^2)^{\frac{-3}{2}} . t}{t^{\frac{1}{3}} . k^{-3}} = \frac{k^{-3} t}{t^{1/3} k^{-3}}$

$= k^{-3+(-3)} t^{1-\frac{1}{3}}$

$= k^0 t^{2/3} = t^{\frac{2}{3}}$

5) $y^{\frac{-3}{5}} = \frac{1}{y^{\frac{3}{5}}} \cdot \frac{y^{2/5}}{y^{3/5}} = \frac{y^{2/5}}{y^1}$

6) $w^{\frac{-4}{7}} = \frac{1}{w^{4/7}} \cdot \frac{w^{3/7}}{w^{3/7}} = \frac{w^{3/7}}{w}$

7) $\frac{\sqrt[8]{81}}{\sqrt[6]{3}} = \frac{(81)^{\frac{1}{8}}}{(3)^{\frac{1}{6}}}$

$= \frac{(3^4)^{\frac{1}{8}}}{3^{\frac{1}{6}}}$

$= \frac{3^{\frac{1}{2}}}{3^{\frac{1}{6}}} = 3^{\frac{1}{2}-\frac{1}{6}}$

$= 3^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{3}$

3	81
3	27
3	9
3	3
	1

$81 = 3^4$

8) $\frac{\sqrt[5]{64}}{\sqrt[5]{4}} = \frac{2^{\frac{6}{5}}}{2^{\frac{2}{5}}}$

$= 2^{\frac{6}{5}-\frac{2}{5}}$

$= 2^{\frac{4}{5}}$

$= \sqrt[5]{2^4}$

$= \sqrt[5]{16}$

2	64
2	32
2	16
2	8
2	4
2	2
	1

9) $\frac{y^{\frac{1}{2}}+2}{y^{\frac{1}{2}}-2} =$

$\frac{y^{\frac{1}{2}}+2}{y^{\frac{1}{2}}-2} \cdot \frac{y^{\frac{1}{2}}+2}{y^{\frac{1}{2}}+2} = \frac{(y^{\frac{1}{2}}+2)(y^{\frac{1}{2}}+2)}{(y^{\frac{1}{2}})^2-2^2} = \frac{(y^{\frac{1}{2}})^2+2y^{\frac{1}{2}}+2y^{\frac{1}{2}}+4}{y-4}$

$= \frac{y+4y^{\frac{1}{2}}+4}{y-4}$

10) $\frac{t^{\frac{3}{2}}}{2t^{\frac{1}{2}}-1} =$

$= \frac{t^{\frac{3}{2}}}{2t^{\frac{1}{2}}-1} \cdot \frac{2t^{\frac{1}{2}}+1}{2t^{\frac{1}{2}}+1} = \frac{t^{\frac{3}{2}}(2t^{\frac{1}{2}}+1)}{(2t^{\frac{1}{2}})^2-1^2} = \frac{2t^2+t^{\frac{3}{2}}}{4t-1}$

11)** $\frac{x^{\frac{1}{4}}+2}{x^{\frac{1}{4}}-2} =$

نشاط (7) : حل المعادلات الجذرية

الأهداف :
1- التعرف على إستراتيجية حل المعادلات الجذرية ، 2- إيجاد مجموعة حل معادلات جذرية

*** تذكر (إستراتيجية حل المعادلات الجذرية) :**
1) وضع الجذر في طرف واحد من المعادلة .
2) رفع طرفي المعادلة لأس يساوي دليل الجذر .
3) حل المعادلة
4) التحقق من الحلول بالمعادلة الأصلية .

***تمارين (1) :** حل المعادلات التالية :

1) $6 + \sqrt{3x+1} = 11$

$\sqrt{3x+1} = 11 - 6$

$\sqrt{3x+1} = 5$

$3x + 1 = 5^2$

$3x + 1 = 25$

$3x = 25 - 1$

$3x = 24$

$x = 8$

التحقق

$6 + \sqrt{3(8)+1} \stackrel{?}{=} 11$

$11 = 11$ ✓

$\{8\} = ح.م$

2) $3(x+5)^{\frac{1}{3}} - 6 = 0$

$3(x+5)^{\frac{1}{3}} = 6$

$(x+5)^{\frac{1}{3}} = 2$

$x + 5 = 8$

$x = 8 - 5$

$x = 3$

التحقق

$3(3+5)^{\frac{1}{3}} - 6 \stackrel{?}{=} 0$

$0 = 0$ ✓

$\{3\} = ح.م$

3) $(4m - 5)^{\frac{1}{2}} - 1 = 2$

$(4m-5)^{\frac{1}{2}} = 2 + 1$

$(4m-5)^{\frac{1}{2}} = 3$

$4m - 5 = 3^2$

$4m - 5 = 9$

$4m = 9 + 5$

$4m = 14$

$m = \frac{14}{4}$

$m = \frac{7}{2}$

التحقق

$(4(\frac{7}{2}) - 5)^{\frac{1}{2}} - 1 \stackrel{?}{=} 2$

$2 = 2$ ✓

$\{\frac{7}{2}\} = ح.م$

4) $\sqrt{2t-7} = \sqrt{t+2}$

$2t - 7 = t + 2$

$2t - t = 7 + 2$

$t = 9$

التحقق

$\sqrt{2(9)-7} \stackrel{?}{=} \sqrt{9+2}$

$\sqrt{11} = \sqrt{11}$ ✓

$\{9\} = ح.م$

5) $(\sqrt{x+15})^2 = (5+\sqrt{x})^2$

$x + 15 = 25 + 10\sqrt{x} + x$

$15 - 25 = 10\sqrt{x}$

$-10 = 10\sqrt{x}$

$\sqrt{x} = -1$

$x = 1$

التحقق

$\sqrt{1+15} \stackrel{?}{=} 5 + \sqrt{1}$

$4 \neq 6$

ليس لها حل

7) $\sqrt{x+5} - 3 = x$

$\sqrt{x+5} = x + 3$

$x + 5 = x^2 + 2 \cdot x \cdot 3 + 3^2$

$x + 5 = x^2 + 6x + 9$

$x^2 + 6x + 9 - x - 5 = 0$

$x^2 + 5x + 4 = 0$

$(x + 4)(x + 1) = 0$

$x_1 = -4$

$x_1 = -1$

$x = -1$ ✓

التحقق

$\sqrt{-1+5} - 3 = -1$ ✓

$\sqrt{-4+5} - 3 = -2 \neq -4$ مرفوض

$x_1 = -1$, $x_2 = -4$ مرفوض

8) $(2\sqrt{x+9})^2 = (x+1)^2$

$4(x+9) = x^2 + 2x + 1$

$4x + 36 = x^2 + 2x + 1$

$x^2 + 2x + 1 - 4x - 36 = 0$

$x^2 - 2x - 35 = 0$

$(x + 5)(x - 7) = 0$

$x = -5$, $x = 7$

مرفوض

التحقق

$2\sqrt{-5+9} \stackrel{?}{=} -5 + 1$

$4 \neq -4$

$x = -5$

$2\sqrt{7+9} = x + 1$

$8 = 8$ ✓

$x = 7$ ✓

6) $\sqrt{b-6} + \sqrt{b} = 3$

$\sqrt{b-6} = 3 - \sqrt{b}$

$b - 6 = 3^2 - 2 \cdot 3\sqrt{b} + (\sqrt{b})^2$

$b - 6 = 9 - 6\sqrt{b} + b$

$-6 = 9 - 6\sqrt{b}$

$-6 - 9 = -6\sqrt{b}$

$-15 = -6\sqrt{b}$

$\sqrt{b} = \frac{-15}{-6} \Rightarrow \sqrt{b} = \frac{5}{2}$

$b = \left(\frac{5}{2}\right)^2 = \frac{25}{4}$

التحقق من

$\sqrt{\frac{25}{4} - 6} + \sqrt{\frac{25}{4}} = 3$ ✓

$\left\{\frac{25}{4}\right\} = C.S$

الملتقى الطلابي WWW.STUDENTS-BH

نشاط (8) : تمثيل الدوال الأسية بيانيا

الأهداف :

1- التعرف على دالتي النمو و الإضمحلال الأسي ، 2- تمثيل الدوال الأسية بيانيا

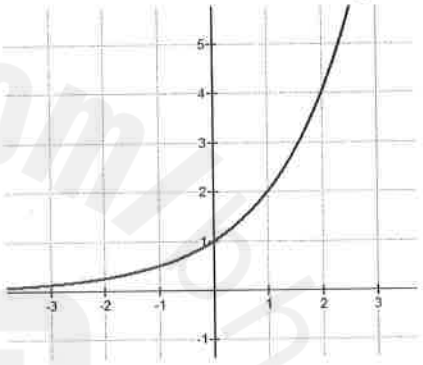
3- دراسة تحويلات التمثيلات البيانية للدوال الأسية ، 4- إيجاد مجال و مدى الدوال الأسية

الدالة الأسية نوعان هما :

أولا : دالة النمو الأسي :

الدالة الأم هي $y=b^x$ حيث $b>1$

مثال : $y=2^x$



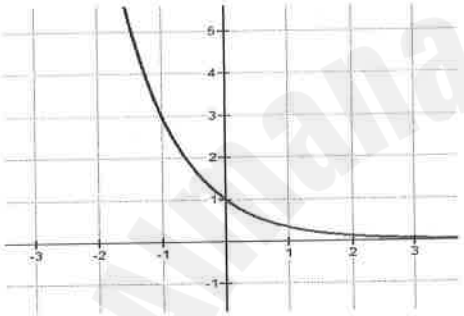
1) المجال : $\Re$ ، المدى $\Re^+$ أو $\{y|y>0\}$

2) خط التقارب : محور السينات $y=0$

ثانيا : دالة الإضمحلال الأسي :

الدالة الأم هي $y=b^x$ حيث $0<b<1$

مثال : $y=(\frac{1}{3})^x$



1) المجال : $\Re$ ، المدى $\Re^+$ أو $\{y|y>0\}$

2) خط التقارب : محور السينات $y=0$

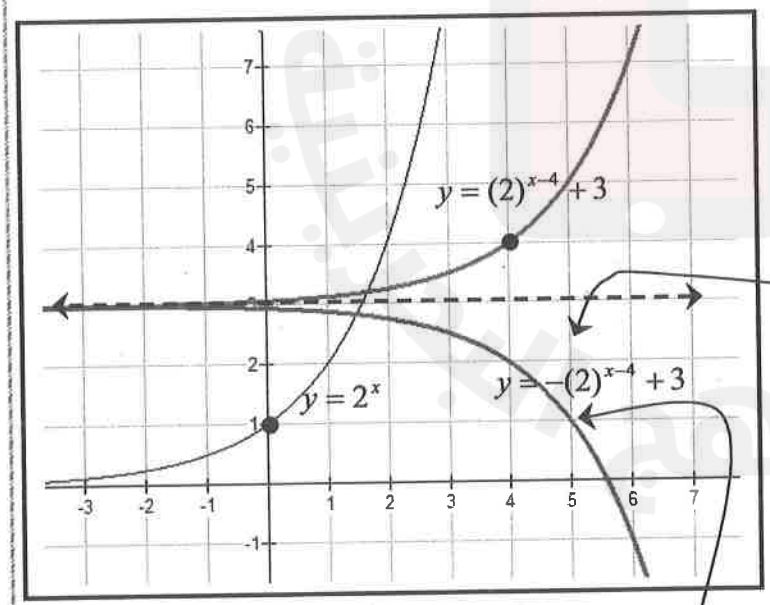
تحويلات التمثيلات البيانية للدالة الأسية :

$y=ab^{x-h}+k$ حيث :

h : إزاحة أفقية (يمين + ، يسار −)

k : إزاحة عمودية (أعلى + ، أسفل −)

خط التقارب : $y=k$



دلالة a

قيمتها تحدد إتساع المنحنى

$|a|>1$ يتسع رأسيا

$0<|a|<1$ يضيق رأسياً

إشارتها تحدد إتجاهه

$a>0$ مفتوح للأعلى

$a<0$ مفتوح للأسفل (إنعكاس حول محور التقارب)

مجال أي دالة أسية

$\Re$

مدى الدالة الأسية

$a>0$ (المدى : $\{y|y>k\}$)

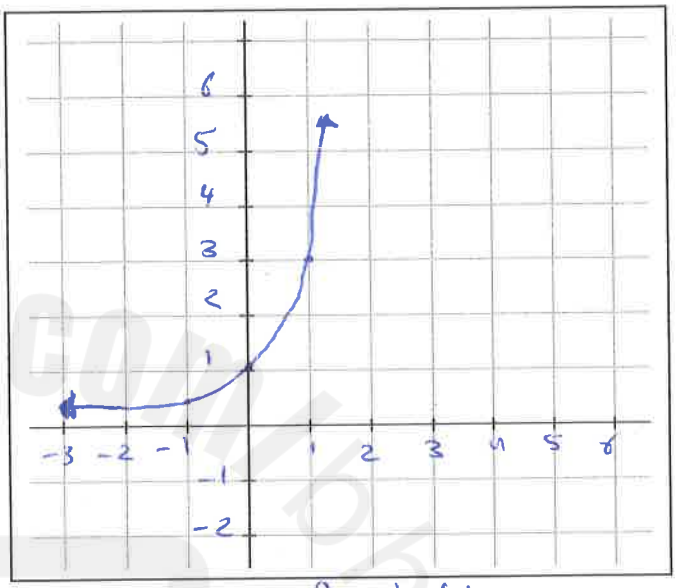
$a<0$ (المدى : $\{y|y<k\}$)

تمارين (1) : مثل بيانيا الدوال الأسية التالية مع إيجاد مجالها و مداها :

(1) $f(x) = 3^x$

الحل:

x	-1	0	1
$f(x)$	$\frac{1}{3}$	1	3



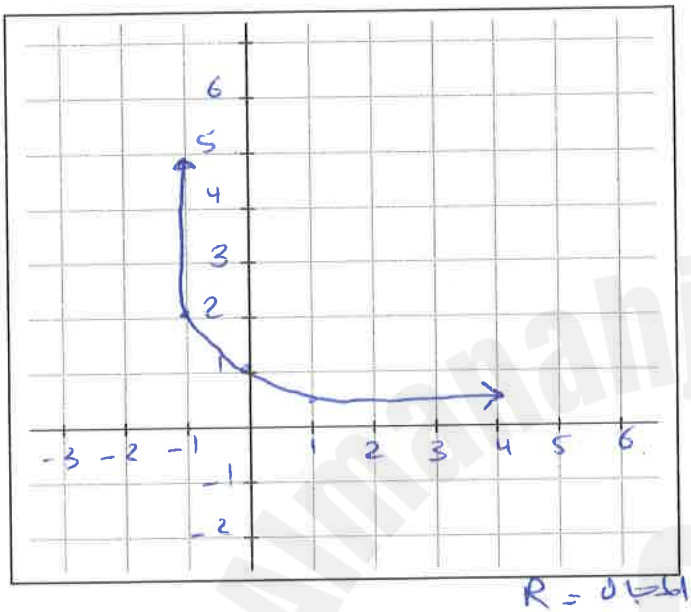
المجال = $\mathbb{R}$

المدى = $\{y \mid y > 0\}$

(2) $g(x) = (\frac{1}{2})^x$

الحل :

x	-1	0	1
$f(x)$	2	1	$\frac{1}{2}$



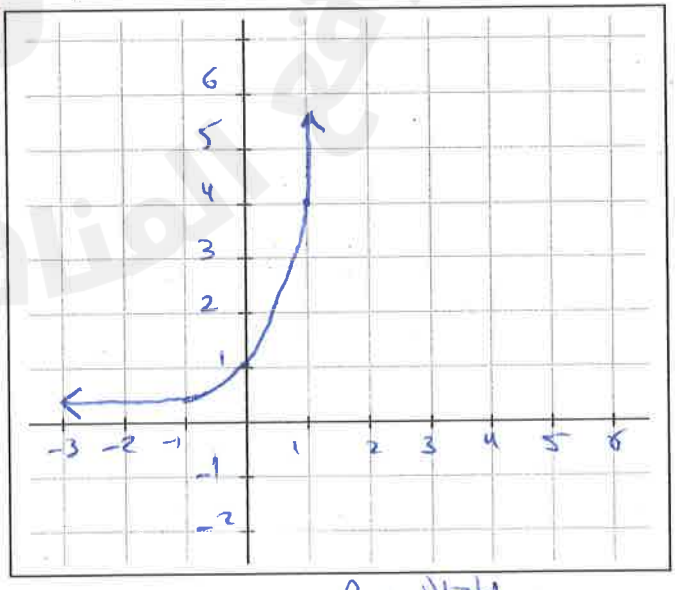
المجال = $\mathbb{R}$

المدى = $\{y \mid y > 0\}$

(3) $h(x) = 4^x$

الحل:

x	-1	0	1
$f(x)$	$\frac{1}{4}$	1	4



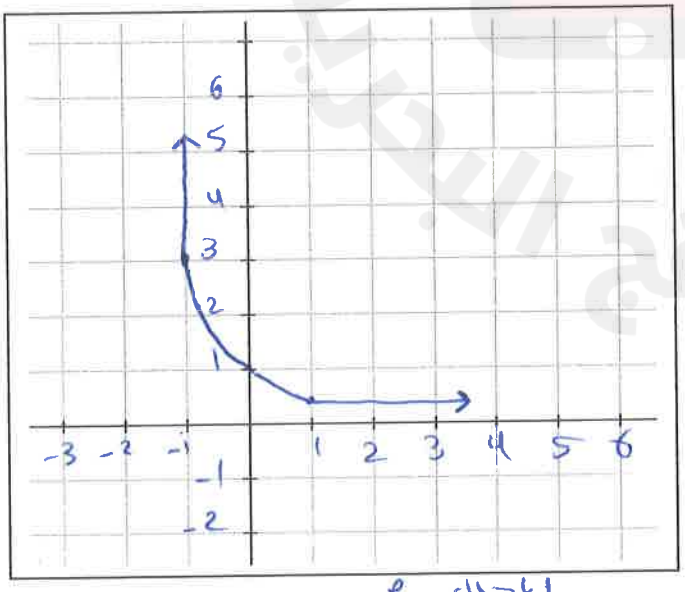
المجال = $\mathbb{R}$

المدى = $\{y \mid y > 0\}$

(4) $k(x) = (\frac{1}{3})^x$

الحل :

x	-1	0	1
$f(x)$	3	1	$\frac{1}{3}$



المجال = $\mathbb{R}$

المدى = $\{y \mid y > 0\}$

تمارين (2) : أكمل ما يلي :

أولا : للدالة : $y = 2(\frac{1}{5})^{x-1} + 5$

1- الدالة هي تحويل للتمثيل البياني للدالة : $f(x) = (\frac{1}{5})^x$

2- $h = 1$ إزاحة ..1.. وحدة جهة اليمين

3- $k = 5$ إزاحة ..5.. وحدة جهة لأعلى

4- $a = 2$ و بالتالي المنحنى ..يتوسع.. رأسياً

5- خط التقارب هو : $y = 5$

المجال = R

المدى = $\{y | y > 5\}$

ثانياً : للدالة : $y = -\frac{2}{3}(4)^{x+3} - 3$

1- الدالة هي تحويل للتمثيل البياني للدالة : $f(x) = 4^x$

2- $h = -3$ إزاحة ..3.. وحدة جهة اليسار

3- $k = -3$ إزاحة ..3.. وحدة جهة لأسفل

4- $a = \frac{2}{3}$ و بالتالي المنحنى ..يضيق.. رأسياً

5- خط التقارب هو : $y = -3$

* انعكاس حول محور x

المجال = R

المدى = $\{y | y < -3\}$

تمارين (3) : أوجد مجال ومدى كل دالة أسية فيما يلي مبيناً الإزاحات الأفقية والرأسية مع بيان هل يضيق أم يتسع المنحنى رأسياً -إن وجدت- و ذلك مقارنة مع الدالة الأم :

1) $y = 4(3)^{x+1} + 2$

الإزاحات الأفقية و الرأسية : إزاحة وحدة واحدة لليسار وحدتين لأعلى

التضييق و التوسع الرأسي : $a > 1$ يتوسع رأسياً

المجال : R

المدى : $\{y | y > 2\}$

2) $y = -2(\frac{1}{3})^{x-5} - 7$

إزاحة 5 وحدات لليمين و 7 وحدات لأسفل

* ينعكس التمثيل حول محور x.

$a > 1$ يتوسع رأسياً

المجال = R

المدى = $\{y | y < -7\}$

3) $y = \frac{5}{3}(4)^{x-1}$

إزاحة وحدة واحدة لليمين.

$a = \frac{5}{3} > 1$ يتوسع رأسياً

المجال = R

المدى $\{y | y > 0\}$

4) $y = 5 - (\frac{1}{2})^x$

$= -(\frac{1}{2})^x + 5$

إزاحة 5 وحدات لأعلى.

ينعكس التمثيل حول محور x.

لا يوجد توسع ولا تضييق

المجال = R

المدى $\{y | y < 5\}$

5) $y = -0.3^x + 2$

الإزاحات الأفقية و الرأسية : وحدتين لأعلى

انعكاس حول محور x.

التضييق و التوسع الرأسي : لا يوجد.

المجال : R

المدى : $\{y | y < 2\}$

6) $y = 4(3)^{x+1} + 2$

إزاحة وحدة واحدة لليسار و وحدتين لأعلى

$a = 4 > 1$ توسع رأسي

المجال = R

المدى = $\{y | y > 2\}$

7) $y = 3 - 7^{x+5}$

إزاحة 5 وحدات لليسار

إزاحة 3 وحدات لأعلى

انعكاس حول محور x

المجال = R

المدى $\{y | y < 3\}$

8)* $y = (\frac{2}{5})^{-x}$

$y = (\frac{5}{2})^x$

لا يوجد إزاحة رأسية

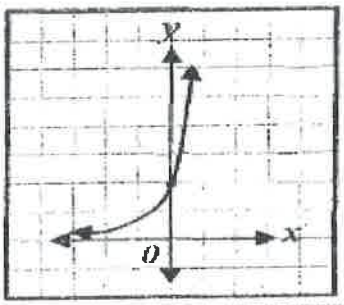
لا يوجد إزاحة أفقية.

تمارين (4) : قابل بين كل دالة و تمثيلها البياني :

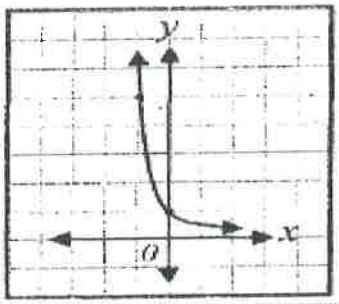
$(1)\ y = 5^x\ ,\ (2)\ y = 2(5)^x\ ,\ (3)\ y = (\frac{1}{5})^x$

2

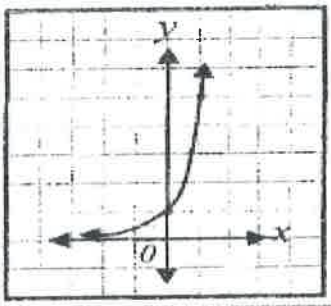
a)



b) 3

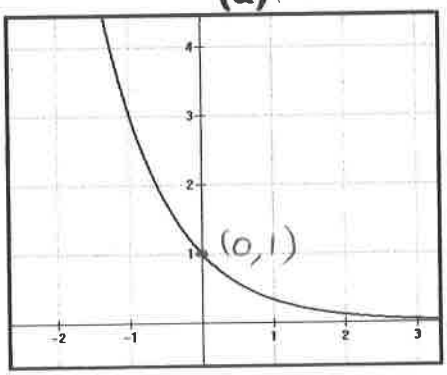


c) 1

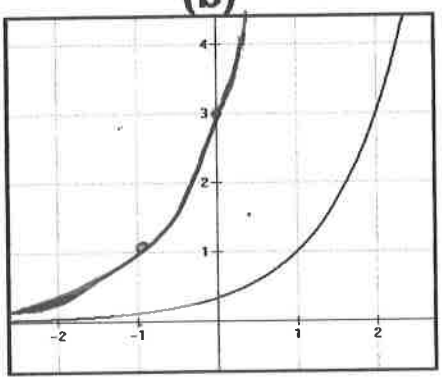


$$(1)\ y = 3^x\ ,\ (2)\ y = (\frac{1}{3})^x\ ,\ (3)\ y = 3^{x+1}$$

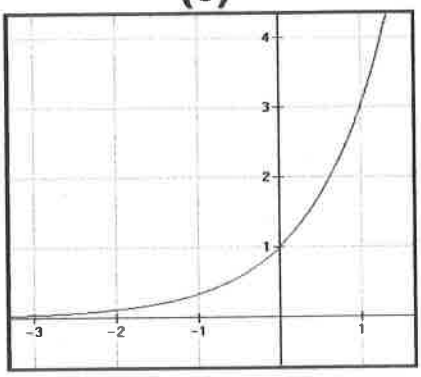
(a) (2)



(b) (3)



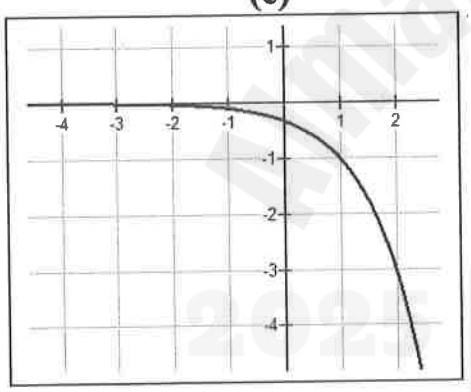
(1) (c)



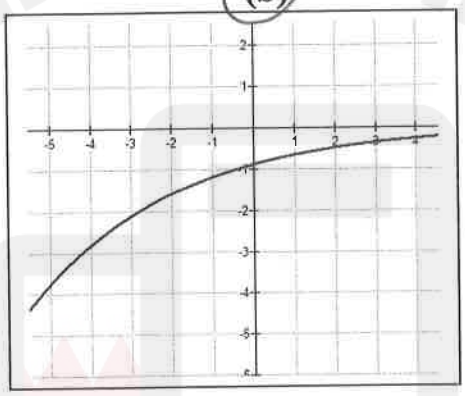
تمارين (5): إختر التمثيل البياني الصحيح لكل دالة أسية مبينة قاعدتها فيما يلي :

$$1)\ f(x) = \frac{-2}{3}(\frac{3}{4})^{x-1}$$

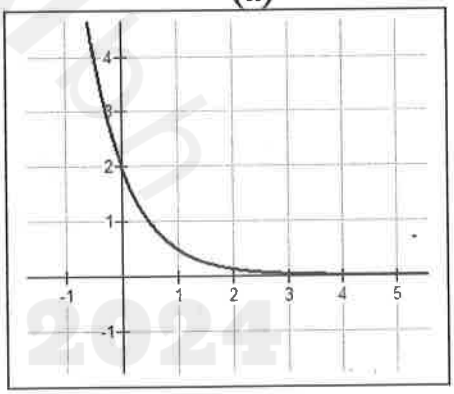
(c)



(b)

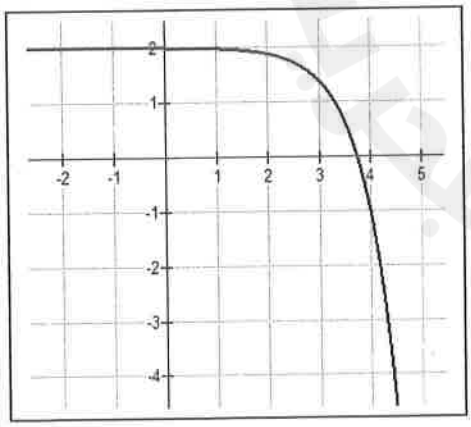


(a)

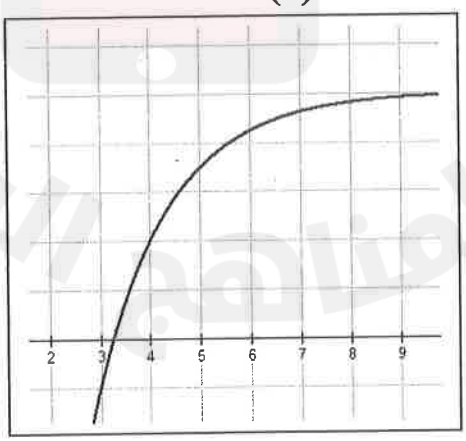


$$2)\ g(x) = 3(2)^{x+4} + 1$$

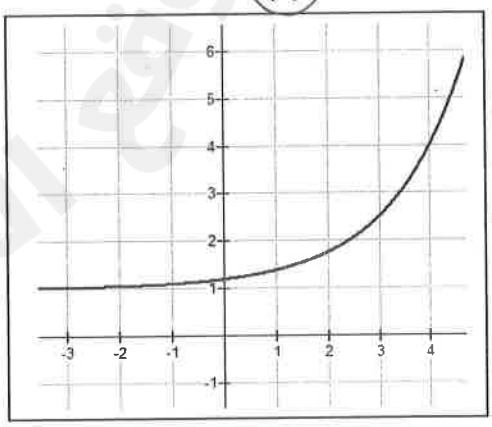
(c)



(b)



(a)



نشاط (9) : حل المعادلات الأسية

تذكر أن :

1) إذا كان $a^x = a^y$ (الأساسات متساوية) $\Leftarrow$ ∴ الأسس متساوية ، $x = y$

2) $b^x = 1 \Leftrightarrow x = 0$

تدريبات : حل المعادلات :

(1) $5^{2x} = 5^{10}$

الأساس متساوي ⇐ الأسس متساوية

$2x = 10$

$x = 5$

(2) $3^{5x} = 27^{2x-4}$

$3^{5x} = 3^{3(2x-4)}$

$5x = 3(2x-4)$

$5x = 6x - 12$

$12 = 6x - 5x$

$x = 12$

(3) $49^{x+5} = \frac{7^{8x}}{7^6}$

$7^{2(x+5)} = 7^{8x-6}$

$2x + 10 = 8x - 6$

$10 + 6 = 8x - 2x$

$16 = 6x$

$\frac{16}{6} = x$

$\frac{8}{3} = x$

(4) $256^b \times 256^2 = 4^{2-2b}$

$4^{4b} \times 4^8 = 4^{2-2b}$

$4^{4b+8} = 4^{2-2b}$

$4b + 8 = 2 - 2b$

$4b + 2b = 2 - 8$

$6b = -6$

$b = -1$

(5) $8^{2y+4} - 16^{y+1} = 0$

$8^{2y+4} = 16^{y+1}$

$2^{3(2y+4)} = 2^{4(y+1)}$

$6y + 12 = 4y + 4$

$6y - 4y = 4 - 12$

$2y = -8$

$y = -4$

(6) $\left(\frac{2}{3}\right)^{5x+1} = \left(\frac{27}{8}\right)^{x-4}$

$\left(\frac{2}{3}\right)^{5x+1} = \left(\frac{3}{2}\right)^{3(x-4)}$

$\left(\frac{2}{3}\right)^{5x+1} = \left(\frac{2}{3}\right)^{-3(x-4)}$

$5x + 1 = -3(x-4)$

$5x + 1 = -3x + 12$

$8x = 12 - 1$

$8x = 11$

$x = \frac{11}{8}$

(7) $\left(\frac{1}{5}\right)^{x-5} = 25^{3x+2}$

$5^{-(x-5)} = 5^{2(3x+2)}$

$-(x-5) = 6x + 4$

$-x + 5 = 6x + 4$

$5 - 4 = 6x + x$

$1 = 7x$

$x = \frac{1}{7}$

(8) $\left(\frac{25}{9}\right)^{k-2} + 9 = 10$

$\left(\frac{5}{3}\right)^{2(k-2)} = 10 - 9$

$= 1$

$\frac{5}{3}^{2(k-2)} = \left(\frac{5}{3}\right)^0$

$2k - 4 = 0$

$2k = 4$

$k = 2$

Manahl.com 2025 2024

نشاط (10) : مسائل لفظية على الدوال و المعادلات الأسية

الأهداف :
1- بيان دالتي النمو و الإضمحلال الأسي ، 2- تطبيق دالتي النمو و الإضمحلال الأسي في حل مسائل حياتية .
3- كتابة دالة أسية بمعلومية نقطتين و حل مسائل عليها ، 4- التعرف على قانون الربح المركب و حل مسائل عليه

* دالة النمو الأسي :

تستخدم إذا كانت هناك تزايد بنسبة مئوية ثابتة في فترات زمنية محددة .

$$A(t) = a(1+r)^t$$

حيث :
القيمة الإبتدائية : a ، النسبة المئوية للنمو : r
الزمن : t ، معادلة أو دالة النمو الأسي : $A(t)$

تدريبات :

أولا : يتكاثر نحل في خلية بمعدل **30%** كل أسبوع ، فإذا كان عدد النحل بالبداية **65** نحلة فأوجد :

1- أوجد معادلة أسية تمثل عدد النحل بعد **t** أسبوع .

$r = \frac{30}{100} = 0.3$, $a = 65$

$A(t) = 65(1+0.3)^t$

$= 65(1.3)^t$

2- قدر عدد النحل بعد **10** أسابيع .

$65(1.3)^{10}$

≈ 896

ثانيا : يستلم أحمد راتباً في الشهر الأول و قدره **BD420** ، فإذا كان راتبه يزيد بمعدل **5%** شهرياً

1- إكتب معادلة أسية تمثل راتب أحمد بعد **t** شهر .

$a = 420$, $r = \frac{5}{100} = 0.05$

$A(t) = 420(1+0.05)^t$

$= 420(1.05)^t$

2- إحسب –لأقرب دينار– راتب أحمد بعد **سنة و نصف**

$\frac{12}{6} = 18$ شهر

$= 420(1.05)^{18}$

$= 1010.7$

* دالة الإضمحلال الأسي :

تستخدم إذا كان هناك تناقص بنسبة مئوية ثابتة في فترات زمنية محددة .

$$A(t) = a(1-r)^t$$

تدريبات :

ثالثا : يتناقص سعر سيارة بمعدل **15%** سنوياً ، فإذا كان سعرها الأصلي - من الوكالة - **BD8000**

1- أوجد معادلة أسية تمثل السعر المتبقي من السيارة بعد بعد **t** سنة من شرائها .

$a = 8000$, $r = \frac{15}{100} = 0.15$

$A(t) = 8000(1-0.15)^t$

$= 8000(0.85)^t$

2- قدر سعر السيارة بعد **20** سنة من شرائها .

$8000(0.85)^{20}$

≈ 310

اضمحلال

رابعا : تناقص عدد الحضور لمباريات نادي ميلان بمعدل **5%** لكل مباراة بعد خسارته أمام غريمه الإنتر . إذا كان عدد الحضور بهذه المباراة يقدر بـ **40000** متفرج ، قدر عدد الحضور بعد عشر مباريات .

$r = \frac{5}{100} = 0.05$

$a = 40000$

$t = 10$

$\Rightarrow A(10) = 40000(1-0.05)^{10}$

$= 23949.4$

≈ 23949

* كتابة دالة أسية بإستخدام نقطتين وتطبيقاتها :

يمكن كتابة عدد لا نهائي من الدوال الأسية لأي زوج من النقاط يمر بمنحنى الدالة و للتسهيل نفرض أن الدالة هي

$$y = ab^x$$

تدريبات :

خامسا : إكتب دالة اسية للتمثيل البياني المار بالنقطتين :

$$(\underset{x}{4}, \underset{y}{81}), (\underset{a}{0}, 256)$$

[1] ايجاد b

$y = ab^x$, $a = 4$

$81 = 256\,b^4$

$\frac{81}{256} = \frac{256}{256} b^4$

$\sqrt[4]{b^4} = \sqrt[4]{\frac{81}{256}} \Rightarrow b = \frac{3}{4}$

[2] كتابة المعادلة

$y = 256\left(\frac{3}{4}\right)^x$

سادسا : بدئت تجربة مخبرية بـ **6000** خلية بكتيرية ، و بعد ساعتين أصبح عددها **28000** خلية .

1- إكتب دالة أسية يمكن إستخدامها لتمثيل عدد الخلايا البكتيرية بعد **x** ساعة .

$(\underset{a}{0}, 6000), (\underset{x}{2}, \underset{y}{28000})$

[1] ايجاد b

$y = ab^x$

$28000 = 6000\,b^2$

$\frac{28000}{6000} = b^2$

$b = \sqrt{\frac{28000}{6000}} = \frac{\sqrt{42}}{3}$

[2] كتابة المعادلة

$y = 6000\left(\frac{\sqrt{42}}{3}\right)^x$

2- ما العدد المتوقع للخلايا البكتيرية بعد **4** ساعات .

$y = 6000\left(\frac{\sqrt{42}}{3}\right)^4$

≈ 136962

* الربح المركب :

المبلغ الكلي

$$A = P\left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt}$$

المبلغ الأصلي

حيث :

عدد السنوات : t ، معدل الربح السنوي : r

عدد مرات إحتساب الربح في السنة : n

تدريبات :

سابعا : إستثمر حسين مبلغ **BD700** بربح مركب شهريا بمعدل **4.3%** سنويا . كم سيكون المبلغ الكلي بعد **سبع** سنوات إلى أقرب منزلتين عشريتين .

$4.3\% = r$, $12 = n$ شهريا , $P = 700$, $t = 7$

$\Rightarrow A = P\left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt}$

$= 700\left(1 + \frac{4.3\%}{12}\right)^{12 \times 7}$

$A = 945.337$

≈ 945.34

ثامنا : إستثمر علي مبلغ **BD100** بربح مركب مرتين شهريا بمعدل **1.2%** سنويا . كم سيكون المبلغ الكلي بعد **عشرين** سنة إلى أقرب دينار .

$t = 20$, $r = 1.2\%$, $n = 24$, $P = 100$

$\Rightarrow A = P\left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt}$

$= 100\left(1 + \frac{1.2\%}{24}\right)^{24 \times 20}$

$= 127.1$

≈ 127 دينار

تدريبات متنوعة : دالة عواسي

أولا : إنتشر فيروس في شبكة حاسوبية بمعدل 20% من أجهزة الشبكة كل دقيقة . إذا علمت أن الفيروس دخل إلى جهاز واحد بالبداية فإكتب دالة أسية تمثل إنتشار الفيروس منذ البداية ، ثم قدر عدد الأجهزة التي دخلها الفيروس بعد نصف ساعة .

$A(t) = a(1+r)^t$

$r = 0.2$, $a = 1$, $t = 30$

$A(t) = 1(1+0.2)^t$

$\boxed{A(t) = (1.2)^t}$

$A(30) = (1.2)^{30}$

$= 237.3$

≈ 237 .

ثانيا : ورث خالد مبلغ **BD1000** عام 2003 و إستثمره في مشروع تجاري ، و قدر أن المبلغ المستثمر سيصبح **BD16960** بحلول عام **2015** .

$2015 - 2003 = 12$

1) إكتب دالة أسية تمثل المبلغ y بدلالة عدد السنوات x منذ عام **2003** .

$(0, 1000)$, $(12, 16960)$

$y = ab^x$

$16960 = (1000)b^{12}$

$\sqrt[12]{\frac{16960}{1000}} = \sqrt[12]{b^{12}}$

$b = 1.266$

$\Rightarrow y = ab^x$

$y = 1000(1.266)^x$

2) إفرض أن المبلغ إستمر في الزيادة بالمعدل نفسه ، فكم سيصبح عام **2025** إلى أقرب دينار .

$2025 - 2003$

$x = 22$

$y = 1000(1.266)^{22}$

$= 179283.9$

$\approx \boxed{179284}$

للمتميزين :

ثالثا : إكتب دالة اسية للتمثيل البياني المار بالنقطتين :

$(2, 96)$, $(5, 6144)$

أولاً : نعوض بالزوجين المرتبين في المعادلة

x_1 y_1 x_2 y_2 مجهولين a, b

$y = ab^x$

$96 = ab^2$

$\boxed{a = \frac{96}{b^2}} \rightarrow ①$

$y = ab^x$

$6144 = ab^5 \rightarrow ②$

ثانياً : بالتعويض عن قيمة a في ②

$6144 = ab^5$

$6144 = \frac{96}{b^2} \cdot b^5$

$6144 = 96b^3$

$\frac{6144}{96} = b^3$

$\boxed{b = 4}$

ثالثاً : نعوض عن b في ①

$a = \frac{96}{4^2} = 6$

$\Rightarrow$ المعادلة الأسية

$\boxed{y = 6(4)^x}$

رابعا : إستثمر عيسى مبلغا من المال في مشروع تجاري مركب سنوي بمعدل 5% ، فإذا تمت إضافة الأرباح إلى رأس المال كل ست أشهر .

لأقرب دينار إحسب قيمة المبلغ الأصلي – لأقرب دينار – الذي يجب عليه إستثماره حتى يحقق مبلغا مقداره **BD20000** بعد عشر سنوات .

$A = P\left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt}$

$20000 = P\left(1 + \frac{0.05}{2}\right)^{2 \times 10}$

$20000 = P(1.6386)$

$P = \frac{20000}{1.6386}$

$P = 12205.5$

≈ 12205 .

نشاط (11) : اللوغاريتمات و الدوال اللوغاريتمية

الأهداف :
1- بيان العلاقة بين الدالة اللوغاريتمية و الأسية ، 2- التحويل من الصورة الأسية إلى اللوغاريتمية و العكس .
3- تمثيل الدوال اللوغاريتمية الأم بيانيا ، 4- دراسة تحويلات التمثيلات البيانية للدالة اللوغاريتمية .

*** تمهيد : الدالة اللوغاريتمية و علاقتها بالدالة الأسية :** أنظر الكتاب صفحة 80

*** كيف نقرأ اللوغاريتم :**

$\log_5 25 = 2$ **يقرأ :** لوغاريتم العدد 25 للأساس 5 يساوي 2

*** الصورة الأسية و الصورة اللوغاريتمية :**

اللوغاريتمية	الأسية
$\log_b x = y$	$\Leftrightarrow \quad b^y = x$

و تذكر أن : b, x عددان حقيقيان موجبان **حيث** $b \neq 1$ ، y عدد حقيقي

***تذكر أن :**
1) $a^0 = 1$
2) $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$

*** تمارين (1) :** حول من الصورة الأسية إلى الصورة اللوغارتمية و بالعكس :

الأسية	اللوغاريتمية		اللوغاريتمية	الأسية
	$\log_9 1 = 0$	⟹	$\log_3 729 = 6$	
$6)\ 8^{-1} = \frac{1}{8}$		⟸		$2)\ 4^3 = 64$
	$\log_3 \frac{1}{27} = -3$	⟹	$\log_{125} 5 = \frac{1}{3}$	
$8)\ y^{-3} = 125$		⟸		$4)\ 6^{-3} = \frac{1}{216}$

*** تمارين (2) :** أوجد قيمة كل لوغاريتم فيما يلي :

1) $\log_3 243$

$y = \log_3 243$

$3^y = 243$

$3^y = 3^5$

الأساس متساوي

الأسس متساوية

$y = 5$

3	243
3	81
3	27
3	9
3	3
	1

2) $\log_{32} 2$

$y = \log_{32} 2$

$32^y = 2$

$(2^5)^y = 2^1$

$5y = 1$

$y = \frac{1}{5}$

3) $\log_4 \frac{1}{64}$

$y = \log_4 \frac{1}{64}$

$4^y = \frac{1}{4^3}$

$4^y = 4^{-3}$

الأساس متساوي
الاس متساوية

$y = -3$

4) $\log_{\frac{1}{6}} 216$

$y = \log_{\frac{1}{6}} 216$

$\left(\frac{1}{6}\right)^y = 216$

$\left(\frac{1}{6}\right)^y = 6^3$

$\left(\frac{1}{6}\right)^y = \left(\frac{1}{6}\right)^{-3}$

الأساس متساوي
الاس متساوية

$y = -3$

5) $\log_7 1$

$y = \log_7 1$

$7^y = 1$

$7^y = 7^0$

الأساس متساوي
الاس متساوية

$y = 0$

6) $\log_{\frac{2}{3}} 1$

$y = \log_{\frac{2}{3}} 1$

$\left(\frac{2}{3}\right)^y = 1$

$\left(\frac{2}{3}\right)^y = \left(\frac{2}{3}\right)^0$

الأساس متساوي
الاس متساوية

$y = 0$

*** تمثيل الدوال اللوغاريتمية بيانيا :** سندرس فقط تمثيل الدوال اللوغاريتمية الأم على الصورة $f(x) = \log_b x$

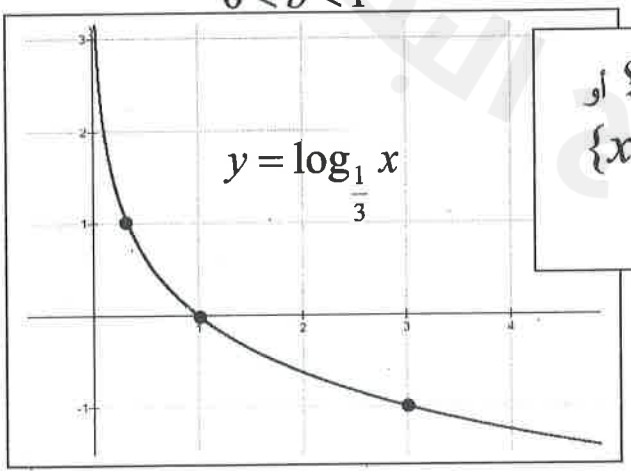
لو كتبنا الدالة على الصورة $y = \log_b x$ فإن $x = b^y$.

نختار قيم لـ y و لتسهيل التعويض فلتكن كالتالي :

1 , 0 , -1 و بالتعويض نوجد قيم **x** و ستلاحظ أن النقاط ستكون على النحو التالي :

$(\frac{1}{b}, -1)$ مقلوب الأساس ، $(1,0)$ ، $(b,1)$ و تذكر وأنت توصل النقاط بأن محور الصادات هو محور التقارب لهذه الدالة ؛ أي أن منحنى الدالة لا يقطع محور الصادات ولا يمسه إطلاقا وإنما يقترب اقترابا ، فمثلا :

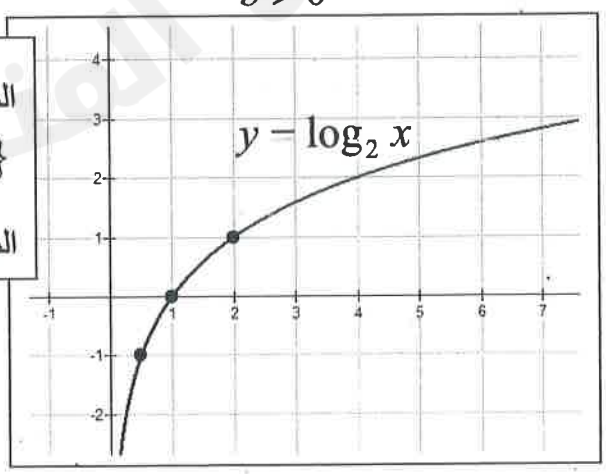
$0 < b < 1$



المجال : $\mathbb{R}^+$ أو $\{x \mid x > 0\}$

المدى : $\mathbb{R}$

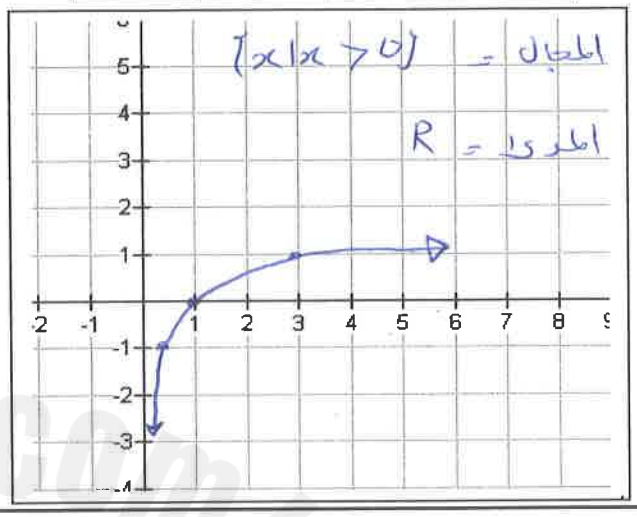
$b > 0$



*** تمارين (3) :** مثل الدوال اللوغاريتمية التالية بيانيا :

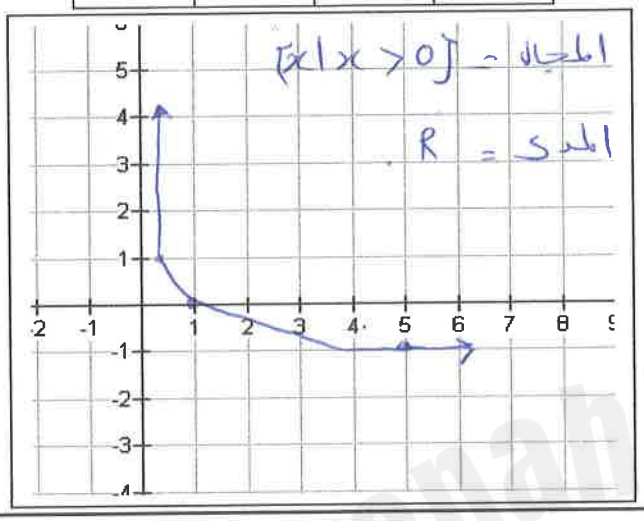
1) $f(x) = \log_3 x$

x	$\frac{1}{3}=0.3$	1	3
y	-1	0	1



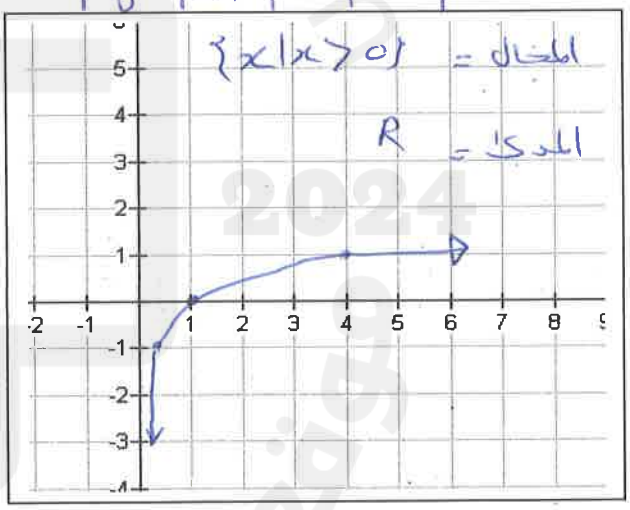
2) $g(x) = \log_{\frac{1}{5}} x$

x	5	1	$\frac{1}{5}=0.2$
y	-1	0	1



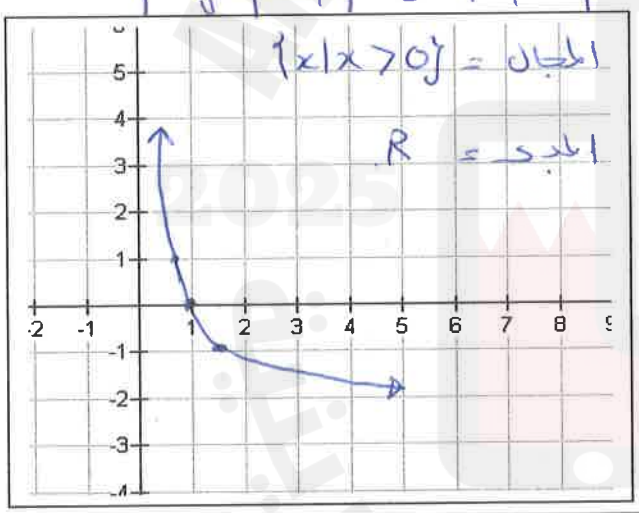
3) $h(x) = \log_4 x$

x	$\frac{1}{4}=0.25$	1	4
y	-1	0	1



4) $k(x) = \log_{\frac{2}{3}} x$

x	$\frac{3}{2}=1.5$	1	$\frac{2}{3}=0.6$
y	-1	0	1



*** تحويلات التمثيلات البيانية للدوال اللوغاريتمية :**

$$f(x) = a\log_b(x-h)+k$$

دلالة a , h , k هي نفسها التي تعلمناها في الدالة الأسية و يمكنك الإطلاع عليها بالتفصيل :

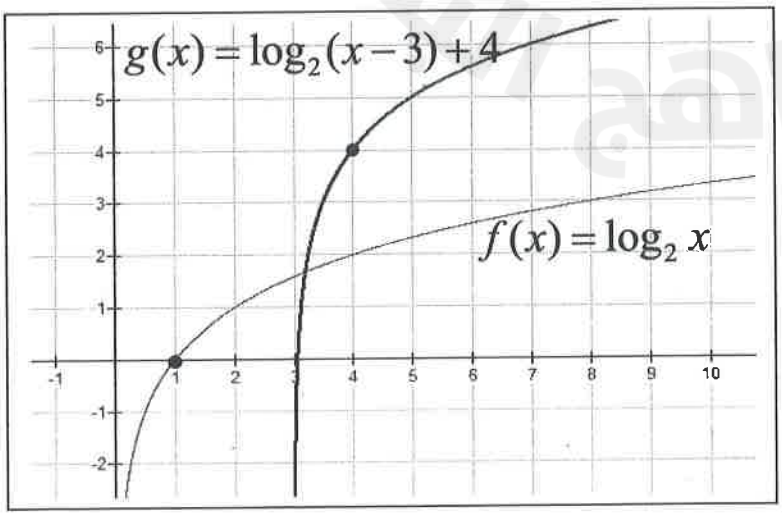
صفـ 82 + 83 ــحة

مجال الدالة اللوغاريتمية :

قيم x التي تجعل ما داخل اللوغاريتم ≥ 0

المجال : $\{x : x > h\}$

مداها : $\mathbb{R}$



*** تمارين (4)** : أوجد مجال ومدى كل دالة لوغاريتمية فيما يلي مبينا الإزاحات الأفقية و الرأسية - إن وجدت - مقارنة مع الدالة الأم و هل يضيق أم يتسع منحناها :

1) $f(x) = 5\log_3(x-4) + 7$

1- الدالة هي تحويل للتمثيل البياني للدالة : $g(x) = \log_3 x$

2- الإزاحات الأفقية و الرأسية :

$h = 4$ ⇐ إزاحة 4 وحدات لليمين

$k = 7$ ⇐ إزاحة 7 وحدات للأعلى

3- المجال : $\{x \mid x > 4\}$

4- المدى : R

5- الضيق و الإتساع :

$a = 5$ ⇐ المنحنى يتسع رأسياً

2) $g(x) = \frac{2}{3}\log_3(x+1) - 2$

1- الدالة هي تحويل للتمثيل البياني للدالة : $f(x) = \log_3 x$

2- الإزاحات الأفقية و الرأسية :

$h = -1$ ⇐ إزاحة وحدة واحدة لليسار

$k = -2$ ⇐ إزاحة وحدتين لأسفل

3- المجال : $\{x \mid x > -1\}$

4- المدى : R

5- الضيق و الإتساع :

$a = \frac{2}{3}$ ⇐ المنحنى يضيق رأسياً

3) $h(x) = 2 - \log_{\frac{1}{3}}(x+5)$

1- الدالة هي تحويل للتمثيل البياني للدالة : $f(x) = \log_{\frac{1}{3}} x$

2- الإزاحات الأفقية و الرأسية :

$h = -5$ ⇐ إزاحة 5 وحدات لليسار

$k = 2$ ⇐ إزاحة 2 وحدة للأعلى

3- المجال : $\{x \mid x > -5\}$

4- المدى : R

5- الضيق و الإتساع :

$a = -1$ ⇐ المنحنى ـــــ رأسياً

4) $k(x) = \frac{1}{2}\log_3(x-7)$

1- الدالة هي تحويل للتمثيل البياني للدالة : $f(x) = \log_3 x$

2- الإزاحات الأفقية و الرأسية :

$h = 7$ ⇐ إزاحة 7 وحدات لليمين

$k = 0$ ⇐ لا يوجد إزاحة رأسية

3- المجال : $\{x \mid x > 7\}$

4- المدى : R

5- الضيق و الإتساع :

$a = \frac{1}{2}$ ⇐ المنحنى يضيق رأسياً

*** تمارين (5)** : أوجد معادلة لوغاريتمية لمعكوس الدالة :

1) $y = 5^{x-3}$

$x = 5^{y-3}$

$\log_5 x = y - 3$

$y = \log_5 x + 3$

2) $y = 0.5^x$

$x = 0.5^y$

$\log_{0.5} x = y$

3) $y = 10^{2x-5}$

$x = 10^{2y-5}$

$\log_{10} x = 2y - 5$

$\log_{10} x + 5 = 2y$

$y = \frac{\log_{10} x + 5}{2}$

نشاط (12) : المعادلات اللوغاريتمية

الأهداف :
1- حل معادلات لوغاريتمية عن طريق العلاقة بين الأسس و اللوغاريتمات .
2 - حل معادلات لوغاريتمية بإستخدام قاعدة المساواة بين اللوغاريتمات .

*** تذكر : العلاقة الأساسية بين الأسس و اللوغاريتمات :**

$$\log_b x = y \Leftrightarrow b^y = x$$

*** تمارين (1) :** حل المعادلات اللوغاريتمية التالية :

1) $\log_9 x = \frac{3}{2}$

الحل : $x = 27$

$9^{\frac{3}{2}} = x$

$(3^2)^{\frac{3}{2}} = x$

$27 = x$

2) $\log_6 \frac{1}{36} = x$

الحل : $x = -2$

$6^x = \frac{1}{36}$

$6^x = 6^{-2}$

$x = -2$

3) $\log_x 32 = \frac{5}{2}$

الحل : $x = 4$

$(x^{\frac{5}{2}})^{\frac{2}{5}} = (32)^{\frac{2}{5}}$

$= (2^5)^{\frac{2}{5}}$

$= 2^2$

$x = 4$

4) $\log_{16} x = \frac{3}{4}$

الحل : $x = 8$

$16^{\frac{3}{4}} = x$

$(2^4)^{\frac{3}{4}} = x$

$2^3 = x$

$x = 8$

5) $\log_{\frac{1}{8}} 2 = x$

الحل : $x = -\frac{1}{3}$

$\frac{1}{8}^x = 2$

$2^{-3x} = 2^1$

$-3x = 1$

$x = -\frac{1}{3}$

6) $\log_x 27 = \frac{3}{2}$

الحل : $x = 9$

$x^{\frac{3}{2}} = 27$

$x = (3^3)^{\frac{2}{3}}$

$= 3^2$

$x = 9$

7)* $\log_{x+7} 32 = \frac{5}{2}$

الحل : $x = -3$

$(x+7)^{\frac{5}{2}} = 32$

$x + 7 = (2^5)^{\frac{2}{5}}$

$x + 7 = 4$

$x = 4 - 7$

$x = -3$

*** قاعدة : خاصية المساواة للدوال اللوغاريتمية :**

$$\log_b x = \log_b y \Leftrightarrow x = y$$

ملاحظة :

عند حل المعادلات اللوغاريتمية يجب التعويض بالحلول **بما داخل اللوغاريتم** فإذا كان الناتج **غير موجب** يجب إستبعاد هذا الحل من مجموعة الحل .

*** تمارين (2) : حل المعادلات اللوغاريتمية التالية :**

1) $\log_5(2x^2-3) = \log_5(x^2+6)$

الحل : $x = \pm 3$

$2x^2 - 3 = x^2 + 6$

$2x^2 - x^2 = 6 + 3$

$x^2 = 9$

$x = \pm 3$

$x = 3$

$\log_5(2(3)^2-3) \stackrel{?}{=} \log_5(3^2+6)$

$\log_5 15 = \log_5 15$ ✓

$x = -3$ التحقق

$\log_5(2(-3)^2-3) \stackrel{?}{=} \log_5((-3)^2+6)$

$\log_5 15 = \log_5 15$

2) $\log_3(12+2x-x^2) - \log_3(2x^2+2x) = 0$

الحل : $x = \pm 2$

$12 + 2x - x^2 = 2x^2 + 2x$

$2x^2 + 2x - 12 - 2x + x^2 = 0$

$3x^2 - 12 = 0$

$3x^2 = 12$

$x^2 = 4$

$x = \pm 2$

$x=2$ التحقق

$\log_3(12+2(2)-2^2) - \log_3(2(2)^2+2(2)) = 0$

$\log_3(12+2(-2)-(-2)^2) - \log_3(2(-2)^2+2(-2)) = 0$

$0 = 0$ ✓

3) $\log_5(10x-7) = \log_5(2x^2+1)$

الحل : $x = 1, x = 4$

$10x - 7 = 2x^2 + 1$

$2x^2 + 1 - 10x + 7 = 0$

$2x^2 - 10x + 8 = 0$

$(x-4)(x-1) = 0$

$x_1 = 4$, $x = 1$

$x = 4$

$\log_5(10(4)-7) \stackrel{?}{=} \log_5(2(4)^2+1)$

$\log_5 33 = \log_5 33$ ✓

$x = 1$ التحقق

$\log_5(10(1)-7) \stackrel{?}{=} \log_5(2(1)^2+1)$

$\log_5 3 = \log_5 3$

4) $\log_9(x^2-4x) - \log_9(3x-10) = 0$

الحل : $x = 5$ ، $x = 2$ مرفوض

$\log_9(x^2-4x) = \log_9(3x-10)$

$x^2 - 4x = 3x - 10$

$x^2 - 4x - 3x + 10 = 0$

$x^2 - 7x + 10 = 0$

$(x-5)(x-2) = 0$

$x = 5$, $x = 2$

$x = 5$

$\log_9(5^2-4(5)) = \log_9 5$

$\log_9(3(5)-10) = \log_9 5$

$\log_9 5 - \log_9 5 = 0$ ✓

$x = 2$ التحقق

$\log_9(2^2-4(2)) = \log_9(-4)$ ✗

لأن العبارة داخل اللوغاريتم موجب

$x = 2$ مرفوض

نشاط (13) : خواص اللوغاريتمات

الأهداف :
1- التعريف بخواص اللوغاريتمات ، 2- إيجاد قيمة لوغاريتمات بإستخدام الخواص
3- إستخدام الخواص في حل معادلات لوغاريتمية ، 4- حل مسائل لفظية على اللوغاريتمات

*** تذكر : العلاقة الأساسية بين الأسس و اللوغاريتمات :**

$$\log_b x = y \Leftrightarrow b^y = x$$

*** خواص اللوغاريتمات :**

خاصيتي الضرب و القسمة | خاصية لوغاريتم القوة | خاصيتي المعكوس للأسس و اللوغاريتمات

1) $\log_b xy = \log_b x + \log_b y$

2) $\log_b \frac{x}{y} = \log_b x - \log_b y$

3) $\log_b x^n = n \log_b x$

4) $\log_b b^x = x$

5) $b^{\log_b x} = x$

*** ملاحظات :**

1) الخواص السابقة صحيحة بشرط أن يكون ما داخل اللوغاريتم موجبا و الأساس **b** أيضا موجب و لا يساوي **1**

2) $\log_b 1 = 0$ و من خاصية 5 نستنتج أن : $\log_b b = 1$

3) **تجنب بعض الأخطاء الشائعة في خواص اللوغاريتمات و التعامل معها فمثلا :**

$\log_b(x+y) \neq \log_b x + \log_b y$ و كذلك $\log_b(x-y) \neq \log_b x - \log_b y$

أنظر تمارين (3) صفحة بالمذكرة و حاول إكتشاف الأخطاء بنفسك

*** تمارين (1A) :** إذا علمت أن :

$\log_4 2 \approx 0.5$, $\log_4 3 \approx 0.7925$, $\log_4 5 \approx 1.1610$ فاوجد قيمة كل مما يلي :

1) $\log_4 30$

الحل : 2.4535

$\log_4(6 \times 5)$

$= \log_4 6 + \log_4 5$

$= \log_4(3 \times 2) + \log_4 5$

$= \log_4 3 + \log_4 2 + \log_4 5$

$= 0.7925 + 0.5 + 1.1610$

$\approx$ 2.4535

2) $\log_4 72$

الحل : 3.085

$\log_4(2^3 \times 3^2)$

$= \log_4 2^3 + \log_4 3^2$

$= 3\log_4 2 + 2\log_4 3$

$= 3(0.5) + 2(0.7925)$

$\approx$ 3.085

2	72
2	36
2	18
3	9
3	3
	1

$72 = 2^3 \times 3^2$

يتبع للسال السابق : $\log_4 2 \approx 0.5$, $\log_4 3 \approx 0.7925$, $\log_4 5 \approx 1.1610$

3) $\log_4 \frac{5}{3}$ — الحل : 0.3685

$= \log_4 5 - \log_4 3$

$= 1.1610 - 0.7925$

$\approx \boxed{0.3685}$

4) $\log_4 \frac{27}{4}$ — الحل : 1.3775

$\log_4 3^3 - \log_4 2^2$

$3\log_4 3 - 2\log_4 2$

$3(0.7925) - 2(0.5)$

$\approx \boxed{1.3775}$

5) $\log_4 125$ — الحل : 3.483

$\log_4 5^3$

$= 3\log_4 5$

$= 3(1.1610)$

$\approx \boxed{3.483}$

6) $\log_4 2.5$ — الحل : 0.661

$\log_4 \frac{5}{2}$

$= \log_4 5 - \log_4 2$

$= 1.1610 - 0.5$

$= \boxed{0.661}$

---

* تمارين (1B) : إذا علمت أن : $\log_6 8 = 1.1606$, $\log_6 9 = 1.1292$ فأوجد قيمة كل مما يلي :

1) $\log_6 48$ — الحل : 2.1606

$= \log_6 8 \times 6$

$= \log_6 8 + \log_6 6$

$= 1.1606 + 1$

$= \boxed{2.1606}$

2) $\log_6 512$ — الحل : 3.4818

$\log_6 8^3$

$3\log_6 8$

$3(1.1606)$

$\approx \boxed{3.4818}$

3) $\log_6 \frac{81}{36}$ — الحل : 0.2584

$= \log_6 \frac{9^2}{6^2}$

$= \log_6 9^2 - \log_6 6^2$

$= 2\log_6 9 - 2\log_6 6$

$= 2(1.1292) - 2(1)$

$\approx \boxed{0.2584}$

4) $\log_6 3$ — الحل : 0.5646

$\log_6 3 = \log_6 \frac{9}{3}$

$\log_6 3 = \log_6 9 - \log_6 3$

$\log_6 3 + \log_6 3 = \log_6 9$

$2\log_6 3 = \log_6 9$

$\log_6 3 = \frac{\log_6 9}{2} = \boxed{0.5646}$

*** تمارين (2) :** حل المعادلات اللوغاريتمية التالية :

1) $\log_4(2a) + \log_4 5 = 2\log_4 10$

الحل : $a = 10$

$\log(2a \times 5) = \log_4 10^2$

$2a \times 5 = 10^2$

$10a = 10^2$

$\boxed{a = 10}$

* التحقق صحيح .

2) $2\log_7 x = \log_7 27 + \log_7 3$

الحل : $x = 9$ ، $x = -9$ مرفوض

$\log_7 x^2 = \log_7 (27 \times 3)$

$x^2 = 27 \times 3$

$x^2 = 81 \Rightarrow x = \pm 9$

التحقق : $x = 9$ صحيح .

$2\log_7 -9$ مرفوض $\times$ $\Leftarrow \boxed{x = -9}$

3) $\log_3 56 - \log_3(y+1) = \frac{1}{2}\log_3 49$

الحل : $y = 7$

$\log_3 \frac{56}{y+1} = \log_3 49^{1/2}$

$\frac{56}{y+1} = 49^{1/2} \Rightarrow$

$\frac{56}{y+1} = 7 \Rightarrow y+1 = \frac{56}{7}$

$y + 1 = 8$

$\boxed{y = 7}$

* التحقق صحيح .

4) $3\log_{10} 8 - \frac{1}{2}\log_{10} 36 = \log_{10} x$

الحل : $y = \frac{256}{3}$

$\log_{10} \frac{8^3}{36^{1/2}} = \log_{10} x$

$x = \frac{8^3}{36^{1/2}} = \frac{512}{6}$

$\boxed{x = \frac{256}{3}}$

* التحقق صحيح .

5) $\log_2(a-7) - \log_5 125 = -\log_2 a$

الحل : $x = 8$ ، $x = -1$ مرفوض

$\log_2 \frac{a-7}{125} = \log_2 a^{-1}$

$\frac{a-7}{125} = a^{-1}$

$\frac{a-7}{125} = \frac{1}{a} \Rightarrow a(a-7) = 125$

$a^2 - 7a - 125 = 0$

$(\quad)(\quad) = 0$

6) $\log_2(15b-15) - \log_2(-b^2+1) = 2\log_2\sqrt{3}$

الحل : $b = \frac{-17}{2}$ ، $b = 1$ الحلان مرفوضان

$\log_2 \frac{15b-15}{-b^2+1} = \log_2 \sqrt{3}^2$

$\Rightarrow \frac{15b-15}{-b^2+1} = 3$

$15b - 15 = 3(-b^2+1)$

$15b - 15 = -3b^2 + 3$

$3b^2 + 15b - 15 - 3 = 0$

$3b^2 + 15b - 18 = 0$

$(x-1)(x+6) = 0$

$x = 1$ ، $x = -6$

الحلان مرفوضان بالتحقق

*** تمارين (3)** : حدد صحة العبارات التالية من عدمها مع تصحيح الخاطيء منها :

1) $\log_8(x-3) = \log_8 x - \log_8 3$

خطأ

$\log_8(x-3) \neq \log_8 x - \log_8 3$

2) $\log_5 22x = \log_5 22 + \log_5 x$

صح

3) $\log_{10} 19k = 19 \log_{10} k$

خطأ والتصحيح هو

$\log_{10} 19k = \log_{10} 19 + \log_{10} k$

4) $\log_2 y^5 = 5 \log_2 y$

صح

5) $\log_7 \frac{x}{3} = \log_7 x - \log_7 3$

صح

6) $\log_4(z+2) = \log_4 z + \log_4 2$

خطأ

$\log_4(z+2) \neq \log_4 z + \log_4 2$

7) $\log_8 p^4 = (\log_8 p)^4$

خطأ والتصحيح هو

$\log_8 p^4 = 4 \log_8 p$

8) $\log_9 \frac{x^2 y^3}{z^4} = 2\log_9 x + 3\log_9 y - 4\log_9 z$

صح

*** تمارين (4)** : يتناقص الضغط الجوي مع زيادة الإرتفاع ، و يعطى الضغط الجوي إعتمادا على الإرتفاع بالقانون

$a = 15500\ (5 - \log_{10} P)$ ، حيث a الإرتفاع بالأمتار ، P الضغط بالباسكال .

أوجد - لأقرب عدد صحيح - قيمة الضغط الجوي (بالباسكال) عند قمة جبل إيفرست التي إرتفاعها 8850 m .

الحل : $P = 26855$

$a = 15500(5 - \log_{10} P)$ ، $a = 8850$

$\frac{8850}{15500} = \frac{15500}{15500}(5 - \log_{10} P)$

$\frac{177}{310} = 5 - \log_{10} P$

$\log_{10} P = 5 - \frac{177}{310} \Rightarrow$

$\log_{10} P = \frac{1373}{310}$

$P = 10^{\frac{1373}{310}}$

$P = 26855.4$

$P \approx 26855$

نشاط (14) : اللوغاريتمات الإعتيادية

الأهداف :
1- تعريف اللوغاريتم الإعتيادي ، 2- إستخدام الآلة الحاسبة في إيجاد اللوغاريتمات
3- حل معادلات أسية عن طريق اللوغاريتمات ، 4- حل مسائل لفظية على اللوغاريتمات

*** ما هو اللوغاريتم الإعتيادي :**

هو لوغاريتم أساسه **10** و متعارف رياضيا عدم كتابة الأساس فيه حيث أن : $\log x = \log_{10} x$

*** تمارين (1) :** إستخدم الآلة الحاسبة لإيجاد قيمة كل مما يلي لأقرب جزء من عشرة آلاف :

1) $\log 3 \approx 0.4771$, 2) $\log 11 \approx 1.0414$, 3) $\log 3.2 \approx 0.5051$

4) $\log 8.2 \approx 0.9138$, 5) $\log 0.9 \approx -0.0458$, 6) $\log 0.04 \approx -1.3979$

*** قاعدة :**

قانون تغيير أساس اللوغاريتم ⇐ $\log_b x = \frac{\log_a x}{\log_a b}$

ملاحظة : لتسهيل إيجاد لوغاريتم أي عدد لأي أساس نختار الأساس **10** أي نضع **a = 10**.

*** تمارين (2) :** إكتب كل مما يلي في صورة لوغاريتم إعتيادي ، ثم أوجد قيمته لأقرب منزلتين عشريتين :

1) $\log_5 31$ — الحل : 2.13

$= \frac{\log 31}{\log 5}$

≈ 2.13

2) $\log_3 21$ — الحل : 2.77

$\frac{\log 21}{\log 3}$

$= 2.77$

3) $\log_7 \sqrt{5}$ — الحل : 0.41

$\frac{\log \sqrt{5}}{\log 7}$

≈ 0.41

*** تمارين (3) :** حل المعادلات التالية مقربا الناتج إلى أقرب جزء من عشرة آلاف :

1) $3^{5x} = 24$

الحل : $x \approx 0.5786$

$\log 3^{5x} = \log 24$

$5x \log 3 = \log 24$

$\frac{5x \log 3}{5 \log 3} = \frac{\log 24}{5 \log 3}$

$\Rightarrow x \approx 0.5786$

2) $6^x = 40$

الحل : $x \approx 2.0588$

$\log 6^x = \log 40$

$x \log 6 = \log 40$

$\frac{x \log 6}{\log 6} = \frac{\log 40}{\log 6}$

$\Rightarrow x = 2.0588$

3) $10^{x^2} = 60$

الحل : $x \approx \pm 1.3335$

$\log 10^{x^2} = \log 60$

$x^2 \log 10 = \log 60$

$\frac{x^2 \log 10}{\log 10} = \frac{\log 60}{\log 10}$

$\sqrt{x^2} = \pm\sqrt{\frac{\log 60}{\log 10}}$

$x = \pm 1.3335$

4) $8^{2x-4} - 4^{x+1} = 0$

الحل : $x \approx 3.5$

$8^{2x-4} = 4^{x+1}$

$(2x-4)\log 8 = (x+1)\log 4$

$2x\log 8 - 4\log 8 = x\log 4 + \log 4$

$2x\log 8 - x\log 4 = 4\log 8 + \log 4$

$x(2\log 8 - \log 4) = 4\log 8 + \log 4$

$x = \dfrac{4\log 8 + \log 4}{2\log 8 - \log 4}$

$x \approx \dfrac{7}{2}$

$x \approx 3.5$.

5) $11^{y-3} = 5^{y}$

الحل : $y \approx 9.1237$

$(y-3)\log 11 = y\log 5$

$y\log 11 - 3\log 11 = y\log 5$

$y\log 11 - y\log 5 = 3\log 11$

$y(\log 11 - \log 5) = 3\log 11$

$y = \dfrac{3\log 11}{\log 11 - \log 5}$

$y \approx 9.1237$

6) $2^{m} = \sqrt{3^{m-1}}$

الحل : $m \approx -3.8188$

$2^{m} = 3^{\frac{1}{2}(m-1)}$

$m\log 2 = \left(\frac{1}{2}m - \frac{1}{2}\right)\log 3$

$m\log 2 = \frac{1}{2}m\log 3 - \frac{1}{2}\log 3$

$m\log 2 - \frac{1}{2}m\log 3 = \frac{1}{2}\log 3$

$m\left(\log 2 - \frac{1}{2}\log 3\right) = \frac{1}{2}\log 3$

$m = \dfrac{-\frac{1}{2}\log 3}{\log 2 - \frac{1}{2}\log 3}$

$m \approx -3.8188$

*** تمارين (4) :**

ترتبط كمية الطاقة E مقاسة بوحدة الإيرج التي تطلقها الأرض عند الهزة الأرضية مع قوة الهزة على مقياس ريختر M بالمعادلة $\log E = 11.8 + 1.5M$.

إستعمل هذه المعادلة لإيجاد كمية الطاقة التي تطلقها الأرض عند هزة بقوة 8.5 درجات على مقياس ريختر .

الحل : 3.5×10^{24} إيرج

$M = 8.5$

$\log E = 11.8 + 1.5(8.5)$

$\log_{10} E = 24.55$

$\Rightarrow \begin{cases} 10^{24.55} = E \\ \Rightarrow E = 3.5 \times 10^{24} \end{cases}$

*** تمارين (5) :** إذا علمت أن : $\log 2 \approx 0.301$, $\log 5 \approx 0.699$ فاوجد قيمة كل مما يلي :

1) $\log_2 625$

الحل : 9.289

$= \dfrac{\log 625}{\log 2}$

$= \dfrac{\log 5^4}{\log 2}$

$\begin{cases} \dfrac{4\log 5}{\log 2} = \dfrac{4(0.699)}{0.301} \\ \approx 9.289. \end{cases}$

2) $\log_{\sqrt{5}} 2.5$

الحل : 1.139

$= \dfrac{\log 2.5}{\log \sqrt{5}}$

$= \dfrac{\log \frac{5}{2}}{\log 5^{\frac{1}{2}}}$

$\begin{cases} = \dfrac{\log 5 - \log 2}{\frac{1}{2}\log 5} \\ = \dfrac{0.699 - 0.301}{\frac{1}{2}(0.699)} \\ \approx 1.139 \end{cases}$

الملتقى الطلابي WWW.STUDENTS-BH