تم تحميل هذا الملف من موقع المناهج البحرينية

المناهج البحرينية
almanahj.com/bh

الملف سلسلة التفوق في الرياضيات مقرر ريض 262

روابط مواقع التواصل الاجتماعي بحسب الصف الثاني الثاني

روابط مواد الصف الثاني الثاني على تلغرام

التربية الاسلامية	اللغة العربية	اللغة الانجليزية	الرياضيات

المزيد من الملفات بحسب الصف الثاني الثاني والمادة رياضيات في الفصل الأول

1	الإجابة النموذجية لامتحان نهاية الفصّل الأوّل مقرر ريض 253
2	الإجابة النموذجية لامتحان نهاية الفصّل الأوّل مقرر ريض 253
3	نشاط مشاركة لمقرر ريض 253
4	نشاط مشاركة لمقرر ريض 253
5	اختبار الكتروني ريض

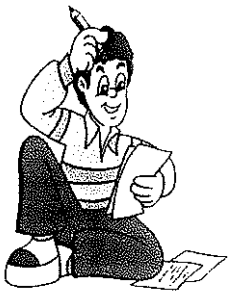
2 / ث
ف 2

سلسلة التفوق

2 / ث
ف 2

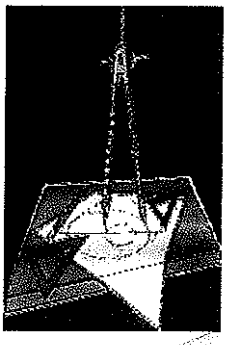
في الرياضيات

ريض 262

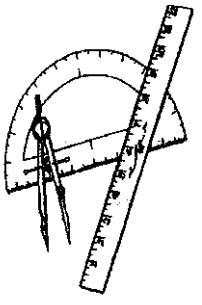


الوحدة الأولى

المتتابعات و المتسلسلات



إعداد : أ. عابدين حامد فؤاد



اسم الطـــالب : .....

ملحوظة : هذه المذكرة ليست بديلاً عن الكتاب المدرسي (الكتاب هو المرجع)

نسألكم الدعاء ، مع تمنياتي للجميع بالنجاح والتفوق

ريض 262

بطاقة (1) ريض 262

أ./ عابدين

❶ المتتابعات كدوال

المتتابعات الحسابية المتتابعة مجموعة من الأعداد مرتّبة في نمط معيّن أو ترتيب معيّن ويُسمّى كل عدد في المتتابعة **حدًّا**. ويمكن للمتتابعة أن تكون **منتهية** أي لها عدد محدّد من الحدود مثل $-2, 0, 2, 4, 6$، أو **غير منتهية** حيث تستمر إلى ما لانهاية مثل $0, 1, 2, 3, \ldots$. ويُرمز للحد الأول في المتتابعة بالرمز a_1، وللحد الثاني بالرمز a_2، وهكذا.

تحدد قيمة كل حد في **المتتابعة الحسابية**، بإضافة قيمة ثابتة إلى قيمة الحد الذي يسبقه مباشرة. وتُسمّى القيمة الثابتة **الفرق المشترك أو الأساس**. فالمتتابعة $3, 6, 9, 12, 15$ هي متتابعة حسابية؛ لأن لحدودها فرقًا مشتركًا (ثابتًا)، حيث يزيد كل حد عن الحد الذي يسبقه مباشرة بمقدار 3.

أساس المتتابعة الحسابية يساوي ميل الخط المستقيم المار بالنقاط المنفصلة التي تُمثّل المتتابعة الحسابي

$$3 \xrightarrow{+3} 6 \xrightarrow{+3} 9 \xrightarrow{+3} 12 \xrightarrow{+3} 15$$

بإضافة الأساس d نحصل على الحد التالي

المتتابعة الهندسية المتتابعة الهندسية نوع آخر من المتتابعات. يمكن الحصول على أي حد من حدود **المتتابعة الهندسية**، بضرب الحد السابق له مباشرة في عدد ثابت غير الصفر. ويسمّى هذا العدد **النسبة المشتركة أو الأساس** للمتتابعة.

لاحظ أن المتتابعة $\frac{1}{16}, \frac{1}{4}, 1, 4, 16$ متتابعة هندسية؛ لأن النسبة بين كل حد والحد السابق له مباشرة هي نسبة ثابتة، وكل حد في المتتابعة هو 4 أمثال الحد السابق له مباشرة.

المتتابعة الهندسية نقاط منفصلة تقع على منحنى دالة أسية

$$\frac{1}{16} \xrightarrow{\times 4} \frac{1}{4} \xrightarrow{\times 4} 1 \xrightarrow{\times 4} 4 \xrightarrow{\times 4} 16$$

بالضرب في الأساس r نحصل على الحد التالي

مفهوم أساسي — المتتابعات كدوال

أضف إلى مطويتك

التعبير اللفظي المتتابعة دالة مجالها يتكون من أعداد طبيعية، ومداها يتكون من أعداد حقيقية.

$x \to n$
$y \to a_n$
$m \to d$

بالرموز

المجال: $1 \quad 2 \quad 3 \quad \ldots \quad n$ ترتيب الحد

المدى: $a_1 \quad a_2 \quad a_3 \quad \cdots \quad a_n$ حدود المتتابعة

أمثلة	متتابعة منتهية	متتابعة غير منتهية
	$3, 6, 9, 12, 15$	$3, 6, 9, 12, 15, \ldots$
	المجال= {1, 2, 3, 4, 5}	المجال= {الأعداد الطبيعية جميعها}
	المدى= {3, 6, 9, 12, 15}	المدى= {y أحد مضاعفات 3 , $y \geq 3$ $\mid y$}

معادلة الخط المستقيم هي نفسها معادلة الحد النوني

في الحد النوني للمتتابعة الحسابية يكون معامل n هو أساس المتتابعة d

بطاقة (1) ريض 262

ريض 262

❶ المتتابعات كدوال (الحسابية)

$a_{n+1} - a_n = d$

بالطرح تحديد المتتابعات الحسابية : [قيمة أي حد ـ السابق له مباشرة = مقدار ثابت]

تدريب : حدد إذا كانت كل متتابعة مما يأتي متتابعة حسابية أو لا :

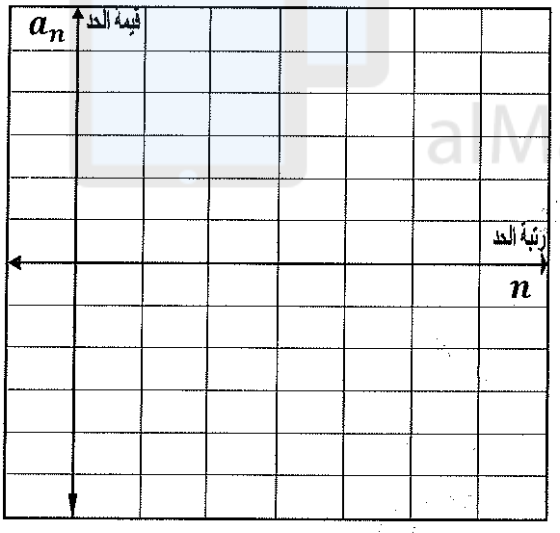
❶ $-4 , 12 , 28 , 42 , \ldots\ldots$

❷ $\frac{2}{9} , \frac{5}{9} , \frac{8}{9} , \frac{11}{9} , \ldots\ldots$

تمثيل المتتابعة الحسابية بيانياً (نقاط منفصلة تقع على استقامة واحدة) — دالة خطية (درجة أولى)

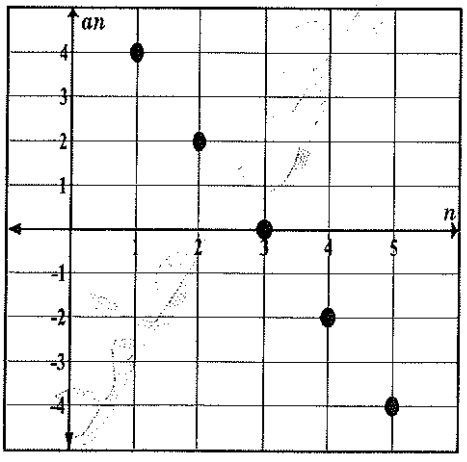
❸ المتتابعة : $-8 , -4 , 0 , \ldots\ldots$

متتابعة حسابية متزايدة فأجب عما يأتي :



- أوجد الحدود الثلاثة التالية :
- مجال المتتابعة :
- مدى المتتابعة :
- مثِّل الحدود الخمسة الأولى من المتتابعة بيانياً .

❹ بالأستعانة بالتمثيل البياني المجاور للخمسة حدود الأولى من متتابعة :



- نوع المتتابعة :
- الحد الأول هو :
- أساس المتتابعة (ميل المستقيم) :
- ما قيمة الحد السابع ؟

A -6 B -8 C -10

- أوجد معادلة الحد النوني باستعمال معادلة الخط المستقيم ؟

تم تحميل هذا الملف من موقع المنهج الجديد
aManahj.com/bh

ريض 262

تابع : بطاقة (1) ريض 262

$\frac{a_{n+1}}{a_n} = r$

❶ المتتابعات كدوال (الهندسية)

بالقسمة

تحديد المتتابعات الهندسية [قيمة أي حد ÷ السابق له مباشرة = مقدار ثابت]

تدريب : حدد إذا كانت كل متتابعة مما يأتي متتابعة هندسية أو لا :

❶ ..... , 54 , −18 , 6 , −2

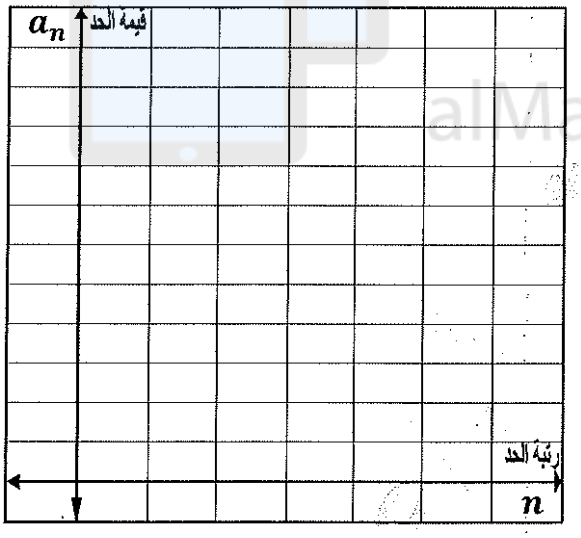
❷ ..... , 28 , 21 , 14 , 7

تم تحميل هذا الملف من
موقع المناهج البحرينية
almanahj.com/bh

تمثيل المتتابعة الهندسية بيانياً (نقاط منفصلة تقع على منحنى دالة أسية) : دالة أسية

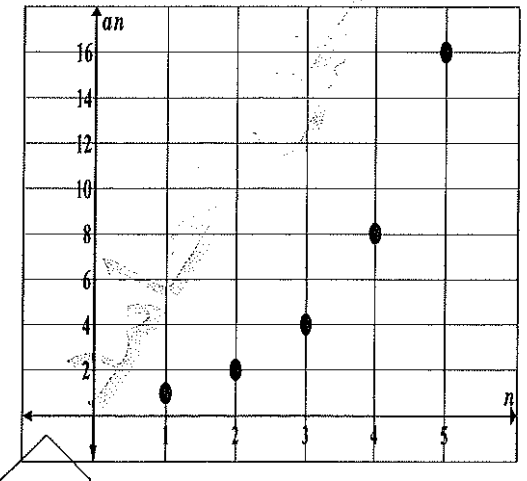
❸ المتتابعة : ..... , 3 , 9 , 27

متتابعة هندسية متناقصة فأجب عما يأتي :



- أوجد الحدود الثلاثة التالية :
- مجال المتتابعة :
- مدى المتتابعة :
- مثِّل الحدود الخمسة الأولى من المتتابعة بيانياً .

❹ بالأستعانة بالتمثيل البياني المجاور للخمسة حدود الأولى من متتابعة :



- نوع المتتابعة :
- الحد الثالث هو :
- أساس المتتابعة :
- ما قيمة الحد السابع ؟

A 10 C 16

B 32 D 64

❶ المتتابعات كدوال (التصنيف)

متتابعة فيبوناشي ⇐ ..... 1 , 1 , 2 , 3 , 5 , 8 , 13 , 21 ..... (أي حد بعد الثاني يساوي مجموع الحدين السابقين له)

تدريب : حدد هل المتتابعة حسابية ، أو هندسية ، أو غير ذلك ؟

❶ ..... , $\frac{8}{3}$, $\frac{7}{3}$, 2 , $\frac{5}{3}$

❷ ..... , 16 , 9 , 4 , 1

❸ ما نوع المتتابعة التي حدودها

..... , −0.2 , 0.6 , 1.4 , 2.2 ؟

A متتابعة حسابية أساسها −0.8

B متتابعة حسابية أساسها 0.8

C متتابعة هندسية أساسها −0.8

D متتابعة هندسية أساسها 0.8

❹ الأعداد أدناه متتابعة مشهورة في الرياضيات تسمى " متتابعة فيبوناشي "

1 , 1 , 2 , 3 , 5 , 8 , 13 , 21 , ...

ما الحد التالي في هذا المتتابعة ؟

أي حد بعد الحد الثاني يساوي مجموع الحدين السابقين له

A 29 B 31 C 34 D 36

❺ أيّ من المتتابعات لا تُمثّل متتابعة هندسية ؟

A ..... , 128 , −32 , 8 , −2

B ..... , 3 , 9 , 27 , 81

C ..... , $\frac{27}{32}$− , $\frac{9}{8}$, $\frac{3}{2}$− , 2

D ..... , $\frac{8}{3}$, $\frac{7}{3}$, 2 , $\frac{5}{3}$

❻ أيّ من المتتابعات تُمثّل متتابعة هندسية ؟

A ..... , $\frac{1}{9}$, $\frac{1}{3}$− , 1− , 3

B ..... , 0 , 3− , 0 , 3

C ..... , $\frac{1}{9}$, $\frac{1}{3}$, 1 , 3

D ..... , 6− , 3− , 0 , 3

تم تحميل هذا الملف من موقع المناهج البحرينية

alManahj.com/bh

ريض 262

❶ تابع : المتتابعات كدوال

أ./ عابدين

الوسط الحسابي : إذا كان a , b , c في تتابع حسابي (b الوسط الحسابي بين a , c) $\Leftarrow b = \frac{a+c}{2}$

الوسط الهندسي : إذا كان a , b , c في تتابع هندسي (b الوسط الهندسي بين a , c) $\Leftarrow b^2 = a \cdot c$

❶ إذا كانت : $x , 7 , y , \ldots\ldots , 23 , 27$

متتابعة حسابية . فما قيمة كلاً من x , y ؟

❷ إذا كانت : $5 , x , \ldots\ldots , 3x+2 , 25$

متتابعة حسابية ، فما قيمة x ؟

تم تحميل هذا الملف من
موقع المناهج البحرينية

❸ إذا كوّنت الأعداد : $8 , x , 2$ على الترتيب

متتابعة حسابية ، فما قيمة x ؟

x وسط حسابي بين $8 , 2$
$8 , x , 2$ في تتابع حسابي

A 4

B 5

C 6

D 10

❹ إذا كانت : $9 , x , 4$ تُمثّل متتابعة هندسية ، فما قيم x المُمكنة ؟

x وسط هندسي بين $9 , 4$
$9 , x , 4$ في تتابع هندسي

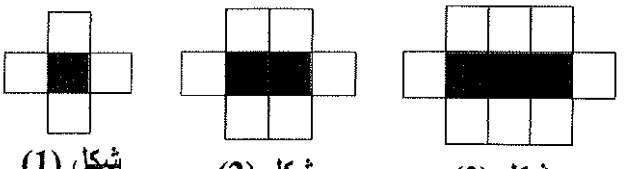
A 6

B -6

C ± 6

D 6.5

❺ الأشكال أدناه تُمثل نمطاً من المربعات المظللة وغير المظللة ، ما نوع المتتابعة التي يمثلها نمط المربعات غير المظللة .



شكل (1) شكل (2) شكل (3)

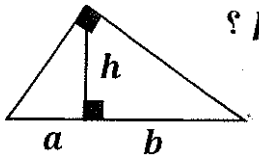
A هندسية

B فيبوناشي

C حسابية

D الأعداد المربعة

❻ في الشكل أدناه : h تمثل الوسط الهندسي لعددين a , b ، فما قيمة h^4 ؟



A $\sqrt{a\,b}$

B $a\,b$

C $a^2 b^2$

D $a^4 b^4$

❷ المتتابعات و المتسلسلات الحسابية

مفهوم أساسي

أضف إلى مطويتك

الحد النوني من المتتابعة الحسابية

تستعمل الصيغة الآتية للتعبير عن الحد النوني a_n من متتابعة حسابية حدها الأول a_1 وأساسها d حيث n عدد طبيعي.

$$a_n = a_1 + (n-1)\,d$$

المتتابعة الحسابية الثابتة

$$a_n = a_1 \quad \Leftarrow \quad d = 0$$

ويمكنك استعمال هذه الصيغة لإيجاد قيمة أي حد من حدود المتتابعة الحسابية، وذلك بمعرفة الحد الأول والأساس.

إذا أعطيت بعض الحدود في المتتابعة الحسابية، فيمكنك كتابة صيغة للحد النوني في هذه المتتابعة.

في بعض الأحيان يُعطى في المسألة حدان غير متتاليين في متتابعة حسابية. وتُسمّى جميع الحدود الواقعة بين هذين الحدين **أوساطًا حسابية**، ويمكن استعمال هذا المفهوم في إيجاد الحدود المفقودة بين حدين في متتابعة.

المتسلسلات الحسابية يمكن الحصول على **المتسلسلة** بوضع إشارة الجمع بين حدود المتتابعة. لذا **فالمتسلسلة الحسابة** هي مجموع حدود متتابعة حسابية. ويُسمّى ناتج جمع أول n حدًا من المتتابعة **المجموع الجزئي**، ويُرمز له بالرمز S_n.

مفهوم أساسي

أضف إلى مطويتك

المجموع الجزئي من متسلسلة حسابية

الصيغة	المعطيات	مجموع أول n حدًا (S_n)
العامة	a_1 , a_n	$S_n = n\left(\frac{a_1 + a_n}{2}\right) = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$
البديلة	a_1 , d	$S_n = \frac{n}{2}[2a_1 + (n-1)d]$

في بعض الأحيان، لا بد من إيجاد إحدى القيم n ، a_n ، a_1 قبل إيجاد مجموع المتسلسلة الحسابية. وفي هذه الحالة استعمل صيغة الحد النوني.

المتتابعة الحسابية الثابتة

$$S_n = n \cdot a_1 \quad \Leftarrow \quad d = 0$$

يمكن كتابة مجموع المتسلسلة بصورة مختصرة باستعمال **رمز المجموع**.

مفهوم أساسي

أضف إلى مطويتك

رمز المجموع

بالرموز

$$\sum_{k=1}^{n} f(k)$$

n: آخر قيمة لـ k ، 1: أول قيمة لـ k ، $f(k)$: صيغة حدود المتسلسلة

مثال

$$\sum_{k=1}^{12}(4k+2) = [4(1)+2] + [4(2)+2] + [4(3)+2] + \ldots + [4(12)+2]$$
$$= 6 + 10 + 14 + \ldots + 50$$

ملاحظات : ❶ n عدد صحيح موجب (عدد طبيعي) $\Leftarrow$ تُرفض إذا كانت سالبة أو صفر أو كسر

❷ $s_1 = a_1$ ، $S_2 = a_1 + a_2$ ، $S_3 = a_1 + a_2 + a_3$ ، وهكذا

ريض 262

تابع : بطاقة (2) ريض 262

❷ الحد النوني للمتتابعة الحسابية

أ./ عابدين

الحد النوني للمتتابعة الحسابية	ملاحظة هامة عند حل مسائل الأوساط الحسابية
$a_n = a_1 + (n-1)d$ a_n : الحد النوني ، a_1 : الحد الأول n : رتبة الحد ، d : الأساس	• عدد الحدود = عدد الأوساط + 2 • عدد الأوساط = عدد الحدود − 2 • لإدخال الأوساط الحسابية نوجد قيمة الأساس d

❶ أوجد a_{20} من المتتابعة الحسابية علماً بأن :

$a_1 = 15$ ، $d = -8$

❷ اكتب صيغة الحد النوني للمتتابعة الحسابية :

..... , -6 , 3 , 12

❸ أوجد الحد الثاني عشر من المتتابعة الحسابية

..... 30 , 23 , 16 , 9

❹ ما صيغة الحد النوني للمتتابعة الحسابية التي بالجدول :

n	1	2	3	4
a_n	13	19	25	31

❺ اكتب صيغة الحد النوني للمتتابعة الحسابية التي فيها : $a_6 = 12$ ، $d = 8$

❻ اكتب صيغة الحد النوني للمتتابعة الحسابية التي فيها : $a_5 = -12$ ، $d = -4$

تم تحميل هذا الملف من موقع المناهج البحرينية
dlMaahj.com/bh

ريض 262

تابع : بطاقة (2) ريض 262

❷ الحد النوني للمتتابعة الحسابية

أ./ عابدين

- لإيجاد رتبة حد قيمته تساوي k نضع $a_n = k$
- لإيجاد رتبة حد قيمته أكبر من k نضع $a_n > k$
- لإيجاد رتبة أول حد موجب
- لإيجاد عدد الحدود الموجبة

نضع : $a_n > 0$

- لإيجاد رتبة أول حد سالب
- لإيجاد عدد الحدود السالبة

نضع : $a_n < 0$

❶ أوجد رتبة (ترتيب) الحد الذي قيمته تساوي 243 في المتتابعة الحسابية :

..... 15 , 11 , 7 , 3

❷ أوجد رتبة وقيمة أول حد موجب في المتتابعة الحسابية : ..... , -95 , -100 , -105

❸ إذا كانت ... ... , 15 , 21, ... , a_2 , -3 متتابعة حسابية ، فما قيمة a_2 .

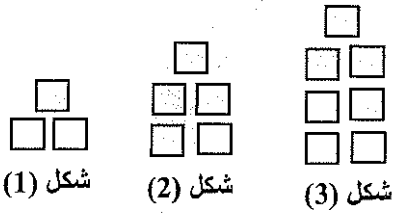
وهل يوجد حد قيمته تساوي 240 في المتتابعة

❹ أوجد رتبة وقيمة أول حد سالب في المتتابعة الحسابية : ..... 86 , 90 , 94 , 98

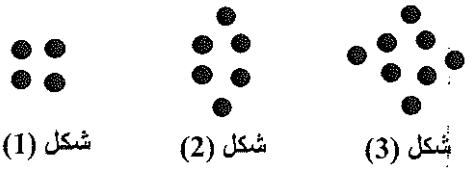
تم تحميل هذا الملف من موقع المناهج البحرينية
alManahj.com/bh

❷ نشاط : اختبر نفسك

❶ أنظر إلى متتابعة الأشكال المُعطاة أدناه .
كم عدد المربعات التي تُكوّين الشكل العاشر من المتتابعة ؟



❷ أيّ مما يأتي يمثل صيغة الحد النوني في متتابعة النقاط المجاورة ؟



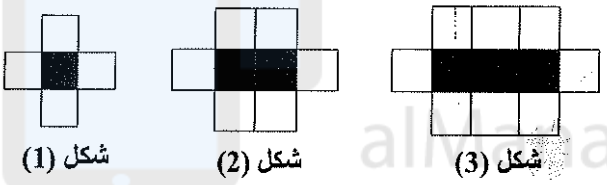
A $n\,(n-1)$

B $2(n+1)$

C $n\,(n+2)$

D $2n$

❸ الأشكال المجاورة تُمثّل نمطاً من المربعات المظللة والمربعات غير المُظللة .



A) اكتب معادلة تُمثّل عدد المربعات غير المُظلّلة في الشكل (n) .

B) هل من الممكن الحصول على 84 مربعاً غير مظلل بالضبط في هذا النمط ؟

❹ إذا كان الحد النوني من متتابعة حسابية هو $a_n = 42 - 3n$ ، فما قيمة k ، علماً بأن : $a_k + a_{k+1} = 33$

نوجد $a_k , a_{k+1} \Leftarrow a_k = 42 - 3k$

$a_{k+1} = 42 - 3(k+1) = 39 - 3k$

ثم بالتعويض في $a_k + a_{k+1} = 33$

$\Rightarrow 42 - 3k + 39 - 3k = 33$

$\Rightarrow 6k = 48 \Rightarrow k = 8$

❺ أيّ مما يأتي هو معادلة (صيغة) الحد النوني لمتتابعة حسابية متزايدة ، حيث n عدد طبيعي ؟

A $a_n = 3\,n^2 - 4$

B $a_n = 2(3)^{n-1}$

C $a_n = 4 - 3n$

D $a_n = 3n + 4$

تم تحميل هذا الملف من موقع المناهج البحرينية
alMunahj.com/bh

ريض 262

تابع : بطاقة (2) ريض 262

أ./ عابدين

❷ الأوساط الحسابية

عدد الحدود = عدد الأوساط + 2

لإدخال الأوساط الحسابية نوجد قيمة الأساس d

الوسط الأول (الحد الثاني) $= a_2$ ، الوسط الثاني (الحد الثالث) $= a_3$ ، وهكذا .....

❶ أدخل الأوساط الحسابية المطلوبة :

-8 , ? , ? , ? , ? , 22

❷ أدخل خمسة أوساط حسابية بين العددين :

-18 , 36

تم تحميل هذا الملف من
موقع المناهج البحرينية
alManahj.com/bh

❸ ما الوسطان الحسابيان بين العددين :

75 , 48 ؟

A 57 , 66

B -57 , 66

C 57 , -66

D -57 , -66

❹ يوجد 3 أوساط حسابية بين العددين a , b ، فإذا علمت أن الوسط الحسابي للأوساط الثلاثة هو 16 ، فما قيمة الوسط الحسابي بين العددين a , b ؟

A 8

B 12

C 16

D 20

❺ ما الوسط الحسابي بين العددين الحقيقين $a+d$, $a-d$ ؟

A d

B $2d$

C a

D $2a$

الوسط الحسابي لعددين = $\frac{\text{المجموع}}{2}$

وعموماً الوسط الحسابي = $\frac{\text{المجموع}}{\text{العدد}}$

❼ تكوين المتتابعة الحسابية

لإيجاد (تكوين) المتتابعة الحسابية نحتاج إلى قيمة الحد الأول a_1 ، ثم إضافة الأساس d

❶ أكتب معادلة الحد النوني للمتتابعة الحسابية التي فيها : $a_6 = 2\,a_3$ ، $a_1 = 10$

❷ أوجد المتتابعة الحسابية التي فيها :

$a_1 + a_5 = 26$ ، $a_4 = 16$

❸ أوجد المتتابعة الحسابية التي حدها الخامس والعشرون يساوي 121 ، والحد الثمانون يساوي 506 .

❹ أكتب معادلة الحد النوني للمتتابعة الحسابية التي أساسها يساوي 3 ، وعدد حدودها 15 حداً ، وحدها الأوسط يساوي 23 .

تم تحميل هذا الملف من
موقع المناهج البحرينية
alManahj.com/bh

ريض 262

❷ المجموع الجزئي من متسلسلة حسابية

أ./ عابدين

المتسلسلة الحسابية : هي مجموع متتابعة حسابية ، ويمكن الحصول على المتسلسلة بوضع إشارة (+) (إشارة الجمع) بين حدود المتتابعة .

- **المتتابعة** : توضع بين الحدود فاصلة (,)
- **المتسلسلة** : توضع بين الحدود إشارة (+)

المجموع الجزئي من متسلسلة حسابية [مجموع أول n حداً (S_n)]

الصيغة العامة : $S_n = \frac{n}{2} [\, a_1 + a_n \,]$

الصيغة البديلة : $S_n = \frac{n}{2} [\, 2a_1 + (n-1)\, d \,]$

حيث أن : a_1 (الحد الأوّل في المجموع) ، a_n (الحد الأخير في المجموع) ، n (الحدود التي يتم جمعها)

❶ أوجد مجموع المتتابعة الحسابية التي فيها :

$a_n = 145 \;,\; d = 5 \;,\; n = 21$

❷ أوجد مجموع المتسلسلة الحسابية :

$-18 + (-15) + (-12) + \cdots\cdots + 66$

❸ أوجد مجموع المتسلسلة الحسابية التي فيها :

$a_1 = -16 \;,\; d = 6 \;,\; n = 24$

❹ أوجد مجموع متسلسلة أول 100 عدد فردي في مجموعة الأعداد الطبيعية .

تم تحميل هذا الملف من موقع المناهج البحرينية
alManahj.com/bh

ريض 262

❷ المجموع الجزئي من متسلسلة حسابية

أ./ عابدين

ملحوظة : مجموع قياسات الزوايا الداخلة للمضلع $= (n-2) \times 180^\circ$ ، حيث n عدد الأضلاع

❺ أوجد الحدود الثلاثة الأولى من متتابعة حسابية فيها : $n = 18 , a_n = 112 , S_n = 1098$

❻ أوجد الحدود الثلاثة الأولى من متتابعة حسابية فيها $a_1 = -24 , a_n = 288 , S_n = 5280$

❼ متتابعة حسابية حدها الأول يساوي 12 ، وأحد حدودها يساوي 180 . إذا كان مجموع حدودها من الحد الأول إلى الحد الذي يساوي 180 هو 2400 ، فما قيمة أساسها ؟

❽ تكوّن قياسات الزوايا الأربع لمضلع رباعي متتابعة حسابية . إذا كانت أكبر زوايا المضلع قياسها يساوي 135° ، فأوجد قياس الزاوية الصغرى فيه .

تم تحميل هذا الملف من موقع المناهج البحرينية
alManahj.com/bh

❼ المجموع الجزئي من متسلسلة حسابية

a_n مقدار من الدرجة الأولى في n ، ومعامل n هو الأساس

المجموع S_n مقدار من الدرجة الثانية في n

❾ كم حداً يلزم أخذه من المتتابعة الحسابية :

$2, 6, 10, 14, \ldots\ldots\ldots$

ابتداءً من الحد الأول ليكون المجموع 242 .

❿ أوجد عدد حدود المتتابعة الحسابية التي فيها :

$a_1 = -9 \ , \ d = 2 \ , \ s_n = 200$

⓫ إذا كان عدد حدود متتابعة حسابية هو 9 ، وأساسها هو 4 ، ومجموعها هو 171 ، فما قيمة الحد الأول منها ؟

⓬ أوجد مجموع العشرين حداً بدءاً من الحد السادس من المتتابعة حسابية حدها النوني يُعطى من العلاقة : $a_n = 5n - 2$

تم تحميل هذا الملف من
موقع المناهج البحرينية
alManahj.com/bh

ريض 262

❷ المتسلسلة الحسابية برمز السيجما $\sum$

أ./ عابدين

خطوات إيجاد المجموع برمز السيجما :

① نوجد قيمة n $\Leftarrow$ $n =$ النهاية $-$ البداية $+ 1$

② نوجد قيمة a_1 $\Leftarrow$ $a_1 =$ عوّض بالقيمة التي أسفل الرمز

③ نوجد قيمة a_n $\Leftarrow$ $a_n =$ عوّض بالقيمة التي أعلى الرمز

④ عوّض في : $S_n = \frac{n}{2}[a_1 + a_n]$

❶ أوجد قيمة : $\sum_{m=9}^{21}(5m+6)$

❷ أوجد قيمة : $\sum_{k=3}^{22}(6-3k)$

❸ إذا كان : $\sum_{k=1}^{10}(2k+m)=140$

، فأوجد قيمة الثابت m ؟ [ج : $m = 3$]

❹ إذا كان : $\sum_{k=4}^{x}(2k-1)=135$

، فأوجد قيمة x ؟ [الجواب : $x = 12$]

تم تحميل هذا الملف من موقع المناهج البحرينية
alManahj.com/bh

ريض 262

❷ نشاط : اختبر نفسك

أ./ عابدين

❶ أيّ مما يأتي يُمثل متتابعة حسابية ؟

A $2 , 4 , 8 , 16 , \ldots\ldots$

B $2 + 4 + 6 + 8 , \ldots$

C $16 , 5 , -6 , -17 , \ldots$

D $\sum_{k=1}^{10} (3k+1)$

المتتابعة توضع بين الحدود فاصلة
المتسلسلة بين الحدود إشارة +

رمز سيجما يعني مجموع (متسلسلة)

❷ ما صيغة مجموع حدود المتتابعة الحسابية ؟

A $S_n = 2n\,[\,2a_1 + (n-1)d\,]$

B $S_n = \frac{n}{2}[a_1 - a_n]$

C $S_n = \frac{n\,[\,a_1 + a_n\,]}{2}$

صورة أخرى أيضاً $S_n = n\,[\frac{a_1 + a_n}{2}]$

D $S_n = \frac{n}{2}[\,2a_1 + nd\,]$

❸ أي مما يأتي يكافئ التعبير :

$5 + 7 + 9 + 11$

A $\sum_{k=1}^{4} (3k+1)$

B $\sum_{k=1}^{4} (2k+3)$

C $\sum_{k=1}^{6} (2k+3)$

❹ أي مما يأتي يكافئ التعبير :

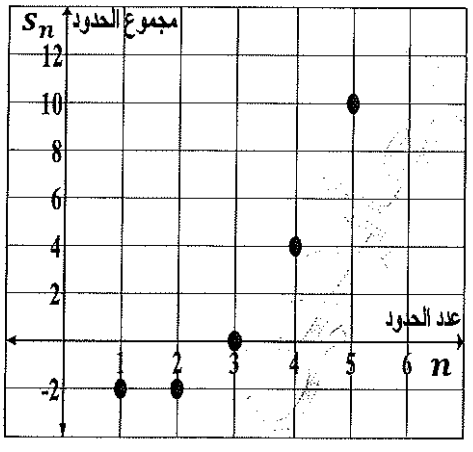
$1 + \sqrt{2} + \sqrt[3]{3}$

A $\sum_{k=1}^{3} k^{k}$

B $\sum_{k=1}^{3} \sqrt{k}$

C $\sum_{k=1}^{3} k^{\frac{1}{k}}$

❺ ما نوع المتتابعة في التمثيل المجاور ؟



$S_1 = 2 \Rightarrow a_1 = S_1 = 2$

$S_2 = 2 \Rightarrow a_1 + a_2 = 2$

$2 + a_2 = 2 \Rightarrow a_2 = 0$

$S_3 = 0 \Rightarrow a_1 + a_2 + a_3 = 0$

$2 + 0 + a_3 = 0 \Rightarrow a_3 = -2$

المتتابعة هي : $2, 0, -2, \ldots\ldots$

أي حسابية متزايدة

A هندسية متزايدة .

B هندسية متناقصة .

C حسابية متزايدة .

D حسابية متناقصة .

❻ إذا كان مجموع ثلاثة حدود متتالية من متتابعة حسابية متزايدة يساوي 6 ، وحاصل ضربها يساوي 42 – فأوجد الحدود الثلاثة ؟

بفرض الأعداد : $a_1 , a_2 = a_1 + d , a_3 = a_1 + 2d$

أو : $a - d , a , a + d$ ، فيكون الجواب : $-3, 2, 7$

❼ إذا كان a هو الحد الثالث في متتابعة حسابية ، b هو الحد الخامس ، c هو الحد الحادي عشر . فعبّر عن c بدلالة a , b .

عوض عن a, b, c بدلالة a_1 , d ، ثم بالطرح $\Leftarrow$ $c = 4b - 3a$

تم تحميل هذا الملف من موقع المناهج البحرينية
almanahj.com/bh

❷ تطبيقات على المتتابعة الحسابية

المفرد (في الشهر) ⇐ a_n (الحد النوني)
الجمع (في الأشهر) ⇐ S_n (المجموع

المسائل التراكمية
مسائل التوفير ⇐ استعمل a_n

زيادة ثابتة ⇐ d موجبة
نقص ثابت ⇐ d سالبة

القسط النوني (أو القسط الأخير) ⇐ a_n

عدد الأقساط (رتبة القسط) ⇐ n

قيمة القرض ⇐ S_n

في [أي قسط - أي صف - أي يوم - أي أسبوع - أي شهر - أي سنة] ⇐ فالمطلوب هو الرتبة n

في مسائل التوفير أو مسائل الإنفاق التي تحوي قيمة في بداية الشهر وقيمة في نهاية الشهر
القيمة في البداية ≠ القيمة في النهاية

متتابعة نهاية الأشهر ⇐ اعتبر أن : البداية $= a_1 + d$

متتابعة بداية الأشهر ⇐ البداية $= a_1$ (رتبة الحد تزداد 1)

❶ وفـرّ عادل في الشهر الأول من بدء عمله BD 260 ، ثم أصبح يضيف في كل شهر لاحق مبلغ BD 30 على المبلغ الذي وفره في الشهر السابق . إذا استمر عادل بالتوفير على هذا النحو

فأوجد ما يأتي : بداية الشهر = نهاية الشهر

A المبلغ الذي سوف يوفره في الشهر التاسع ؟

استعمل a_n [الجواب : $a_9 = 500$ BD]

B رتبة الشهر الذي يوفر فيه عادل BD 590 ؟

استعمل a_n [الجواب : $n = 12$]

C المبلغ الذي سيوفره عادل خلال 3 سنوات ؟

استعمل a_n [ج : $a_{36} = 1310$ BD]

❷ يُوفّر سعيد BD 25 شهرياً ، إذا كان معه BD 100 في البداية ، فأوجد ما يأتي :

A المبلغ الذي سيصبح مع سعيد في نهاية الشهر الثامن (بعد مرور 8 أشهر) ؟ [BD 300]

B كم شهراً يحتاج ليصبح معه BD 725 إذا استمر التوفير بالطريقة نفسها . [$n = 25$]

❸ بلغ الراتب السنوي لخالد في السنة الأولى BD 9200 ، ثم أصبح بعد ذلك يتقاضى إضافة إلى راتب السنة السابقة زيادة سنوية تبلغ BD 160 ، فما رتبة السنة التي يُصبح فيها راتبه السنوي BD 13040 ؟ [الجواب : 25]

٢ تطبيقات على المتتابعة الحسابية

تابع : تمارين حياتية على المتتابعات الحسابية

٤ تبدأ جائزة إحدى المسابقات القرآنية بأحد المراكز لتحفيظ وتجويد القرآن الكريم بمبلغ 150 BD ، ويضاف مبلغ 50 BD إلى الجائزة كل شهر ، إذا استمرت المسابقة لمدة أحد عشر شهراً ، فكم يكون مجموع قيم الجوائز . [ج : 4400 BD]

٥ يوجد 28 مقعداً في الصف الأول في إحدى قاعات المحاضرات ، وعدد المقاعد في كل صف تالي يزيد بمقعدين عن الصف السابق مباشرة . إذا كان في هذه القاعة 24 صفاً ، فكم مقعداً يوجد في الصف الأخير ؟ [ج : 74 مقعداً]

٦ استعداداً لمشاركته في سباق المسافات الطويلة ، خطط علي أن يتدرب من خلال الجري لمسافة يُزيدها كل أسبوع عن الأسبوع الذي قبله مباشرة بمقدار ثابت 8 km ، حيث جرى في الأسبوع الأول مسافة 6 km . إذا استمر علي بالتدريب وفق هذا النمط ما إجمالي المسافة التي سوف يقطعها علي خلال الأسابيع العشرة الأولى من بدء تدريباته ؟ [الجواب : 420 km]

٧ عندما يسقط جسم سقوطاً حرًّا تحت تأثير الجاذبية الأرضية ، ومع إهمال مقاومة الرياح ، فإنه يقطع مسافة 16 ft في الثانية الأولى ، و 48 ft إضافية في الثانية الثانية ، و 80 ft إضافية في الثانية الثالثة . ما المسافة التي يقطعها هذا الجسم في 10 sec ؟ [ج : 1600 ft]

تم تحميل هذا الملف من موقع المناهج البحرينية
alManahj.com/bh

❷ تطبيقات على المتتابعة الحسابية

تابع : تمارين حياتية على المتتابعات الحسابية

❽ أقترض محمد مبلغاً من المال من أحد أصدقائه ، واتفقا على أن يقوم بتسديده كالآتي : القسط الأول BD 70 ، وكل قسط تالٍ يزيد عن القسط السابق له مباشرة بمقدار BD 20 . أيّ قسط ستكون قيمته BD 410 [الجواب : 18]

❾ أقترض علي مبلغاً من المال من أحد أصدقائه ، واتفقا على أن يقوم بتسديده كالآتي : القسط الأول BD 50 ، وكل قسط تالٍ يزيد عن القسط السابق له مباشرة بمقدار BD 25 . إذا علمت أن عدد الأقساط 12 ، فما قيمة القرض ؟ [BD 2250]

❿ بدأ محمد بزراعة 3 ثمرات من الطماطم في حديقة منزله وذلك في الأسبوع الأول ، فإذا كان عدد الطماطم في كل أسبوع يزيد 5 ثمرات عن الأسبوع الذي سبقه مباشرة . فبعد كم أسبوع يصبح عدد الطماطم 88 ؟ [الجواب : 18]

(تنبيه : استعمل القانون المناسب من قوانين المتتابعات والمتسلسلات التي درستها)

⓫ قام أحمد بإعداد برنامج يومي لقراءة القرآن الكريم ، فإذا قام أحمد بقراءة 7 صفحات من القرآن في اليوم الأول وكان يقرأ في كل يوم تالٍ عدد من الصفحات يزيد عن ما قرأه في اليوم السابق بمقدار 3 صفحات ، إذا استمر أحمد بقراءة صفحات القرآن الكريم وفق هذا النمط ، ففي أي يوم سوف يقرأ 52 صفحة ؟ [ج : $n = 16$]

تم تحميل هذا الملف من موقع المناهج البحرينية
alManahj.com/bh

❷ تطبيقات على المتتابعة الحسابية

تابع : تمارين حياتية على المتتابعات الحسابية

⓬ ينتج أحد المصانع نوعاً من مولّدات الكهرباء . إذا كان إنتاجه في السنة الأولى 165 مولّد كهربائي ، وفي كل سنة لاحقة كان يزيد إنتاجه عن السنة التي تسبقها مباشرة بمقدار 18 .

A أوجد عدد المولّدات التي أُنتجت خلال الـ 20 سنة الأولى لبدء الإنتاج . [ج : 6720]

B أوجد رتبة السنة التي أنتج المصنع فيها 687 مولّد كهربائي . [ج : $n = 30$]

⓭ في الامتحانات الوطنية للصف الثاني عشر لحل المشكلات نال أحمد الدرجة النهائية في الورقة الأولى من الامتحان والتي تتكون من 30 سؤالاً فقررت إدارة مدرسته تكريمه أثناء طابور الصباح وقدمت عرضين للجائزة التي سوف يستلمها أحمد

العرض الأول : تقديم 10 BD عن كل سؤال

العرض الثاني: تقديم دينار على السؤال الأول ، وفي كل سؤال تالٍ يُضاف دينار زيادة عن المبلغ الذي حصل عليه في السؤال السابق له مباشرة .

، فإيّ من العرضين يُعطي قيمة أكبر للجائزة ؟

⓮ تقاضى عليٌّ لقاء عمله خلال أوّل ثلاثة شهور أجرة مقدارها 9 BD يومياً ، ثم أصبح يحصل على زيادة مقدارها 0.5 BD يومياً في كل ثلاثة شهور لاحقة ، فكم تصبح أجرته اليومية في نهاية السنة الثالثة ؟

$a_1 = 9 \ , \ d = 0.5 \ , \ n = \frac{36}{3} = 12$

$\Rightarrow \ a_{12} = 9 + (12 - 1)(0.5) = 14.5$

الأجرة اليومية في نهاية السنة الثالثة 14.5 BD

⓯ أرادت ندى إتمام قراءة كتاب يضم 800 صفحة خلال العطلة الصيفية . إذا قرأت 112 صفحة حتى بداية العطلة ، وأرادت إنهاء قراءة الكتاب في 8 أيام ، فما أقل عدد من الصفحات التي عليها قراءته يومياً إذا كانت تقرأ العدد نفسه من الصفحات يومياً . [الجواب : 86]

$S_n = 688 \ , d = 0 \ , n = 8 \ , a_1 = ?$

تم تحميل هذا الملف من موقع المناهج البحرينية
alManahj.com/bh

بطاقة (3) ريض 262

أ./ عابدين

❸ المتتابعات و المتسلسلات الهندسية

المتتابعات الهندسية كما هو الحال في المتتابعات الحسابية، فإن للمتتابعات الهندسية صيغة للحد النوني تُستعمل لإيجاد قيمة أي حد من حدودها.

متزايدة عندما $r > 1$ ، متناقصة عندما $0 < r < 1$

مفهوم أساسي — الحد النوني من المتتابعة الهندسية

أضف إلى مطويتك

يُعطى الحد النوني a_n من المتتابعة الهندسية التي حدها الأول a_1، وأساسها r بالصيغة الآتية:

$$a_n = a_1 r^{n-1}$$ حيث n عدد طبيعي

ملاحظة : n عدد صحيح موجب (عدد طبيعي) $\Leftarrow$ تُرفض إذا كانت سالبة أو صفر أو عدد نسبي (كسر)

إذا علمت بعض حدود المتتابعة الهندسية ، فيمكنك إيجاد معادلة الحد النوني لها.

وكما في الأوساط الحسابية، فإن **الأوساط الهندسية** هي الحدود الواقعة بين حدين غير متتاليين في متتابعة هندسية، ويمكن استعمال أساس المتتابعة الهندسية لإيجاد الأوساط الهندسية.

المتسلسلة الهندسية هي مجموع حدود المتتابعة الهندسية. مجموع أول n حدًا في المتسلسلة يُرمز له بالرمز S_n. و يمكن استعمال أي من الصيغ الآتية لحساب المجموع الجزئي S_n لأول n حدًا من **المتسلسلة الهندسية**.

مفهوم أساسي — المجموع الجزئي من متسلسلة هندسية

أضف إلى مطويتك

الصيغة	المعطيات	مجموع أول n حدًا من المتسلسلة S_n
العامة	a_1, n	$S_n = \frac{a_1 - a_1 r^n}{1-r} = \frac{a_1(1-r^n)}{1-r}, r \neq 1$
البديلة	a_1, a_n	$S_n = \frac{a_1 - a_n r}{1-r}, r \neq 1$

ملاحظة : $S_3 = a_1 + a_2 + a_3$ ، $S_2 = a_1 + a_2$ ، $S_1 = a_1$ وهكذا .

وكما في المتسلسلات الحسابية، فإنه يمكن استعمال رمز المجموع للتعبير عن المتسلسلات الهندسية.

مثال 5 — المجموع باستعمال رمز المجموع

أوجد $\sum_{k=3}^{10} 4(2)^{k-1}$.

أوجد قيمة كل من n , r , a_1، ولإيجاد الحد الأول عوض العدد 3 بدلًا من k .

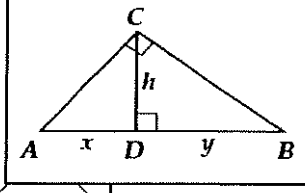
$a_1 = 4\,(2)^{3-1} = 16$، وأساس الدالة الأسية هو r ، حيث $r = 2$.

وعدد الحدود هو $n = 10 - 3 + 1 = 8$.

صيغة المجموع $S_n = \frac{a_1 - a_1 r^n}{1-r}$

$= \frac{16 - 16(2)^8}{1-2} = 4080$ $a_1 = 16,\ r = 2,\ n = 8$

الأوساط الهندسية يمكن تمثيل الأوساط الهندسية هندسيًا كما في الشكل أدناه، حيث تمثل h الوسط الهندسي بين x, y .



ريض 262

❷ الحد النوني للمتتابعة الهندسية

أ./ عابدين

الحد النوني للمتتابعة الهندسية	ملاحظة هامة عند حل مسائل الأوساط الهندسية
$a_n = a_1 \cdot (r)^{n-1}$ a_n : الحد النوني ، a_1 : الحد الأول n : رتبة الحد ، r : الأساس	• عدد الحدود = عدد الأوساط + 2 • عدد الأوساط = عدد الحدود − 2 • لإدخال الأوساط الهندسية نوجد قيمة الأساس r
❶ أوجد الحد التاسع من المتتابعة الهندسية 2 , 6 , 18 , ...	❷ أوجد a_n للمتتابعة الهندسية علماً بأن $a_1 = -4$, $r = -2$, $n = 8$
❸ اكتب معادلة الحد النوني للمتتابعة الهندسية : $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{9}$, $\frac{4}{27}$, ...	❹ اكتب معادلة الحد النوني للمتتابعة الهندسية : $-0.25 , 2 , -16 , 128 , ...$
❺ اكتب صيغة الحد النوني للمتتابعة الهندسية : التي فيها : $r = 2$, $a_6 = 128$	❻ اكتب صيغة الحد النوني للمتتابعة الهندسية : التي فيها : $r = 0.5$, $a_4 = -8$

تم تحميل هذا الملف من موقع المناهج البحرينية
almanahj.com/bh

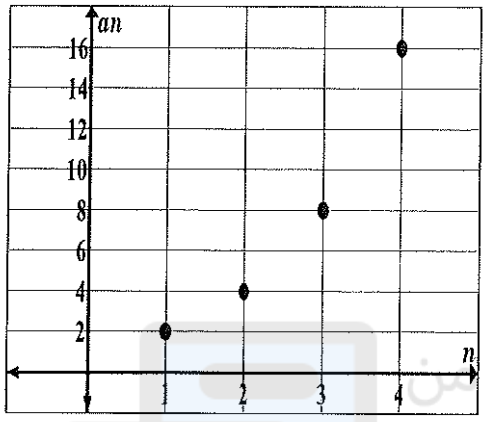
ريض 262

❸ الحد النوني للمتتابعة الهندسية

أ./ عابدين

لإيجاد رتبة حد قيمته $k =$ نضع $a_n = k \Leftarrow a_1 \cdot r^{n-1} = k$ ونوجد قيمة n

❼ ما صيغة الحد النوني للمتتابعة المُمثلة في الشكل المجاور ؟



A $a_n = 2n - 1$

B $a_n = (2)^{n-1}$

C $a_n = (2)^n$

D $a_n = (2)^{n+1}$

❽ ما معادلة الحد النوني للمتتابعة الهندسية :

9 , 27 , 81 , ...

A $a_n = (3)^n$

B $a_n = (3)^{n-1}$

C $a_n = (3)^{n+1}$

D $a_n = (3)^{n-2}$

❾ ما صيغة الحد النوني للمتتابعة الهندسية في الجدول المجاور ؟

n	a_n
1	2.5
2	5
3	10
4	20
5	40

A $a_n = 2.5(2)^{n-1}$

B $a_n = 0.5(2)^{n-1}$

C $a_n = 2(2.5)^{n-1}$

D $a_n = 2.5(5)^{n-1}$

❿ أوجد رتبة الحد الذي قيمته تساوي 384 في المتتابعة الهندسية :

3 , 6 , 12 , ...

⓫ أوجد رتبة الحد الذي قيمته تساوي 2187 في المتتابعة الهندسية :

3 , 9 , 27 , ...

قم تحميل هذا الملف من موقع المنهج البحرينية almanahj.com/bh

❸ الحد النوني و الأوساط الهندسية

عدد الحدود = عدد الأوساط + 2

لإدخال الأوساط الهندسية نوجد قيمة الأساس r

❶ أوجد الحدود المطلوبة في المتتابعة الهندسية :

2430 , ... , ... , ... , ... , 10

❷ أدخل أربعة أوساط هندسية بين العددين :

512 , 0.5

❸ أدخل الأوساط الهندسية المطلوبة : 10 , ? , ? , ? , 810

❹ ما الوسطان الهندسيان بين العددين :

81 , −3 ؟

A −9 , −27

B 9 , −27

C −9 , 27

D 9 , 27

❺ إذا كان $x > 0$ ، فأيّ مما يأتي يصف x^2 ، إذا كانت x^3 , x^2 , x تشكّل متتابعة ؟

A الوسط الحسابي للمتتابعة .

B الوسط الهندسي للمتتابعة .

C أساس المتتابعة .

D الحد النوني للمتتابعة .

تم تحميل هذا الملف من موقع المناهج البحرينية

alManahj.com/bh

ريض 262

❷ تكوين المتتابعة الهندسية

أ./ عابدين

لإيجاد (تكوين) المتتابعة الهندسية نحتاج إلى الحد الأول a_1 ، ثم نضرب في الأساس r

تُكتب الحدود بدلالة (a_1 , r) ثم نكوّن معادلتين نحلها بالقسمة لإيجاد قيمة a_1 , r

❶ إذا كانت : a_1 , 6 , a_3 , 54 , a_5

متتابعة هندسية حدودها موجبة فما قيمة a_3 ؟

A 18

B 24

C 30

D 48

❷ إذا كانت : k , 1 , $\frac{k+3}{10}$, ... ,

متتابعة هندسية ، فما قيم k ؟

1 وسط هندسي

A 2 , 5

B 1 , 10

C 5 , −2

D 2 , −5

❸ أكتب معادلة الحد النوني للمتتابعة الهندسية التي فيها : $a_8 = 384$, $a_3 = 12$

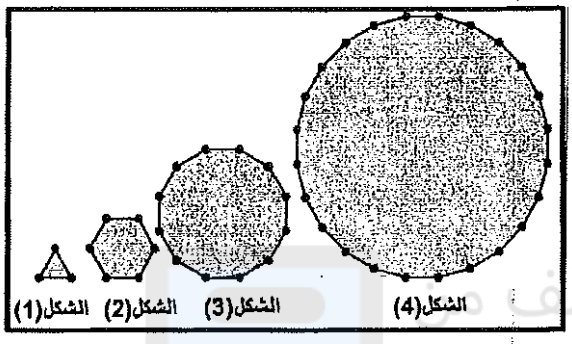
❹ أوجد المتتابعة الهندسية التي حدها الرابع يساوي 8 ، وحدها السابع يساوي 64 .

تم تحميل هذا الملف من موقع المناهج البحرينية
alManahj.com/bh

❸ نشاط: اختبر نفسك

تمارين على الحد النوني والأوساط الهندسية

❶ أيّ مما يأتي يُمثل صيغة الحد النوني في متتابعة النقاط المجاورة ؟



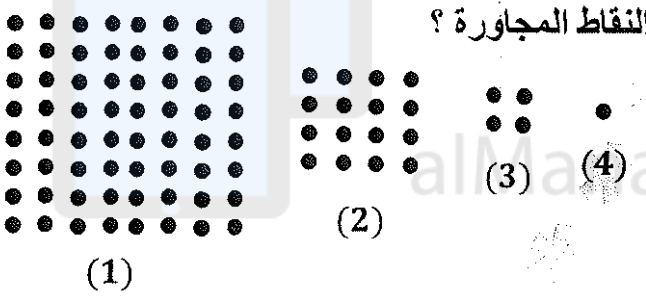
A $a_n = 3n$

B $a_n = 2n$

C $a_n = 3(2)^{n-1}$

D $a_n = 2(3)^{n-1}$

❷ أيّ مما يأتي يُمثل صيغة الحد النوني في متتابعة النقاط المجاورة ؟



A $a_n = n^4$

B $a_n = (4)^{4-n}$

C $a_n = (4)^{4n}$

D $a_n = (4)^{n-4}$

❸ أيّ مما يأتي هو صيغة الحد النوني لمتتابعة هندسية متزايدة ، حيث n عدد طبيعي ؟

A $a_n = 3\,n^2 - 4$

B $a_n = 3n + 4$

C $a_n = 3(\frac{1}{2})^{n-1}$

D $a_n = 2(3)^{n-1}$

❹ إذا كان الوسط الحسابي بين العددين 9 , 4 يساوي x ، بينما الوسط الهندسي الموجب لهما يساوي y ، فأيّ العبارات الأتية صحيحة ؟

A $x < y$

B $x > y$

C $x = y$

D $x^2 < y^2$

تم تحميل هذا الملف من موقع المناهج البحرينية
alManahj.com/bh

ريض 262

❸ المجموع الجزئي من متسلسلة هندسية

أ./ عابدين

المتسلسلة الهندسية : هي مجموع متتابعة هندسية ، ويمكن الحصول على المتسلسلة بوضع إشارة (+) (إشارة الجمع) بين حدود المتتابعة .

- **المتتابعة** : توضع بين الحدود فاصلة (,)
- **المتسلسلة** : توضع بين الحدود إشارة (+)

المجموع الجزئي من متسلسلة هندسية [S_n مجموع أول n حداً]

الصيغة العامة : $S_n = \frac{a_1 - a_1 r^n}{1-r}$, $r \neq 1$

أو يُكتب : $S_n = \frac{a_1(1-r^n)}{1-r}$, $r \neq 1$

الصيغة البديلة : (عندما تُعلم قيمة a_n)

$S_n = \frac{a_1 - a_n r}{1-r}$, $r \neq 1$

❶ أوجد مجموع المتتابعة الهندسية التي فيها :

$a_1 = 2000$, $a_n = 125$, $r = \frac{1}{2}$

❷ أوجد مجموع المتسلسلة الهندسية التي فيها :

$a_1 = 16$, $r = 2$, $n = 8$

❸ أوجد مجموع العشرة حدود الأولى من المتتابعة الهندسية التي فيها : $a_5 = 162$, $r = 3$

❹ أوجد أساس المتسلسلة الهندسية التي فيها :

$S_n = 513$, $a_n = 768$, $a_1 = 3$

موقع المناهج البحرينية
alManahj.com/bh

❸ المجموع الجزئي من متسلسلة هندسية

تابع : المجموع الجزئي من متسلسلة هندسية

❺ إذا كان الحد الأول من متسلسلة هندسية يساوي 3 وأساسها 5 ومجموعها 468 ، فما عدد حدودها ؟

❻ كم حداً يلزم أخذه من المتتابعة الهندسية :

$5, 10, 20, 40$ .....

ابتداءً من الحد الأول ليكون المجموع 1275 ؟

❼ أوجد a_1 من المتسلسلة الهندسية التي فيها :

$S_n = 6$, $a_n = -486$, $r = -\frac{3}{2}$

❽ أوجد a_1 من المتسلسلة الهندسية التي فيها :

$S_n = -26240$, $n = 8$, $r = -3$

تم تحميل هذا الملف من
موقع المناهج البحرينية
alManahj.com/bh

ريض 262

أ./ عابدين

❸ المتسلسلة الهندسية برمز السيجما Σ

خطوات إيجاد المجموع برمز السيجما :

① نوجد قيمة n $\Leftarrow$ n = النهاية − البداية $+ 1$

② نوجد قيمة r $\Leftarrow$ r = الأساس (أساس الدالة الأسية)

③ نوجد قيمة a_1 $\Leftarrow$ a_1 = عوّض بالقيمة التي أسفل الرمز

④ عوّض في : $S_n = \frac{a_1 - a_1 r^n}{1 - r}$

❶ أوجد قيمة : $\sum_{n=1}^{8} 4\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

❷ أوجد قيمة : $\sum_{k=2}^{9} \frac{2}{3}(2)^{k-1}$

❸ إذا كان : $\sum_{k=1}^{x} 3(2)^{k-1} = 765$

، فأوجد قيمة x ؟ [الجواب : $x = 8$]

❹ إذا كان : $\sum_{k=1}^{8} m(-2)^{k-1} = 255$

، فأوجد قيمة m ؟ [الجواب : $m = -3$]

تم تحميل هذا الملف من موقع المناهج البحرينية
alManahj.com/bh

ريض 262

❸ تطبيقات على المتتابعة الهندسية

أ./ عابدين

بصيغة المفرد	إرشادات عند حل المسائل الحياتية	بصيغة الجمع

❶ في الدقيقة ، في الشهر ، ..... وهكذا ⇐ باستعمال a_n (الحد النوني)

❷ في (خلال) الدقائق ، الأشهر ، ..... وهكذا ⇐ باستعمال S_n (المجموع)

❸ مثلي (ضعف – ضعفي - ضعفين) ⇐ $r = 2$ ، ثُلثي ⇐ $r = \frac{2}{3}$

❹ النسبة المئوية ($m\,\%$) بدون زيادة أو نقصان ⇐ النسبة المئوية $= m\,\%$ ⇐ r

❺ يزداد بنسبة $m\,\%$ ⇐ $r = 1 + m\,\%$

❻ يتناقص بنسبة $m\,\%$ ⇐ $r = 1 - m\,\%$

❼ في المسائل التراكمية : (كل حد يتضمن الحدود السابقة له مباشرة)
فمثلاً : مسائل [التوفير - تكاثر البكتيريا - طيّ الورقة - منسوب المياه] ⇐ نستعمل a_n

❶ تضع فاطمة مكعبات بعضها فوق بعض ، وقد وضعت في الطبقة السفلية 160 مكعباً ، وتقل عدد المكعبات بنصف العدد عن كل طبقة تحتها مباشرة ، إذا كان في الطبقة العلوية 5 مكعبات . فما مجموع عدد المكعبات التي استعملتها فاطمة ؟

[الجواب : 315]

❷ يتدرّب سعيد ، للمشاركة في سباق ماراثون مسافته 26 mi . فخطط أن يبدأ التدريب بالركض مسافة 2 mi ، وفي كل يوم لاحق كان يركض مسافة تبلغ $\frac{3}{2}$ المسافة التي ركضها في اليوم السابق مباشرة . أوجد المسافة التي يقطعها محمد في اليوم السابع إلى أقرب ميل .

[ج : 23 mi]

❸ ارتفع منسوب المياه في أحد السيول في اليوم الأول بمقدار 3 mm إذا تضاعف منسوب المياه في كل من الأيام الأربعة التالية بمقدار مرة من اليوم الذي قبله . فكم يكون ارتفاع منسوب المياه في السيل في اليوم الخامس ؟

(نمط تراكمي) $a_1 = 3\ ,\ r = 2\ ,\ n = 5\ \Rightarrow\ a_5 = 48$

❸ تطبيقات على المتتابعة الهندسية

تابع : تمارين على التطبيقات الحياتية للمتتابعة الهندسية

❹ استلم سعيد رسالة في بريده الإليكتروني ، وقام بإرسالها إلى أربعة من أصدقائه ، ثم قام كل واحد بدوره بإرسالها إلى أربعة أصدقاء آخرين ، وهكذا كان كل واحد يستلم الرسالة يبعثها إلى أربعة أشخاص جدد إذا استمر هذا النمط ، فما عدد الأشخاص الذين سيستلمون الرسالة في المرحلة التاسعة من إعادة الإرسال ؟ [ج : 262144]

❺ أرسل هاني موضوعاً عن طريقة الدراسة الجيدة إلى ثلاثة من أصدقائه باستعمال البريد الإلكتروني ، ومن ثم قام كل واحد منهم بإرسال الموضوع إلى ثلاثة أصدقاء آخرين ، وهكذا استمر إرسال الموضوع بهذا النمط ، فما إجمالي عدد الرسائل الإليكترونية المُرسلة حتى نهاية المرحلة السابعة ؟ [ج : 3279]

❻ يوزّع أحمد تقويماً سنوياً بحيث يعطي التقويم إلى 4 من أصدقائه ، ثم يقوم كل واحد منهم بإعطاء التقويم إلى 4 أصدقاء آخرين ، وهكذا يقوم كل من يستلم التقويم بإعطائه إلى 4 أشخاص آخرين . إذا عددنا أحمد أوّل من قام بعملية التوزيع هو الدورة الأولى ، فكم شخصًا قام بعملية التوزيع بعد 4 دورات ؟ [الجواب : 85 شخص]

الحل : النمط يُمثّل متتابعة هندسية فيها

$a_1 = 1 \ , \ r = 4 \ , \ n = 4 \ \Rightarrow \ s_n = ?$

$S_n = \frac{a_1 - a_1 r^n}{1-r} \ \Rightarrow \ S_4 = \frac{1 - 1\times(4)^4}{1-4} = 85$

عدد الأشخاص المطلوب هو 85 شخص

❼ ورقة سمكها $0.1\ mm$ إذا أعيد طي الورقة على نفسها بحيث يتضاعف سمكها في كل مرة ، فكم يصبح سمكها في الطي العاشر ؟

$a_1 = 0.2 \ , r = 2 \ , n = 10 \ \Rightarrow \ a_{10} = ?$

$a_1 = 0.1 \ , r = 2 \ , n = 11 \Rightarrow \ a_{11} = ?$ أو

تم تحميل هذا الملف من موقع المناهج البحرينية
alManahj.com/bh

❸ تطبيقات على المتتابعة الهندسية

تابع : تمارين على التطبيقات الحياتية للمتتابعة الهندسية

❽ إذا كانت زراعة البكتيريا تتضاعف كل خلال 2h ، فاحسب كم يكون عدد البكتيريا بعد 12 h علماً بأن عددها كان في البداية 200 بكتيريا .

[الجواب : $a_n = 12800$]

❾ تتكاثر البكتيريا فتصبح الواحدة اثنتين كل نصف ساعة . إذا كان عدد البكتيريا في $1\ cm^3$ من الحليب 100 بكتيريا في تمام الساعة الواحدة صباحاً ، فكم يصبح عددها في تمام الساعة الخامسة صباحاً ؟

[الجواب : 25600]

❿ خزان ماء يُصب فيه $3\ m^3$ من الماء في اليوم الأول وفي اليوم الثاني صُب فيه $\frac{2}{3}$ الكمية التي صُبت في اليوم الأول ، وفي اليوم الثالث صُب فيه $\frac{2}{3}$ الكمية التي صُبت في اليوم الثاني .
إذا امتلأ الخزان في اليوم الرابع ، فما سعة الخزان لأقرب متر مكعب .

[الجواب : $7\ m^3$]

⓫ يتسرب غاز من خزان بحيث كان مقدار الغاز المتسرب خلال الساعة الأولى $4800\ m^3$ من الغاز . وخلال كل ساعة لاحقة كان مقدار الغاز المتسرب يساوي 0.6 من مقدار الغاز المتسرب خلال الساعة السابقة مباشرة . احسب مقدار الغاز المتسرب خلال الساعة العاشرة مقرباً الناتج لأقرب عدد صحيح .

[$48\ m^3$ تقريباً]

تم تحميل هذا الملف من
موقع المناهج البحرينية
alManahj.com/bh

❸ تطبيقات على المتتابعة الهندسية

تابع : تمارين على التطبيقات الحياتية للمتتابعة الهندسية

⓬ تريد فاطمة أن تشتري هدية بقيمة BD 51 لوالديها ، فوضعت في حصالتها في الأسبوع الأول BD 0.2 ، ثم أصبحت تضع في كل أسبوع لاحق ضعف المبلغ الذي وضعته في الأسبوع الذي قبله مباشرة . إذا استمرت بالتوفير على هذا النحو ، فكم أسبوعاً تحتاج لتوفير ثمن الهدية ؟ [ج : 8]

⓭ خُيِّر أحمد مقابل إنجازه مشروعاً ضخماً بين مكافأة مقدارها BD1000000 ، أو أن يحصل على مكافأة خلال 20 يوماً ،على أن يأخذ في اليوم الأول BD1 ، ويأخذ في كل يوم تالٍ ضعف المبلغ الذي أخذه في اليوم السابق له مباشرة .
أيّ المكافأتين أكبر ؟ برّر إجابتك . [ج : الثانية]

⓮ بعد دقيقة واحدة من إطلاقه ، ارتفع منطاد مملوء بغاز مسافة 100 ft رأسياً إلى أعلى ، وبعد ذلك كان يرتفع كل دقيقة 50 % من ارتفاعه في الدقيقة السابقة مباشرةً . أوجد ارتفاع المنطاد بعد 5 min ؟ [الجواب : 193.75 ft]

⓯ إذا كان طول الذبذبة الأولى لبندول معين هو 30 cm ، وكان طول كل ذبذبة تالية 95 % من طول الذبذبة السابقة لها مباشرة ، فأوجد المسافة الكلية التي يتحرّكها البندول في 30 ذبذبة إلى أقرب سنتيمتر . [الجواب : 471 cm]

تم تحميل هذا الملف من موقع المناهج البحرينية
alManahj.com/bh

❸ تطبيقات على المتتابعة الهندسية

تابع : تمارين على التطبيقات الحياتية للمتتابعة الهندسية

⑯ يعمل فهد في شركة بناء لمدة 4 أشهر في السنة . إذا كان راتبه في البداية 520 BD في الشهر . وتزيد الشركة راتبه 5 % شهرياً ، فما المبلغ الذي سيحصل عليه في الأشهر الأربعة إلى أقرب دينار ؟ [ج : 2241 BD]

⑰ يبلغ سعر سيارة جديدة في السنة الأولى 20000 BD ، ثم بعد ذلك يتناقص سعرها سنوياً بمقدار 15 % من السعر الأصلي . أحسب سعر السيارة في السنة الثانية عشر لأقرب دينار . [ج : 3347 BD]

تم تحميل هذا الملف من موقع المناهج البحرينية

alManahj.com/bh

⑱ يقطع بندول مسافة 12 cm في التأرجح الأول ، وبعد ذلك يقطع في كل تأرجح 95 % من المسافة في التأرجح السابق ، ويستمر على هذا المنوال . أوجد المسافة الكلية التي يقطعها البندول عندما يتوقف عن الحركة . [ج : 240 cm]

⑲ عند أحمد مبلغ من المال ، يصرف نصفه في الشهر الأول ، ونصف المبلغ الباقي في الشهر الثاني وهكذا . إذا كان المبلغ الباقي بعد 4 أشهر (في الشهر الخامس) هو 2250 BD ، فما قيمة المبلغ الأصلي ؟ [ج : 36000 BD]

⑳ يبلغ الراتب السنوي لأحد الموظفين 40000 $ ، ويحصل زيادة سنوية بنسبة 4 % من الراتب كم سيبلغ الراتب (لأقرب دولار) بعد حصوله على أربع زيادات سنوية ؟ [ج : 46794 $]

ريض 262

بطاقة (4) ريض 262

أ./ عابدين

٤ المتسلسلات الهندسية اللانهائية

المتسلسلة الهندسية اللانهائية
هي التي لها عدد لانهائي من الحدود وقد تكون متقاربة أو متباعدة

المتسلسلة المتقاربة
شرطها هو : $|r| < 1$
ويكون للمتسلسلة مجموع

المتسلسلة المتباعدة
شرطها هو : $|r| \geq 1$
ولا يوجد للمتسلسلة مجموع

صيغة مجموع المتسلسلة الهندسية اللانهائية المتقاربة : $|r| < 1$, $S = \frac{a_1}{1-r}$

حدد ما إذا كانت المتسلسلات الهندسية اللانهائية الآتية متقاربة ، أو متباعدة :

١ $8 + 12 + 18 + \ldots\ldots\ldots\ldots$

٢ $16 - 8 + 4 - \ldots\ldots\ldots\ldots$

٣ $0.1 + 0.01 + 0.001 + \ldots\ldots\ldots$

٤ $\sum_{k=3}^{\infty} 3(2)^{k-1}$

أوجد مجموع كل من المتسلسلات الهندسية الآتية (إن وجد) :

٥ $440 + 220 + 110 + \ldots\ldots\ldots\ldots$

٦ $\frac{12}{5} - \frac{6}{5} + \frac{3}{5} - \ldots\ldots\ldots\ldots$

٧ أيّ مما يأتي يجعل المتسلسلة الهندسية اللانهائية التي حدها الأول a_1 ، أساسها r متقاربة ؟

A $|r| = 1$
B $|r| \geq 1$
C $|r| < 1$
D $|r| > 1$

٨ أيّ من المتسلسلات الهندسية الآتية متباعدة ؟

A $16 + 4 + 1 + \ldots\ldots$
B $16 + (-8) + 4 + \ldots$
C $4 + 4 + 4 + \ldots\ldots$

تم تحميل هذا الملف من موقع المناهج البحرينية
alManahj.com/bh

ريض 262

❹ المتسلسلة الهندسية اللانهائية بـ Σ

أ./ عابدين

خطوات إيجاد المجموع برمز السيجما :

① نوجد قيمة r $\Leftarrow$ $r =$ الأساس (بشرط $|r| < 1$)

② نوجد قيمة a_1 $\Leftarrow$ $a_1 =$ عوّض بالقيمة التي أسفل الرمز

③ عوّض في القانون $\Leftarrow$ $S = \frac{a_1}{1-r}$ بشرط أن $|r| < 1$

من تعريف المطلق

$|r| < 1 \Rightarrow -1 < r < 1$

❶ أوجد قيمة : $\sum_{k=1}^{\infty} 18\left(\frac{4}{5}\right)^{k-1}$ (إنّ وُجد)

❷ أوجد قيمة : $\sum_{n=1}^{\infty} 12\left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}$ (إنّ وُجد)

تم تحميل هذا الملف من
موقع المناهج البحرينية
almanahj.com/bh

❸ ما قيمة : $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2}\left(-\frac{3}{2}\right)^{k-1}$ ؟

(إنّ وُجد) ، مبرراً إجابتك .

A 1

B -1

C $\frac{1}{5}$

D لا يوجد

❹ ما قيمة : $\sum_{k=1}^{\infty} (-2)(0.5)^{k-1}$ (إنّ وُجد) ؟

A 4

B -4

C $\frac{4}{3}$

D $-\frac{4}{3}$

❺ أي من المتسلسلات الهندسية اللانهائية الآتية غير متقاربة ؟

A $\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{2}\left(-\frac{2}{3}\right)^{m-1}$

B $\sum_{n=1}^{\infty} 2(0.9)^{n-1}$

C $\sum_{k=1}^{\infty} 3(1.5)^{k-1}$

❻ ما ناتج ما يلي أدناه (إنّ وُجد) ؟

$4 - 2 + 1 - 0.5 + \ldots\ldots$

A 8

B $\frac{8}{3}$

C $-\frac{8}{3}$

ريض 262

٤ المتسلسلات الهندسية اللانهائية

أ./ عابدين

متقاربة : $-1 < r < 1 \Rightarrow |r| < 1$

متباعدة : $r \leq -1$ أو $r \geq 1 \Rightarrow |r| \geq 1$

٧ إذا كانت : $\sum_{k=1}^{\infty} m\left(\frac{2}{3}\right)^{k-1} = 81$ ، فما قيمة m ؟

[ج : $m = 27$]

٨ إذا كانت : $\sum_{k=2}^{\infty} 102(r)^{k-1} = 255$ ، فما قيمة r ؟

[الجواب : $r = \frac{5}{7}$]

٩ ما قيمة x التي تجعل المتسلسلة الهندسية اللانهائية $\sum_{k=1}^{\infty} 5\left(\frac{x}{3}\right)^{k-1}$ متقاربة ، $x \neq 0$ ؟

A -3

B 3

C 2

D 4

١٠ ما قيمة x التي تجعل المتسلسلة الهندسية اللانهائية $\sum_{k=1}^{\infty} 3\left(\frac{x}{5}\right)^{k-1}$ متباعدة ، $x \neq 0$ ؟

A -3

B 3

C 4

D 6

١١ ما قيم x الصحيحة التي تجعل المتسلسلة اللانهائية : $32 + 16x + 8x^2 + 4x^3 + \ldots\ldots$ متقاربة ، حيث $x \neq 0$ ؟

A $-1 , -5$

B $1 , 5$

C $-1 , 1$

D $-5 , 5$

$r = \frac{16x}{32} = \frac{x}{2}$, $x \neq 0$

$|r| < 1 \Rightarrow -1 < r < 1$

$-1 < \frac{x}{2} < 1 \Rightarrow -2 < x < 2$, $x \neq 0$

تم تحميل هذا الملف من موقع المناهج البحرينية
alManahj.com/bh

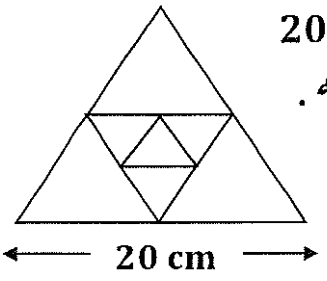
ريض 262

❹ المتسلسلات الهندسية اللانهائية

أ./ عابدين

تطبيقات على المتسلسلات الهندسية اللانهائية

❶ في الشكل المجاور : طول ضلع المثلث المتطابق الأضلاع الخارجي هو 20 cm ، وطول ضلع كل مثلث متطابق الأضلاع هو ضعف طول المثلث المحصور داخله .

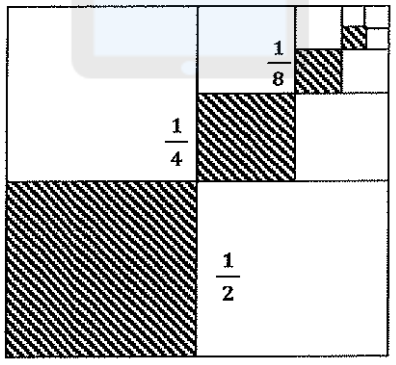


A) أوجد مجموع محيطات المثلثات الثمانية الأولى [ج : 119.5 cm]

B) إذا استمر النمط على هذا النحو إلى ما لا نهاية ، فما مجموع محيطات المثلثات ؟ [ج : 120 cm]

تم تحميل هذا الملف من موقع المناهج البحرينية
alManahj.com/bh

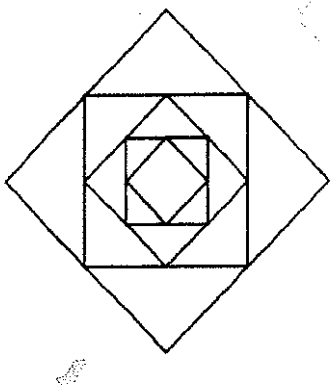
❷ يبين الشكل أدناه نمطاً من المربعات المظللة التي تنشأ عن تنصيف أضلاع المربعات في كل مرحلة لاحقة . إذا استمر النمط على هذا النحو إلى ما لا نهاية ، فما مجموع مساحات المربعات المظللة ؟



A $\frac{1}{2}$ C $\frac{1}{3}$

B $\frac{1}{4}$ D $\frac{1}{8}$

❸ في الشكل المجاور، طول ضلع المربع الخارجي هو 20 cm ، وطول ضلع كل مربع محصور داخله نصف طول ضلع المربع المحيط به . إذا استمر هذا النمط ، فما مجموع محيطات المربعات العشرة الأولى في هذا النمط لأقرب منزلة عشرية ؟ [الجواب : 159.8 cm]



٤ الكسور العشرية الدورية

تطبيقات على مجموع المتسلسلة الهندسية اللانهائية (الكسور العشرية الدورية)

$$S = \frac{a_1}{1-r} \qquad |r| < 1$$

تدريب : اكتب كلاً من الكسور العشرية الدورية الآتية على صورة كسر اعتيادي (على صورة $\frac{a}{b}$ ، $b \neq 0$) باستعمال مجموع متسلسلة هندسية لانهائية

١) $0.\overline{642}$

٢) $4.\overline{96}$

٣) $0.12\overline{14}$

٤) $2.3\overline{21}$

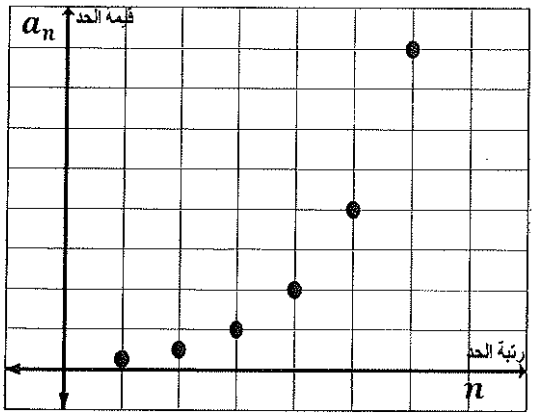
٥) $\overline{2.12}$

٦) $\sqrt{1.\overline{7}}$

تم تحميل هذا الملف من موقع المناهج البحرينية
alManahj.com/bh

❹ نشاط : اختبر نفسك

❶ ما نوع المتسلسلة اللانهائية المُمثّلة في الشكل ؟



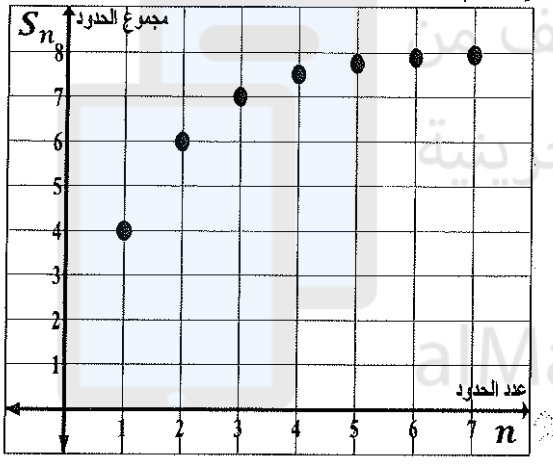
A هندسية متقاربة .

B هندسية متباعدة .

C حسابية متزايدة .

D حسابية متناقصة .

❷ ما نوع المتسلسلة اللانهائية في الشكل المجاور ؟



A هندسية متقاربة .

B هندسية متباعدة .

C حسابية متزايدة .

D حسابية متناقصة .

❸ ما ناتج المجموع : $3 - \frac{3}{2} + \frac{3}{4} - \frac{3}{8} + \ldots\ldots\ldots$ (إنْ وُجد) ؟

A -2 B 2 C 6 D لا يوجد

❹ ما قيم b التي يمكن عندها إيجاد مجموع المتسلسلة : $3 + 9b + 27b^2 + 81b^3 + \ldots\ldots$ ؟

A $-3 \leq b \leq 3$, $b \neq 0$

B $-\frac{1}{3} \leq b \leq \frac{1}{3}$, $b \neq 0$

C $-3 < b < 3$, $b \neq 0$

D $-\frac{1}{3} < b < \frac{1}{3}$, $b \neq 0$

❺ طُلب إلى علي ومحمد أن يجدا مجموع المتسلسلة : $1 - 1 + 1 - 1 + \ldots\ldots\ldots$

فكانت إجابتاهما كما يأتي أدناه . فهل إجابة أي منهما صائبة ؟ وضّح تبريرك .

علي

المجموع صفر ، لأن مجموع كل زوج من الحدود في المتسلسلة هو الصفر

محمد

لا يمكن إيجاد المجموع ، لأن $|r| = 1$ ، والمتسلسلة متباعدة

توزيع هذا الملف من موقع المناهج البحرينية
alManahj.com/bh

بطاقة (5) ريض 262

❺ نظرية ذات الحدين

أ./ عابدين

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} nC_k\,(a)^{n-k}\,(b)^k = \sum_{k=0}^{n} nC_k\,(\text{الأول بإشارته})^{n-k}\,(\text{الثاني بإشارته})^k$$

$$= nC_0\,a^n b^0 + nC_1\,a^{n-1}b^1 + nC_2\,a^{n-2}b^2 + \ldots\ldots + nC_n\,a^0 b^n$$

$$= a^n + nC_1\,a^{n-1}b^1 + nC_2\,a^{n-2}b^2 + \ldots\ldots + b^n \quad (n \text{ عدد صحيح موجب})$$

$\left(\frac{1}{a+b}\right)^{-n}$

مفكوك ذات الحدين

ملحوظة هامة : (تفيدك في إيجاد قيمة n , k)

- أس الحد الثاني الذي بداخل القوس $= k$
- أس الحد الأول الذي بداخل القوس $= n - k$

حسب قوى a التنازلية و قوى b التصاعدية

خصائص مفكوك $(a+b)^n$

❶ عدد حدود المفكوك $= n+1$ (الأس + 1) .

❷ الحد الأول $= (a)^n$ ، الحد الأخير $= (b)^n$.

❸ مجموع الأسس لـ a ، b في أي حد يساوي n .

❹ يقل أس a بمقدار واحد ، ويزيد أس b بمقدار واحد .

❺ مُعاملات حدود المفكوك متماثلة (معامل a = معامل b) .

❻ مجموع مُعاملات الحدود يساوي $(1+1)^n = (2)^n$

أي أن : $nC_0 + nC_1 + nC_2 + \ldots\ldots + nC_n = (2)^n$

مُعامل $a = 1$

مُعامل $b = 1$

n عدد صحيح موجب

ملحوظة

في مفكوك $(2a+3b)^n$ يكون مجموع مُعاملات حدود المفكوك يساوي :

$(a \text{ معامل} + b \text{ معامل})^n = (2+3)^n = (5)^n$

الحد العام في مفكوك : $(a+b)^n$

$$T_{k+1} = nC_k\,(a)^{n-k}\,(b)^k$$

ملاحظات

الحد العام في مفكوك كل من

$(a+b)^n$

$\left(\frac{1}{a+b}\right)^{-n}$

① لإيجاد الحد السابع مثلاً نضع $k = 6$ ، ولإيجاد الثامن $k = 7$ ، ولإيجاد الحد العاشر نضع $k = 9$ ، ..... ، وهكذا.

② الحد الأول $= (a)^n$ ، الحد الأخير $= (b)^n$.

③ لإيجاد مُعامل أي حد في المفكوك نوجد ذلك الحد ، ثم نضع كل عامل رمزي بالواحد (أي عوّض عن كل رمز من الرموز بـ 1) .

❺ تابع : نظرية ذات الحدين

$\left(\frac{1}{2b+\frac{1}{4}}\right)^{-4}$

تمارين على مفكوك ذات الحدين

❶ أوجد مفكوك : $\left(\frac{1}{x+2}\right)^{-4}$

❷ أوجد مفكوك : $\left(2b+\frac{1}{4}\right)^{4}$

❸ أوجد مفكوك : $(x-3y)^4$

❹ أوجد مفكوك : $(4m-3n)^4$

تم تحميل هذا الملف من
موقع المناهج البحرينية
alManahj.com/bh

❺ تابع : نظرية ذات الحدين

تمارين على نظرية ذات الحدين (الاختيار من متعدد)

❶ ما عدد حدود مفكوك $(y-3)^{k-2}$ ؟

A $k-3$

B $k-2$

C $k-1$

D $k+1$

❷ ما الحد الأول في مفكوك $(2a-b)^9$ ؟

A $512\,a^9$

B b^9

C $-512\,a^9$

D $-b^9$

❸ ما عدد حدود مفكوك $\left(\frac{1}{x+4}\right)^{-2019}$ ؟

A 2017

B 2018

C 2019

D 2020

❹ إذا كان a^5 هو الحد الأول في مفكوك $(a-4b)^n$ ، فما مُعامل الحد الأخير ؟

A 1024

B -1024

C 4096

❺ إذا كان عدد حدود المفكوك $(f-5)^{2n-1}$ هو 10 ، فما قيمة n ؟

A 5

B 6

C 8

D 9

❻ إذا كان $35\,x^3y^4$ أحد حدود مفكوك $(x+y)^{n-1}$ ، فما قيمة n ؟

A 6

B 7

C 8

D 12

❼ إذا علمت أن : $(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} nC_k\,(x)^k$ مجموع مُعاملات حدود المفكوك

، فما قيمة المقدار : $20C_0 + 20C_1 + 20C_2 + \ldots\ldots + 20C_{19} + 20C_{20}$ ؟

A 2^{19} B 2^{20} C 2^{21} D 2^{22}

تم تحميل هذا الملف من موقع المناهج البحرينية
alManahj.com/bh

⑤ تابع : نظرية ذات الحدين

تابع : تمارين على نظرية ذات الحدين (الاختيار من متعدد)

⑧ إذا كان 729 هي قيمة الحد الأخير في مفكوك : $(2x+3)^n$ ، فما قيمة n ؟

A 4

B 5

C 6

D 7

⑨ في مفكوك $(x+y)^5$ أي مما يأتي <u>لا يمكن</u> أن يُمثّل جزءاً من أحد حدود المفكوك ؟

A x^5

B $x^3\,y^2$

C y^5

D $x^2\,y^4$

⑩ في مفكوك $(a+b)^n$ أيّ من العبارات الآتية غير صحيحة ؟

A أس الحد الأول يساوي n

B عدد حدود المفكوك يساوي $n+1$

C مجموع الأسس في أي حد يساوي n

D المعاملات في المفكوك غير متماثلة

⑪ إذا كان $60\,k^4\,w^2$ أحد حدود المفكوك : $(k-2w)^n$ ، فما الحد الأخير ؟

A $32\,w^6$

B $60\,w^6$

C $64\,w^6$

D $-64\,w^6$

⑫ ما مجموع مُعاملات حدود المفكوك $(2x-3y)^{20}$ ؟

A -1

B 1

C 2^{20}

D 3^{20}

⑬ ما هو المُعامل <u>الغير موجود</u> في مفكوك $(a+b)^5$ ؟

A 1

B 5

C 10

D 15

⑭ إذا كان الحد السادس هو الحد الأوسط في مفكوك $(2x+y)^{h-3}$ ، فما قيمة h ؟

A $h=10$

B $h=11$

C $h=12$

D $h=13$

- إذا كان الأس زوجي فإن عدد حدود المفكوك فردي وبالتالي يوجد حد أوسط واحد .
- إذا كان الأس فردي فإن عدد حدود المفكوك زوجي وبالتالي يوجد حدان أوسطان .

تم تحميل هذا الملف من موقع المناهج البحرينية
alManahj.com/bh

تابع : بطاقة (5) ريض 262

أ./ عابدين

❺ تابع : نظرية ذات الحدين

الحد العام في مفكوك : $(a+b)^n$

$$T_{k+1} = {}_nC_k \cdot (a)^{n-k} \cdot (b)^k$$

لإيجاد رتبة حد مُعين في مفكوك ذات الحدين نوجد قيمة k $\Leftarrow$ الرتبة $= k+1$

الحد الأول في القوس يأخذ الأس $n-k$

الحد الثاني في القوس يأخذ الأس k

$(x^n)^m = (x)^{n \cdot m}$

❶ أوجد مُعامل الحد الخامس في مفكوك :

$(4x-3y)^6$

❷ أوجد مُعامل الحد السادس في مفكوك :

$(2w-h^2)^9$

❸ أوجد الحد العاشر في مفكوك :

$\left(x^3 - \frac{1}{x}\right)^{12}$

❹ أوجد الحد السابع في مفكوك :

$\left(\frac{1}{x^2} + \frac{x}{2}\right)^8$

تم تحميل هذا الملف من
موقع المناهج البحرينية
alManahj.com/bh

تابع : بطاقة (5) ريض 262

أ./ عابدين

❺ تابع : نظرية ذات الحدين

ملاحظات

ملحوظة : إذا كان الحد مُشتمل على x^m ⇐ نضع أس x في هذا الحد $= m$

ملحوظة : الحد الخالي من x (أي يشتمل على x^0) ⇐ نضع أس x في هذا الحد $= 0$

تذكر أن

$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

❺ إذا كان الحد السادس في مفكوك $(7a+2)^n$ يشتمل على a^3 ، فما قيمة n ؟

ج : $n = 8$

❻ أوجد مُعامل الحد السابع في مفكوك :

$(x^2 - 6x + 9)^5$

ما عدد حدود المفكوك ؟

❼ أوجد مُعامل الحد الأوسط في مفكوك :

$(\sqrt{a} + \sqrt{b})^{12}$

❽ أوجد الحد الرابع من النهاية في مفكوك :

$(2x - \frac{1}{2}y)^{10}$

تم تحميل هذا الملف من
موقع المناهج البحرينية
alManahj.com/bh

٥ تابع : نظرية ذات الحدين

تابع : تمارين على الحد العام في مفكوك ذات الحدين

٩ في مفكوك $\left(x^2+\frac{1}{x}\right)^n$ ، إذا كان الحد السابع هو الخالي من x ، فما قيمة n ؟

ج : 9

١٠ في مفكوك $\left(x+\frac{1}{x}\right)^n$ إذا كان الحد السادس هو 252 ، فما عدد حدود المفكوك ؟

ج : 11

تم تحميل هذا الملف من
موقع المناهج البحرينية
alManahj.com/bh

١١ إذا كان $m\,p^4q^3$ أحد الحدود في مفكوك $\left(3p+\frac{1}{3}q\right)^n$ ، فما قيمة كلاً من $m\,,n$ ؟

ج : $n=7\,,\ m=105$

١٢ إذا كان $c\,x^5y^8$ أحد الحدود في مفكوك $\left(\frac{1}{2}x+2y^2\right)^n$ ، فما قيمة كلاً من $c\,,n$ ؟

ج : $n=9\,,\ c=63$

بطاقة (6) ريض 262

❻ البرهان بالاستقراء الرياضي

أ./ عابدين

الاستقراء الرياضي : هو طريقة لإثبات خطأ العبارات أو برهنة العبارات المتعلقة بالأعداد الطبيعية .

الفكرة الأولى [استعمال المثال المضاد لإثبات خطأ العبارة]

مجموعة الأعداد الأولية

$\{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, \ldots\}$

أعطِ مثالاً مضاداً يبيّن خطأ العبارة لكل (n أو x) عدد طبيعي :

❶ " $2^x + 2x^2$ يقبل القسمة على 4 "

الحـل : اختبر قيماً مختلفة للعدد x :

x	$2^x + 2x^2$	هل يقبل القسمة على 4
1	$2^1 + 2(1)^2 = 4$	نعم
2	$2^2 + 2(2)^2 = 12$	نعم
3	$2^3 + 2(3)^2 = 26$	لا

إذن ، $x = 3$ تعطي مثالاً مضاداً على العبارة .

❷ $5^n - 2n - 3$ يقبل القسمة على 3

❸ $1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(3n-1)}{2}$

الحـل : اختبر قيماً مختلفة للعدد n :

n	L.H.S الأيسر	R.H.S الأيمن	متساويان
1	$1^2 = 1$	$\frac{1(3-1)}{2} = 1$	نعم
2	$1^2 + 2^2 = 5$	$\frac{2(6-1)}{2} = 5$	نعم
3	$1^2 + 2^2 + 3^2 = 14$	$\frac{3(9-1)}{2} = 12$	لا

إذن ، $n = 3$ تعطي مثالاً مضاداً على العبارة .

❹ أعطِ مثالاً مضاداً يبين خطأ العبارة :

$1 + 4 + 7 + \cdots + (3n - 2) = n^3 - n^2 + 1$

أيّ مما يأتي يُعد مثالاً مضاداً لإثبات خطأ العبارة في كل ما يأتي حيث (n أو x) عدد طبيعي :

❺ " $n^2 + 3$ عدد زوجي "

A $n = 1$ C $n = 3$

B $n = 7$ D $n = 10$

❻ $2^x - 2x$ تقبل القسمة على 4

A $x = 3$ C $x = 6$

B $x = 4$ D $x = 8$

❼ " $x^2 + x + 5$ عدد أولي "

A $x = 1$ C $x = 3$

B $x = 2$ D $x = 4$

❽ $n^2 + n - 1$ عدد أولي

A $n = 1$ C $n = 3$

B $n = 2$ D $n = 4$

تحميل هذا الملف من موقع المناهج البحرينية
almanahj.com/bh

❻ البرهان بالاستقراء الرياضي

الفكرة الثانية [استعمال الاستقراء الرياضي في برهنة قابلية القسمة]

خطوات البرهان

① برهن أن العبارة صحيحة عندما $n = 1$.

② (فرضية الاستقراء) :
افترض أن العبارة صحيحة عندما $n = k$ حيث أن k عدد طبيعي .

③ برهن أن العبارة صحيحة عندما $n = k + 1$.

❶ برهن أن $12^n + 10$ يقبل القسمة على 11 لكل n عدد طبيعي (n عدد صحيح موجب) .

أولاً : نبرهن صحة العبارة عندما $n = 1$

$n = 1 \Rightarrow 12^n + 10 = 12 + 10 = 22$

يقبل القسمة على 11 $\therefore$ العبارة صحيحة عند $n = 1$

ثانياً : نفرض أن العبارة صحيحة عندما $n = K$

أي أن : $12^K + 10 = 11r \quad , r \in N$

(الفرضية) $\Rightarrow \quad 12^K = 11r - 10 \quad , r \in N$

ثالثاً : نبرهن أن العبارة صحيحة عندما $n = K + 1$

(الأسس) $12^{K+1} + 10 = 12 \cdot 12^K + 10$

(بالتعويض) $= 12 \cdot (11r - 10) + 10$

(بالتوزيع) $= 132r - 120 + 10$

(بالتبسيط) $= 132r - 110$

(عامل مشترك) $= 11\,(12r - 10)$

وهذا المقدار يقبل القسمة على 11 ، لكل $r \in N$

إذن $12^{K+1} + 10$ يقبل القسمة على 11

أي أن العبارة صحيحة عندما $n = K + 1$

من أولاً ، وثانياً ، وثالثاً ينتج أن :

$12^k + 1$ يقبل القسمة على 11 لكل n عدد طبيعي .

أي أن العبارة صحيحة لجميع قيم n الطبيعية .

❷ برهن أن $7^n - 1$ من مضاعفات العدد 6 (يقبل القسمة على 6) لكل n عدد طبيعي .

موقع المناهج البحرينية
alManahj.com/bh

❻ البرهان بالاستقراء الرياضي

الفكرة الثانية [استعمال الاستقراء الرياضي في برهنة قابلية القسمة]

تذكر أن $a^{m+n} = a^m \cdot a^n$ ، $b \cdot a^m \pm c \cdot a^n = (b \pm c) \cdot a^n$

❷ برهن أن $3^{2n} + 7$ من مضاعفات العدد 8 (يقبل القسمة على 8) لكل n عدد طبيعي .

أولاً : نبرهن صحة العبارة عندما $n = 1$

عندما $n = 1$ يكون $3^2 + 7 = 9 + 7 = 16$

يقبل القسمة على 8 ∴ العبارة صحيحة عند $n = 1$

ثانياً : نفرض أن العبارة صحيحة عندما $n = K$

أي أن : $3^{2K} + 7 = 8r \quad , r \in N$

$\Rightarrow \quad 3^{2K} = 8r - 7 \quad , r \in N$ (الفرضية)

ثالثاً : نبرهن أن العبارة صحيحة عندما $n = K + 1$

$3^{2(K+1)} + 7 = 3^2 \cdot 3^{2K} + 7$ (الأسس)

$= 9 \cdot (8r - 7) + 7$ (بالتعويض)

$= 72r - 63 + 7$ (بالتوزيع)

$= 72r - 56$ (بالتبسيط)

$= 8\,(9r - 7)$ (عامل مشترك)

وهذا المقدار يقبل القسمة على 8 ، لكل $r \in N$

إذن $3^{2(K+1)} + 7$ يقبل القسمة على 8

أي أن العبارة صحيحة عندما $n = K + 1$

من أولاً ، وثانياً ، وثالثاً ينتج أن :

$3^{2n} + 7$ يقبل القسمة على 8 لكل n عدد طبيعي

إذن ، العبارة صحيحة لجميع قيم n الطبيعية .

❸ برهن صحة العبارة الآتية لكل n عدد طبيعي :

$5^n - 3^n$ من مضاعفات العدد 2 .

تم تحميل هذا الملف من موقع المناهج البحرينية
alManahj.com/bh

❺ تدريب : برهن أن $7^n - 3^n$ يقبل القسمة على 4 لكل n عدد طبيعي .

⑥ البرهان بالاستقراء الرياضي

تذكر أن

$(k+1)^3 = k^3 + 3k^2 + 3k + 1$

$(k+1)^2 = k^2 + 2k + 1$

ملحوظة

في مفكوك $(k+1)^n$ إذا كانت $n > 3$ ، فإننا نستعمل نظرية ذات الحدين

⑥ برهن أن $n^3 + 2n$ يقبل القسمة على 3 لكل n عدد طبيعي .

أولاً : نبرهن صحة العبارة عندما $n = 1$

عندما $n = 1$ يكون $(1)^3 + 2(1) = 3$

يقبل القسمة على 3 ∴ العبارة صحيحة عند $n = 1$

ثانياً : نفرض أن العبارة صحيحة عندما $n = K$

أي أن : $k^3 + 2k = 3r \quad , r \in N$

$\Rightarrow k^3 = 3r - 2k \quad , r, k \in N$ (الفرضية)

ثالثاً : نبرهن أن العبارة صحيحة عندما $n = K + 1$

$(k+1)^3 + 2(k+1)$ (بالفك والتوزيع)

$= k^3 + 3k^2 + 3k + 1 + 2k + 2$

$= k^3 + 3k^2 + 5k + 3$ (بالتجميع)

(بالتعويض عن k^3 من فرضية الاستقراء)

$= 3r - 2k + 3k^2 + 5k + 3$

$= 3r + 3k + 3k^2 + 3$

$= 3(r + k + k^2 + 1)$

وهذا المقدار يقبل القسمة على 3 ، لكل $k, r \in N$

إذن $n^3 + 2n$ يقبل القسمة على 3

أي أن العبارة صحيحة عندما $n = K + 1$

من أولاً ، وثانياً ، وثالثاً ينتج أن :

$n^3 + 2n$ يقبل القسمة على 3 لكل n عدد طبيعي

أي أن العبارة صحيحة لجميع قيم n الطبيعية .

⑦ برهن أن $n^2 + n + 2$ يقبل القسمة على 2 لكل n عدد طبيعي .

تم تحميل هذا الملف من موقع المناهج البحرينية
alManahj.com/bh

❻ البرهان بالاستقراء الرياضي

الفكرة الثالثة : [استعمال الاستقراء في برهنة صحة المجموع]

① برهن أن العبارة صحيحة عندما $n = 1$.

② (فرضية الاستقراء) :
افترض أن العبارة صحيحة عندما $n = k$ حيث أن k عدد طبيعي .

③ برهن أن العبارة صحيحة عندما $n = k + 1$.

الوسيلة
ضع : $n = k + 1$
في الحد النوني (قبل =)

الهدف
ضع : $n = k + 1$
في الأيمن (بعد =)

❶ برهن صحة العبارة الآتية لكل n عدد طبيعي :

$$5 + 10 + 15 + \cdots + 5n = \frac{5n(n+1)}{2}$$

أولاً : نبرهن صحة العبارة عندما $n = 1$

$$R.H.S = \frac{5\times1\times(1+1)}{2} = 5 \quad ، \quad L.H.S = 5$$

$$L.H.S = R.H.S$$

إذن ، العبارة صحيحة عند $n = 1$

ثانياً : نفرض أن العبارة صحيحة عندما $n = K$

$$5 + 10 + 15 + \cdots + 5K = \frac{5K(K+1)}{2}$$ (الفرضية)

صحيحة لأي عدد طبيعي K .

ثالثاً : نبرهن أن العبارة صحيحة عندما $n = K + 1$

بإضافة $5(K + 1)$ لطرفي فرضية الاستقراء :

$$5 + 10 + 15 + \cdots + 5K + 5(K + 1)$$

$$= \frac{5K(K+1)}{2} + 5(K + 1)$$

$$= \frac{5K(K+1)}{2} + \frac{10(K+1)}{2}$$ (توحيد المقامات)

$$= \frac{5K(K+1)+10(K+1)}{2} = \frac{5(K+1)(K+2)}{2}$$

وهذا التعبير الأخير هو الطرف الأيمن من العبارة المطلوب إثبات صحتها عندما $n = K + 1$

إذن ، العبارة صحيحة عندما $n = K + 1$

من أولاً ، وثانياً ، وثالثاً ينتج أن :

العبارة المُعطاة صحيحة لأي عدد طبيعي n

❷ برهن صحة العبارة لكل n عدد صحيح موجب

$$1 + 2 + 3 + 4 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

الوسيلة : $(k + 1)$

الهدف : $\frac{(k+1)(k+2)}{2}$

موقع المناهج البحرينية
alManahj.com/bh

⑥ البرهان بالاستقراء الرياضي

تابع : الفكرة الثالثة

[استعمال الاستقراء الرياضي في برهنة صحة المجموع]

② برهن صحة العبارة لكل n عدد صحيح موجب

$$3+7+11+\cdots+(4n-1)=2n^2+n$$

أولاً : نبرهن صحة العبارة عندما $n=1$

$$L.H.S=3 \quad ، \quad R.H.S=2(1)^2+1=3$$

$$L.H.S=R.H.S$$

إذن ، العبارة صحيحة عند $n=1$

ثانياً : نفرض أن العبارة صحيحة عندما $n=K$

$$3+7+11+\cdots+(4k-1)=2k^2+k$$

(فرضية الاستقراء) صحيحة لأي عدد طبيعي K .

ثالثاً : نبرهن أن العبارة صحيحة عندما $n=K+1$

بإضافة $4(K+1)-1$ لطرفي فرضية الاستقراء

$$3+7+11+\cdots+(4k-1)+4(K+1)-1$$

$$=2k^2+k+4(K+1)-1$$

$$=2k^2+k+4k+4-1$$

$$=2k^2+5k+3 \qquad \text{(بالتبسيط)}$$

$$=2k^2+4k+2+k+1$$

$$=2(k^2+2k+1)+(k+1)$$

$$=2(k+1)^2+(k+1)$$

وهذا التعبير الأخير هو الطرف الأيمن من العبارة المطلوب إثبات صحتها عندما $n=K+1$

إذن ، العبارة صحيحة عندما $n=K+1$

من أولاً ، وثانياً ، وثالثاً ينتج أن :

$$3+7+11+\cdots+(4n-1)=2n^2+n$$

صحيحة لأي عدد طبيعي n (عدد صحيح موجب)

④ برهن صحة العبارة الآتية لكل n عدد طبيعي :

$$1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\frac{n\,(n+1)\,(2n+1)}{6}$$

⑤ برهن صحة العبارة : $1+4+7+\cdots+(3n-2)=\frac{n\,(3n-1)}{2}$ ، لكل $n\in N$

تم تحميل هذا الملف من موقع المناهج البحرينية
alManahj.com/bh

⑥ البرهان بالاستقراء الرياضي

تابع : الفكرة الثالثة

[استعمال الاستقراء الرياضي في برهنة صحة المجموع]

⑥ برهن صحة العبارة الآتية لكل n عدد طبيعي :

$$1+6+36+\cdots+6^{n-1}=\frac{1}{5}(6^n-1)$$

أولاً : نبرهن صحة العبارة عندما $n=1$

$$L.H.S=1=R.H.S=\frac{1}{5}(6^1-1)=1$$

إذن ، أن العبارة صحيحة عند $n=1$

ثانياً : نفرض أن العبارة صحيحة عندما $n=K$

$$1+6+36+\cdots+6^{k-1}=\frac{1}{5}(6^k-1)$$

(فرضية الاستقراء) صحيحة لأي عدد طبيعي K .

ثالثاً : نبرهن أن العبارة صحيحة عندما $n=K+1$

بإضافة $6^{(k+1)-1}$ لطرفي فرضية الاستقراء

$$1+6+36+\cdots+6^{k-1}+6^{(k+1)-1}$$

$$=\frac{1}{5}(6^k-1)+6^{(k+1)-1}$$

$$=\frac{1}{5}\times 6^k-\frac{1}{5}+6^k$$

$$=6^k\left(\frac{1}{5}+1\right)-\frac{1}{5}$$

$$=6^k\left(\frac{6}{5}\right)-\frac{1}{5}=\frac{1}{5}(6^k\times 6-1)$$

$$=\frac{1}{5}(6^{k+1}-1)$$

وهذا التعبير الأخير هو الطرف الأيمن من العبارة المطلوب إثبات صحتها عندما $n=K+1$

إذن ، العبارة صحيحة عندما $n=K+1$

من أولاً ، وثانياً ، وثالثاً ينتج أن :

العبارة المُعطاة صحيحة لأي عدد طبيعي n .

⑦ برهن صحة العبارة الآتية لكل n عدد طبيعي :

$$1+2+4+\cdots+2^{n-1}=2^n-1$$

⑧ برهن صحة العبارة الآتية لكل n عدد طبيعي :

$$3\times 4^1+3\times 4^2+3\times 4^3+\ldots\ldots+3\times 4^n=4\,(4^n-1)$$

تم تحميل هذا الملف من موقع المناهج البحرينية
alManahi.com/bh

⑥ البرهان بالاستقراء الرياضي

تابع : الفكرة الثالثة

[استعمال الاستقراء الرياضي في برهنة صحة المجموع]

⑨ برهن صحة العبارة الآتية لكل n عدد طبيعي

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$$

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = \left(\frac{n\,(n+1)}{2}\right)^2$$

أولاً : نبرهن صحة العبارة عندما $n = 1$

$$L.H.S = 1 = R.H.S = \left(\frac{1\,(1+1)}{2}\right)^2 = 1$$

إذن ، العبارة صحيحة عند $n = 1$

ثانياً : نفرض أن العبارة صحيحة عندما $n = K$

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + k^3 = \left(\frac{k\,(k+1)}{2}\right)^2$$

(فرضية الاستقراء) صحيحة لأي عدد طبيعي K .

ثالثاً : نبرهن أن العبارة صحيحة عندما $n = K + 1$

بإضافة $(k+1)^3$ إلى طرفي فرضية الاستقراء

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + k^3 + (k+1)^3$$

$$= \left(\frac{k\,(k+1)}{2}\right)^2 + (k+1)^3$$

$$= \frac{k^2\,(k+1)^2}{4} + \frac{4\times(k+1)^3}{4\times 1}$$

$$= \frac{k^2\,(k+1)^2 + 4(k+1)^3}{4}$$ (توحيد مقامات)

$$= \frac{(k+1)^2\,(k^2+4k+4)}{4}$$ (عامل مشترك)

$$= \frac{(k+1)^2\,(k+2)^2}{4}$$ (بالتحليل)

وهذا التعبير الأخير هو الطرف الأيمن من العبارة المطلوب إثبات صحتها عندما $n = K + 1$

إذن ، العبارة صحيحة عندما $n = K + 1$

من أولاً ، وثانياً ، وثالثاً ينتج أن :

العبارة المُعطاة صحيحة لأي عدد طبيعي n .

⑩ برهن صحة العبارة الآتية لكل n عدد طبيعي

$$\sum_{k=1}^{n} (2k-1) = n^2$$

تم تحميل هذا الملف من موقع المناهج البحرينية
alManahj.com/bh

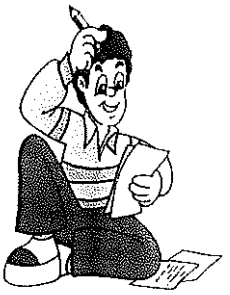
2 / ث
ف 2

سلسلة التفوق

2 / ث
ف 2

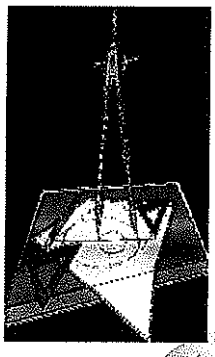
في الرياضيات

ريض 262

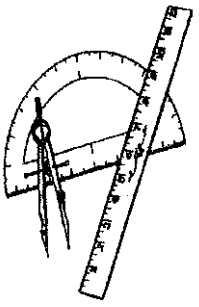


الوحدة الثانية

الدوال المثلثية



إعداد : أ. عابدين حامد فؤاد



اسم الطـــالب : .....

ملحوظة : هذه المذكرة ليست بديلاً عن الكتاب المدرسي (الكتاب هو المرجع)

نسألكم الدعاء ، مع تمنياتي للجميع بالنجاح والتفوق

أ./ عابدين

⑦ الدوال المثلثية في المثلثات القائمة

ريض 262

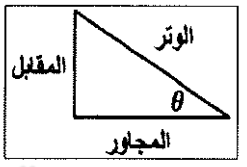
مفهوم أساسي

أضف إلى مفضلتك

الدوال المثلثية في مثلث قائم الزاوية

التعبير اللفظي إذا كانت θ تمثل قياس زاوية حادة في مثلث قائم الزاوية، فإن الدوال المثلثية الست تعرّف بدلالة الوتر والضلع المقابل والضلع المجاور.

بالرموز



$\sin\theta$ (جيب θ) $= \frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}}$

$\cos\theta$ (جيب تمام θ) $= \frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}}$

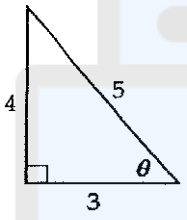
$\tan\theta$ (ظل θ) $= \frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}}$

$\csc\theta$ (قاطع تمام θ) $= \frac{\text{الوتر}}{\text{المقابل}}$

$\sec\theta$ (قاطع θ) $= \frac{\text{الوتر}}{\text{المجاور}}$

$\cot\theta$ (ظل تمام θ) $= \frac{\text{المجاور}}{\text{المقابل}}$

أمثلة



$\sin\theta = \frac{4}{5}$ $\quad \csc\theta = \frac{5}{4}$

$\cos\theta = \frac{3}{5}$ $\quad \sec\theta = \frac{5}{3}$

$\tan\theta = \frac{4}{3}$ $\quad \cot\theta = \frac{3}{4}$

تم تحميل هذا الملف من موقع المناهج البحرينية
almanahj.com/bh

مقلوبات الدوال المثلثية

أ./ عابدين

$$\csc\theta = \frac{1}{\sin\theta} \Rightarrow \sin\theta = \frac{1}{\csc\theta} \Rightarrow \sin\theta \cdot \csc\theta = 1$$

$$\sec\theta = \frac{1}{\cos\theta} \Rightarrow \cos\theta = \frac{1}{\sec\theta} \Rightarrow \cos\theta \cdot \sec\theta = 1$$

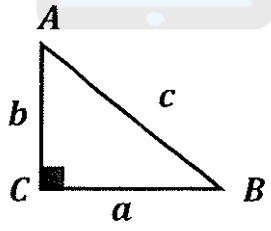
$$\cot\theta = \frac{1}{\tan\theta} \Rightarrow \tan\theta = \frac{1}{\cot\theta} \Rightarrow \tan\theta \cdot \cot\theta = 1$$

$$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} \Rightarrow \cot\theta = \frac{\cos\theta}{\sin\theta}$$

تُفيد لو حسبنا بالحاسبة قيمة الدوال المثلثية للزوايا الرُبعية

$$\cot 90^\circ = \frac{\cos 90^\circ}{\sin 90^\circ} = 0$$

نظرية فيثاغورس



$$c = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$a = \sqrt{c^2 - b^2}$$

$$b = \sqrt{c^2 - a^2}$$

معكوس النسب المثلثية

إذا كانت $\angle A$ حادة :

$$\sin A = x \Rightarrow m\angle A = \sin^{-1}(x)$$

$$\cos A = x \Rightarrow m\angle A = \cos^{-1}(x)$$

$$\tan A = x \Rightarrow m\angle A = \tan^{-1}(x)$$

أمثلة على المعكوسات

SHIFT sin (x)
SHIFT cos (x)
SHIFT tan (x)

$$\tan A = \sqrt{3} \Rightarrow m\angle A = \tan^{-1}(\sqrt{3}) = 60^\circ$$

$$\sin A = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow m\angle A = \sin^{-1}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 45^\circ$$

$$\sec A = 2 \Rightarrow \cos A = \frac{1}{\sec A} = \frac{1}{2} \Rightarrow m\angle A = \cos^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) = 60^\circ$$

تابع : بطاقة (7) ريض 262

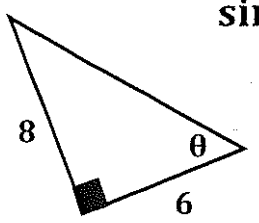
⑦ الدوال المثلثية في المثلثات القائمة

أ./ عابدين

إيجاد قيم الدوال المثلثية

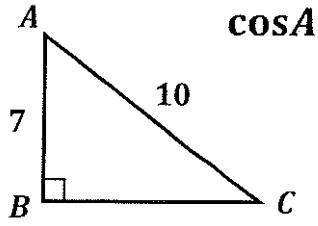
① في الشكل المجاور أوجد القيمة الفعلية لـ :

$\sin\theta$, $\tan\theta$, $\sec\theta$



② في الشكل المجاور أوجد القيمة الفعلية لـ :

$\cos A$, $\cot A$, $\csc A$



③ $\angle B$ حادة في مثلث قائم الزاوية ، فإذا كان $\sin B = \frac{8}{17}$ ، فما قيمة $\sec B$ ؟

④ ABC مثلث قائم الزاوية في B ، فإذا كان $\tan A = \frac{5}{3}$ ، فما قيمة $\csc A$ ؟

⑤ تدريب : $\angle A$ حادة في مثلث قائم الزاوية ، فإذا كان $\tan A = \frac{20}{21}$ ، فما قيمة $\cos A$ ؟

تم تحميل هذا الملف من
موقع المناهج البحرينية
alManahj.com/bh

ريض 262

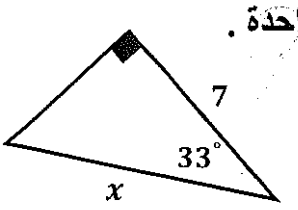
❼ الدوال المثلثية + معكوساتها

أ./ عابدين

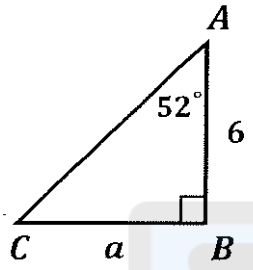
ملحوظة : يُرمز لرؤوس المثلث بحروف كبيرة (capital) ، والأضلاع المقابلة بحروف صغيرة (small)

إيجاد طول ضلع مجهول + إيجاد قياس زاوية مجهولة

❶ استعمل دالة مثلثية لإيجاد قيمة x مُقربة إلى أقرب منزلة عشرية واحدة .

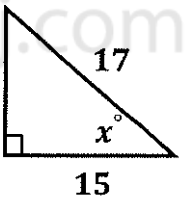


❷ استعمل دالة مثلثية لإيجاد قيمة a مُقربة إلى أقرب رقم عشري واحد .



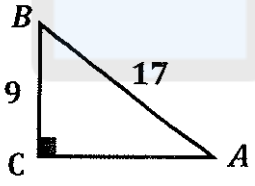
❸ أوجد قيمة x مُقربة إلى أقرب عدد صحيح :

[الجواب : 28]



❹ أوجد قياس زاوية A مُقرباً لأقرب درجة :

[الجواب : 32°]



❺ إذا كان المثلث ABC قائم الزاوية في B ، وكان $m\angle C = 40^\circ$ ، فما قيمة $\csc A$ ؟

A 1.556

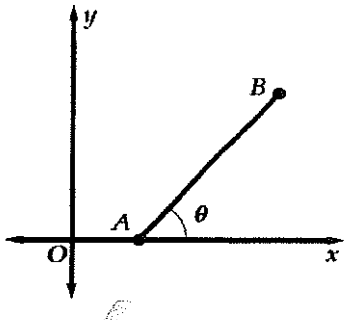
B 1.305

C 0.766

D 0.643

❻ في الشكل المجاور : $A(2,0)$, $B(6,5)$

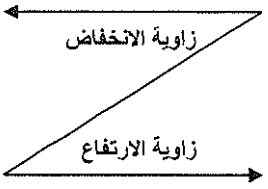
ما قياس الزاوية θ ؟ [الجواب : 51.3°]



تم تحميل هذا الملف من موقع المناهج البحرينية
almanahj.com/bh

⑦ الدوال المثلثية + معكوساتها

زوايا الارتفاع والانخفاض : هي الزاوية المحصورة بين خط النظر من الراصد إلى المرصود والخط الأفقي .



ملحوظة : زاويتا الارتفاع والانخفاض زاويتان متطابقتان ، لأنهما متبادلتان .

① صنع أحمد منحدر تزحلق يُشكل مع سطح الأرض قياسها 20° . إذا كان طول اللوح يساوي 3.5 ft ، فما ارتفاع أعلى نقطة في المنحدر مقرباً لأقرب قدم .

[الجواب : 1 ft]

② ترتفع مؤخرة شاحنة بمقدار 3 ft عن سطح الأرض ، ما طول سطح مائل يمكن وضعه على مؤخرة الشاحنة بحيث تكون زاوية ارتفاعه عن سطح الأرض 20° لأقرب منزلة عشرية واحدة ؟

[ج : 8.8 ft]

③ وقف محمد عند إحدى شجرتين متقابلتين على حافتي وادٍ . وعندما تحرّك مسافة 100 ft مبتعداً عن الشجرة وموازياً لحافة الوادي، تشكّلت زاوية قياسها 70° بين موقعه الجديد وموقعي الشجرتين أوجد المسافة بين الشجرتين لأقرب عُشر .

وضّح برسم توضيحي .

[ج : 274.7 ft]

④ تطير طائرة على ارتفاع 528 ft ، قرّر قائد الطائرة أن يهبط اضطرارياً بسبب عاصفة جوية . إذا كان قياس زاوية الانخفاض التي يجب أن يهبط بها 18.8° ، فما المسافة الأفقية التي يقطعها أثناء الهبوط مقرباً لأقرب قدم ؟ وضّح الموقف برسم توضيحي .

[ج : 1551 ft]

تم تحميل هذا الملف من موقع المناهج البحرينية
alManahj.com/bh

⑦ الدوال المثلثية + معكوساتها

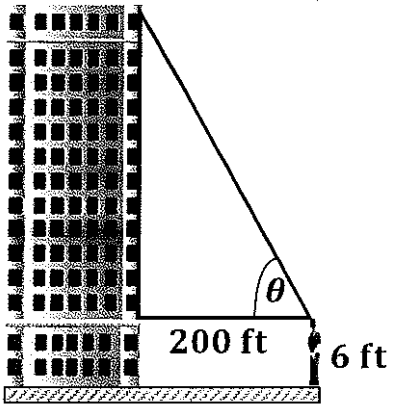
تابع : استعمال زوايا الارتفاع والانخفاض

⑤ يقوم عامل بصيانة سقف منزل ، فيقف على سلم تصل قمته لإرتفاع 7 ft عن سطح الأرض إذا كانت زاوية الارتفاع من قاعدة السلم إلى قمته تساوي 70° ، فكم تبعُد قاعدة السلم عن قاعدة الحائط لأقر ب عُشر . [الجواب : 2.5 ft]

⑥ قياس زاوية ارتفاع السلم المُوصى بها لمكافحة الحرائق هو 75° ، إلى أي ارتفاع على بناية يمكن لسلم طوله 21 ft أن يصل ، إذا تم الاعتماد على زاوية الارتفاع الموصى بها لأقرب رقم عشري . [ج : 20.3 ft]

تم تحميل هذا الملف من
موقع المناهج البحرينية
alManahj.com/bh

⑦ استعمل محمد جهاز قياس زاوية الميل لقياس الزاوية θ المحصورة بين خط نظره المار بقمة البناية والخط الأفقي . إذا كان ارتفاع البناية في الشكل أدناه يساوي 808 ft تقريباً ، فأوجد قياس الزاوية θ لأقرب درجة . [الجواب : 76°]

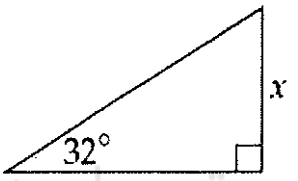


⑧ تنظر فاطمة نحو عش طائر على شجرة بزاوية قياسها 75° ، إذا كان مستوى نظرها يرتفع 5 ft عن سطح الأرض ، وكانت تقف على 12 ft من قاعدة الشجرة . فما ارتفاع عُشّ الطائر عن سطح الأرض لأقرب قدم ؟ وضّح بالرسم . [ج : 50 ft]

⑦ نشاط : اختبر نفسك

تدريب : اختر الإجابة الصحيحة في كل مما يأتي (علماً بأنه توجد إجابة واحدة فقط صحيحة) .

① ما قيمة x بالشكل الموضّح أدناه ؟ ، مُقربة إلى أقرب منزلة عشرية واحدة .



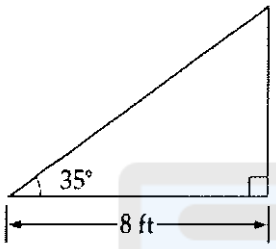
A 8.7

B 11.9

C 7.4

D 22.4

② ما طول منحدر الدراجات الهوائية الموضّح بالشكل أدناه ، لأقرب رقم عشري واحد ؟



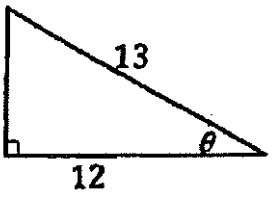
A 4.4 ft

B 6.6 ft

C 9.8 ft

D 13.9 ft

③ قياس الزاوية θ بالدرجات في الشكل المجاور إلى أقرب عُشر يساوي :



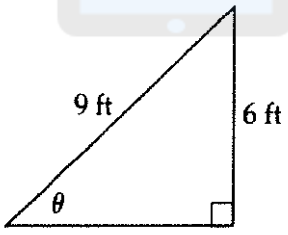
A 22.6°

B 42.7°

C 47.3°

D 67.4°

④ ما زاوية ارتفاع المنحدر بالشكل أدناه ، مُقرباً الجواب لأقرب درجة ؟



A 34°

B 42°

C 48°

D 56°

⑤ سلم طوله 4 m يستند إلى جدار منزل بزاوية ارتفاع قياسها 72° . ما ارتفاع قمة السلم عن سطح الأرض قاعدة لأقرب رقم عشري واحد ؟

A 1.2 m

B 1.3 m

C 3.8 m

D 4.2 m

⑥ عندما وقف محمد على بُعد 18 ft من قاعدة شجرة ، شكّل زاوية قياسها 57° مع قمة الشجرة ، فما ارتفاع الشجرة لأقرب أقرب منزلة عشرية ؟

A 27.7 ft

B 28.5 ft

C 29.2 ft

D 30.1 ft

تم تحميل هذا الملف من موقع المناهج البحرينية
almanahj.com/bh

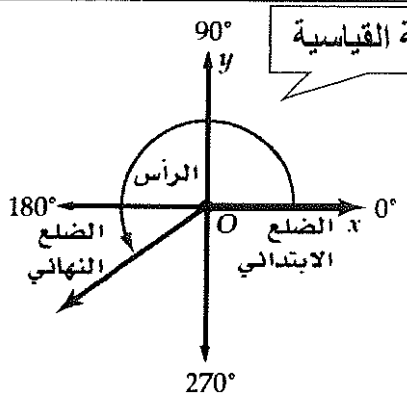
بطاقة (8) ريض 262

⑧ الزوايا وقياس الزاوية

أ./ عابدين

الزوايا في الوضع القياسي تكون الزاوية المرسومة في المستوى الإحداثي في **الوضع القياسي**، إذا كان رأسها نقطة الأصل، وأحد ضلعيها منطبقًا على الجزء الموجب من المحور x.

- يُسمّى الضلع المنطبق على المحور x **الضلع الابتدائي** للزاوية.
- يُسمّى الضلع الذي يدور حول نقطة الأصل **الضلع النهائي**.

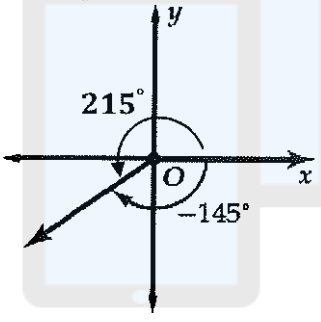


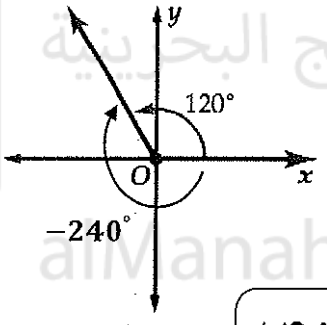
مفهوم أساسي

قياسات الزوايا

إذا كان قياس زاوية موجبًا يكون الضلع النهائي قد دار بعكس حركة عقارب الساعة.

وإذا كان قياس زاوية سالبًا، يكون الضلع النهائي قد دار مع حركة عقارب الساعة.





أي زاوية في الوضع القياسي لها قياسان أحدهما موجب والأخر سالب ومجموعهما العددي يساوي 360°

$30^\circ = \frac{\pi}{6}$	$60^\circ = \frac{\pi}{3}$	الدورة الكاملة $360^\circ = 2\pi$ rad

الزوايا المتكافئة : هي الزوايا المشتركة في الضلع النهائي .
ونحصل على الزوايا المتكافئة بإضافة أو طرح دورات كاملة (مضاعفات 360°)

ثُمن الدورة $45^\circ = \frac{\pi}{4}$ rad		نصف الدورة $180^\circ = \pi$ rad
	العلاقة بين القياس بالدرجات والراديان	
		رُبع الدورة $90^\circ = \frac{\pi}{2}$ rad

مفهوم أساسي

التحويل من القياس بالدرجات إلى القياس بالراديان وبالعكس

القياس بالدرجات إلى القياس بالراديان	القياس بالراديان إلى القياس بالدرجات
للتحويل من القياس بالدرجات إلى القياس بالراديان، اضرب قياس الزاوية بالدرجات في $\frac{\pi \text{ rad}}{180^\circ}$	للتحويل من القياس بالراديان إلى القياس بالدرجات، اضرب قياس الزاوية بالراديان في $\frac{180^\circ}{\pi \text{ rad}}$

عندما لا نضع وحدة لقياس زاوية فتكون وحدة القياس هي الراديان

نضرب القياس في $\frac{\pi}{180^\circ}$ | نضرب القياس في $\frac{180^\circ}{\pi}$ أو ضع π بـ 180°

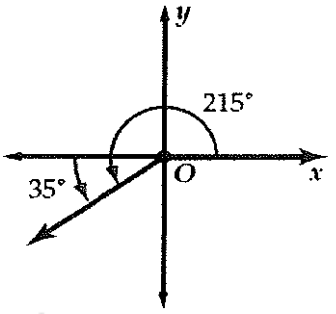
تابع : بطاقة (8) ريض 262

٨ الزوايا وقياس الزاوية

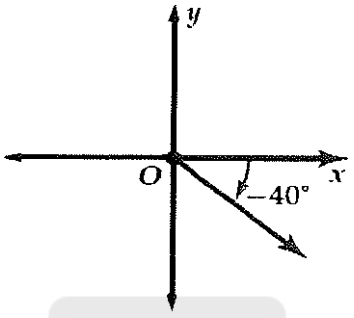
أ./ عابدين

تدريب : ارسم كل من الزوايا الآتية في الوضع القياسي .

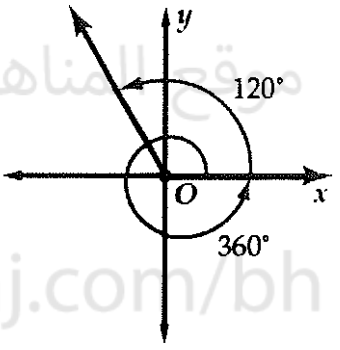
١ 215°



٢ -40°

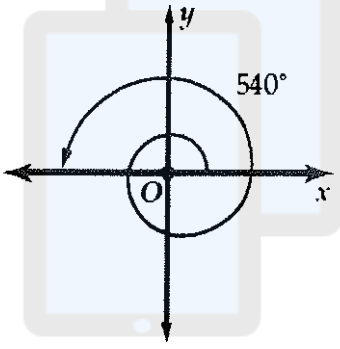


٣ 480°



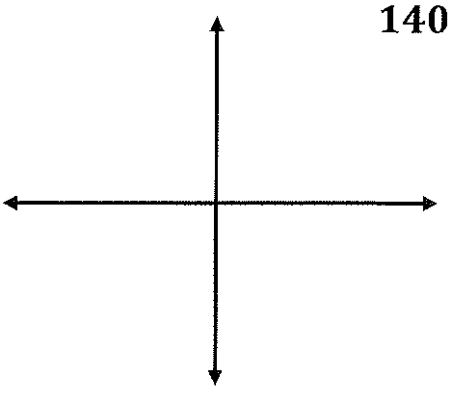
$480^\circ = 360^\circ + 120^\circ$

٤ 540°

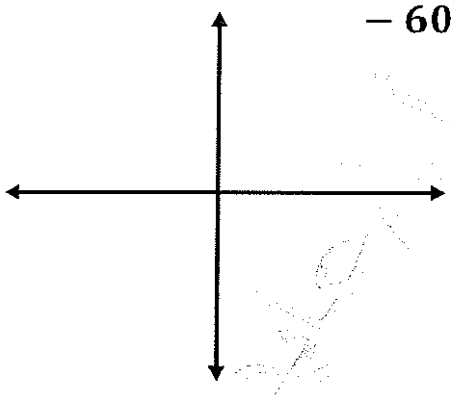


$540^\circ = 360^\circ + 180^\circ$

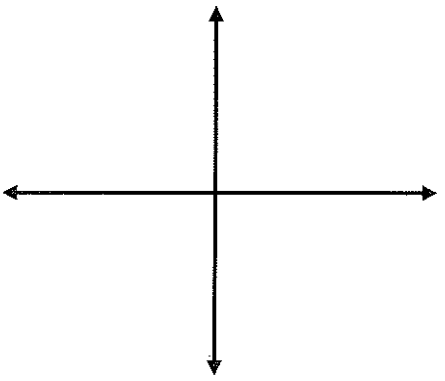
٥ 140°



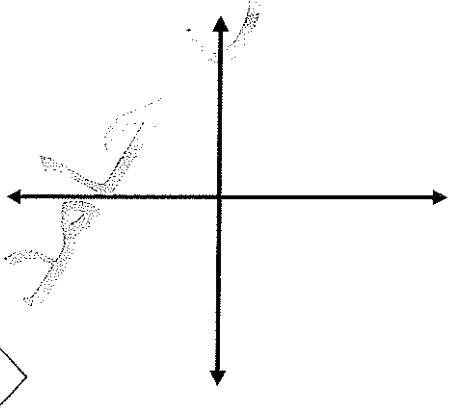
٦ -60°



٧ 600°



٨ -400°



تم تحميل هذا الملف من موقع المناهج البحرينية
alManahj.com/bh

تابع : بطاقة (8) ريض 262

⑧ الزوايا وقياس الزاوية

أ./ عابدين

إيجاد الزوايا المشتركة في الضلع النهائي (الزوايا المتكافئة) ⇐ بإضافة أو طرح مضاعفات 360°

من راديان إلى درجات : نضرب في $\frac{180^\circ}{\pi}$ أو ضع π بـ 180°

من درجات إلى راديان : نضرب في $\frac{\pi}{180^\circ}$

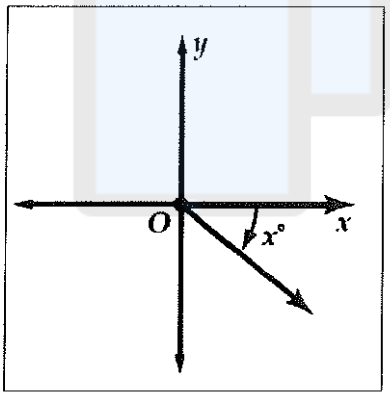
أوجد زاوية بقياس موجب ، وأخرى بقياس سالب مشتركتين في الضلع النهائي مع كل زاوية مما يأتي :

① 25°

② 130°

③ -200°

④ اكتشف الخطأ : يكتب كل من علي وأحمد تعبيراً يُمثِّل قياس الزاوية المشتركة في الضلع النهائي مع الزاوية الظاهرة في الشكل المجاور . أيهما إجابته صحيحة ؟ برّر إجابتك ؟



علي	أحمد
قياس الزاوية المشتركة في الضلع النهائي هو $(x-360)^\circ$	قياس الزاوية المشتركة في الضلع النهائي هو $(360-x)^\circ$

حوّل قياس الزاوية المكتوب بالدرجات إلى الراديان ، والمكتوب بالراديان إلى الدرجات فيما يأتي :

⑤ -40°

⑥ 330°

⑦ $\frac{5\pi}{6}$

⑧ $-\frac{7\pi}{3}$

⑨ $ABCD$ متوازي أضلاع فيه : $m\angle B = 120^\circ$ ، فما قيمة $m\angle A$ بالراديان ؟

A $\frac{\pi}{6}$ C $\frac{\pi}{3}$

B $\frac{\pi}{4}$ D $\frac{2\pi}{3}$

تم تحميل هذا الملف من موقع المناهج البحرينية
alManahj.com/bh

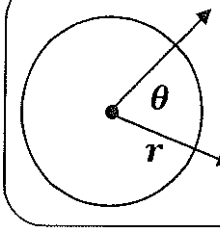
ريض 262

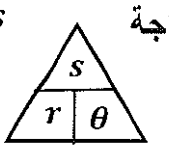
أ./ عابدين

٨ إيجاد طول القوس

r : نصف قطر الدائرة ، θ : قياس الزاوية المركزية (زاوية الدوران) بالراديان

s : طول القوس (المسافة / المسافة الأفقية) التي تتحركها سيارة أو دراجة

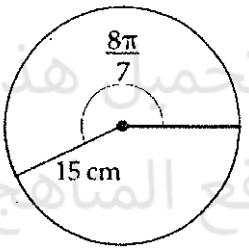




المسافة = السرعة × الزمن

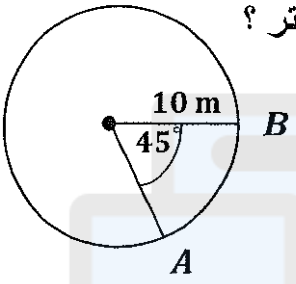
(طول القوس) $s = r \cdot \theta$

١ ما طول القوس المقابل للزاوية $\frac{8\pi}{7}$ في الشكل أدناه مُقرباً الناتج إلى أقرب جزء من عشرة ؟



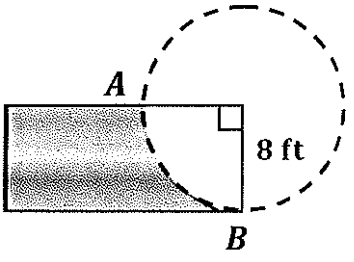
[الجواب : 53.9 cm]

٢ أوجد طول القوس $\overset{\frown}{AB}$ الأكبر في الدائرة أدناه مُقرباً الناتج إلى أقرب متر ؟



[الجواب : 55 m]

٣ يُبيّن الشكل أدناه منحدر تزلج يُسمى رُبع أنبوبة ، ومقطعه AB يُمثّل قوساً من دائرة . ما طول هذا القوس إلى أقرب قدم ؟



A 6 ft

B 13 ft

C 25 ft

D 50 ft

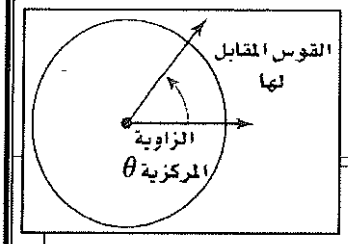
٤ دار لاعب تنس في مسار على شكل قوس أثناء ضربة الكرة من الثبات . إذا كان طول قطر دائرة القوس 8 ft ، وزاوية دوران اللاعب تساوي 100° ، فما طول هذا القوس إلى أقرب قدم ؟

[الجواب : 7 ft]

تم تحميل هذا الملف من موقع المناهج البحرينية
alManahj.com/bh

ريض 262

⑧ تابع : إيجاد طول القوس



ملاحظات : ① محيط الدائرة $= 2\pi r$ ② مساحة الدائرة $= \pi r^2$

③ قياس الزاوية المركزية = قياس القوس المقابل لها

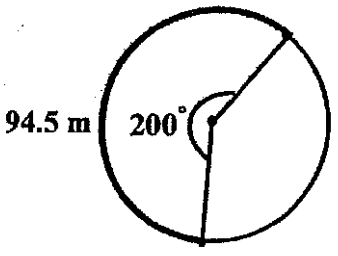
④ قياس الزاوية المركزية $= 2 \times$ قياس الزاوية المحيطية المشتركة معها في القوس

⑤ أوجد بالدرجات قياس الزاوية المركزية التي تحصر قوساً طوله 8 cm في دائرة مساحة سطحها يساوي $16\pi\text{ cm}^2$ (لأقرب درجة) .

⑥ أوجد طول القوس الذي يقابل زاوية محيطية قياسها 22.5° في دائرة طول محيطها يساوي $40\pi\text{ in}$ (لأقرب منزلة عشرية واحدة) .

تم تحميل هذا الملف من
موقع المناهج البحرينية
alManahj.com/bh

⑦ أوجد طول نصف قطر الدائرة المحدّد طول قوسها بالشكل :



ج : $r = 27\text{ m}$

⑧ أوجد قياس زاوية مركزية في دائرة بالدرجات ، بحيث تقابل قوساً طوله $\frac{1}{6}$ محيط هذه الدائرة .

[الجواب : $\theta = \frac{\pi}{3}\text{ rad} = 60^\circ$]

⑧ تابع : إيجاد طول القوس

تابع : تطبيقات حياتية على طول القوس

⑨ دراجة هوائية طول القطر لإطاراتها 20 in ، ما المسافة الأفقية التي تقطعها الدراجة عندما تدور إطاراتها دورتين وأربعة أخماس الدورة من بدء حركتها ؟

[الجواب : 56π in]

⑩ ما طول قطر إطار سيارة ، إذا كانت المسافة التي تقطعها هي 63π in عندما تكمل إطاراتها دورة كاملة وثلاثة أرباع الدورة من بدء حركتها ؟

[الجواب : 36 in]

⑪ إذا كان قياس زاوية دوران أرجوحة يساوي 165° ، فإذا كان طول حبل الأرجوحة 6.5 ft ، فما طول القوس الذي تصنعه الأرجوحة عند دورانها ؟ مُقرباً لأقرب منزلة عشرية واحدة .

[الجواب : 18.7 ft]

⑫ ما قياس الزاوية التي يكوّنها عقرب الساعات عندما يدور من الساعة 4 مساءً ، وحتى الساعة 7 مساءً بالدرجات ؟ وإذا كان طول العقرب 6 in ، فما طول القوس الذي يرسمه في هذا الزمن ؟

[الجواب : 9.4 in]

تم تحميل هذا الملف من موقع المناهج البحرينية
alManahj.com/bh

٨ تابع : إيجاد طول القوس

ملاحظات هامة : ① البوصة (in) = 2.5 سم (cm) . ② القدم (ft) = 12 بوصة (in) .
③ القدم (ft) = 30 سم (cm) . ④ اليادرة (yd) = 3 قدم (ft) .

⑫ يبلغ طول قطر إطارات الشاحنات العملاقة 66 in . ما المسافة التي تقطعها الشاحنة بالقدم بعد أن تدور إطاراتها ثلاثة أرباع دورة ؟

[الجواب : 155.5 in = 13 ft]

⑬ مزولة (الساعة الشمسية) طول نصف قطرها 8 in ، ويدور الظل على القرص بزاوية 15° كل ساعة . ما طول القوس الذي يصنعه دوران الظل على القرص بعد مرور 14 h ؟ مقرباً الناتج إلى أقرب رقم عشري واحد .

[الجواب : 29.3 in]

⑮ إطار دراجة هوائية يدور 8 دورات في الدقيقة إذا كان طول نصف قطر الإطار 15 in فأوجد بالراديان قياس الزاوية θ التي يدورها الإطار في ثانية واحدة وكذلك المسافة التي تقطعها الدراجة في ثانية .

[الجواب : $s = 4\pi$ in , $\theta = \frac{4\pi}{15}$]

⑯ شاحنة طول نصف قطر إطاراتها 16 in تسير بسرعة 77 ft/sec ، أوجد قياس الزاوية بالدرجات التي تدورها نقطة تقع على حافة أحد إطاراتها كل ثانية (لأقرب عدد صحيح) .

[$s = 924$ in , $\theta = 57.75$ rad $\approx 3309^\circ$]

تم تحميل هذا الملف من موقع المناهج البحرينية
alManahj.com/bh

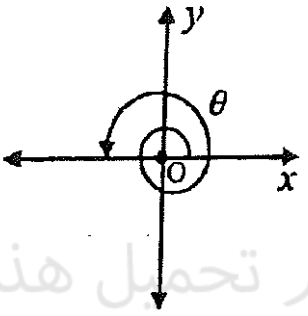
تابع : بطاقة (8) ريض 262

٨ نشاط : اختبر نفسك

أ./ عابدين

تدريب : اختر الإجابة الصحيحة في كل مما يأتي (علماً بأنه توجد إجابة واحدة فقط صحيحة) .

١ قياس الزاوية θ بالدرجات المرسومة في الوضع القياسي بالشكل أدناه يساوي :



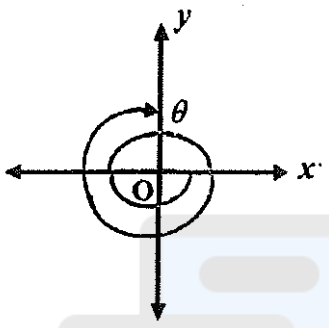
A -180°

B -540°

C 180°

D 540°

٢ قياس الزاوية θ بالراديان المرسومة في الوضع القياسي بالشكل أدناه يساوي :



A $\frac{3\pi}{2}$

B $\frac{7\pi}{2}$

C $-\frac{7\pi}{2}$

D -3π

٣ إذا كان قياس الزاوية x المرسومة بالوضع القياسي يساوي (-100°) ، فإن قياس الزاوية المشتركة مع x في الضلع النهائي يساوي :

A 80°

B 460°

C 100°

D -460°

٤ في الوضع القياسي ، أي من الزوايا الآتية مشتركة في الضلع النهائي مع الزاوية $\frac{5\pi}{6}$ ؟

A $\frac{\pi}{6}$

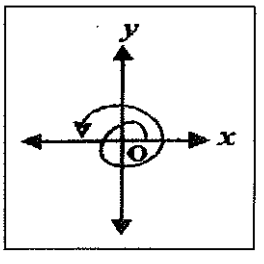
B $-\frac{7\pi}{6}$

C $-\frac{5\pi}{6}$

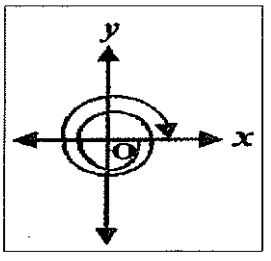
D $-\frac{\pi}{6}$

٥ نفذ غواص في مسابقة الغوص دورة مقدارها 900° من منطقة الوثب قبل أن يغطس في الماء . أي شكل أدناه يوضح الوضع القياسي لهذه الزاوية ؟

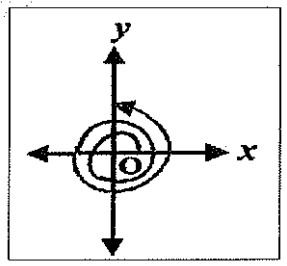
A



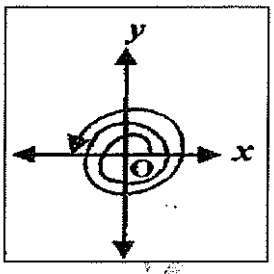
B



C



D



٦ مستقيم يصنع زاوية قياسها $\frac{\pi}{2}$ مع الجزء الموجب للمحور x عند النقطة $(2,0)$ ، فما معادلته ؟

A $x = 0$

B $y = 0$

C $x = 2$

D $y = 2$

تم تحميل هذا الملف من موقع المنهج البحريني
alManahj.com/bh

٨ نشاط : اختبر نفسك

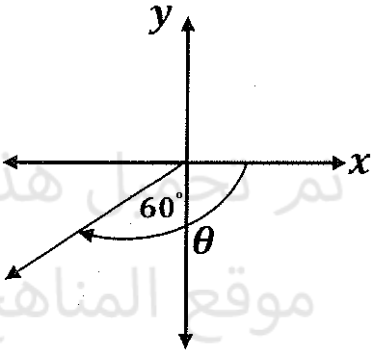
زمن دورة عقرب الثواني = 1 min = 60 sec

زمن دورة عقرب الدقائق = 1 h = 60 min

دورة عقرب الثواني أو الدقائق أو الساعات تساوي 360° أو 2π

زمن دورة عقرب الساعات = 12 h

٧ ما قياس الزاوية θ المرسومة في الوضع القياسي في الشكل المجاور ؟



A $\frac{5\pi}{6}$

B $\frac{\pi}{6}$

C $-\frac{\pi}{6}$

D $-\frac{5\pi}{6}$

٨ ما قياس الزاوية بالراديان التي يدورها عقرب الساعات من الساعة 6 صباحاً إلى 9 مساءً ؟

A $\frac{\pi}{6}$

B $\frac{\pi}{2}$

C $\frac{5\pi}{2}$

D $\frac{9\pi}{4}$

٩ كم من الوقت يستغرق عقرب الدقائق في ساعة حائط ، ليدور بزاوية قياسها $2.5\ \pi$ ؟

A 1 h

B 1.5 h

C 45 min

D 75 min

١٠ ما الوقت الذي يستغرقه عقرب الساعات في ساعة حائط ، ليدور بزاوية قياسها 3π ؟

A 18 h

B 30 h

C 36 h

D 90 h

١١ طول القوس الذي يقابل زاوية مركزية قياسها 60° في دائرة قطرها 9 cm إلى أقرب منزلة عشرية واحدة يساوي :

A 9.4 cm

B 4.7 cm

C 270 cm

D 540 cm

١٢ ما طول القوس الذي يحصر زاوية قياسها $\frac{4\pi}{9}$ في دائرة طول قطرها 90 in ؟

A 40 in

B 20 in

C 40π in

D 20π in

تم تحميل هذا الملف من موقع المناهج الإماراتية
almanahj.com/ae

بطاقة (9) ريض 262

أ./ عابدين

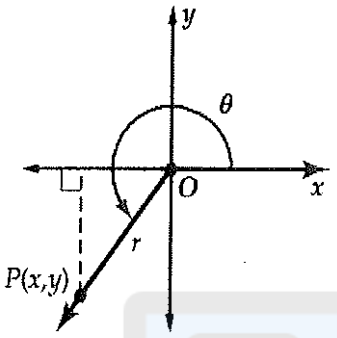
⑨ الدوال المثلثية للزوايا

مفهوم أساسي

أضف إلى مطويتك

الدوال المثلثية للزوايا

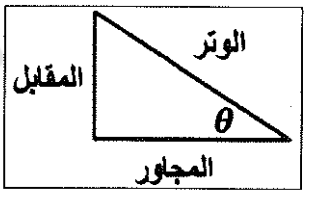
لتكن θ زاوية مرسومة في الوضع القياسي وتقابلها نقطة وحيدة $P(x, y)$ تقع على الضلع النهائي لها. باستعمال نظرية فيثاغورس يمكن إيجاد قيمه r، $r = \sqrt{x^2 + y^2}$. فتكون الدوال المثلثية الست للزاوية θ معرفة كما يأتي:

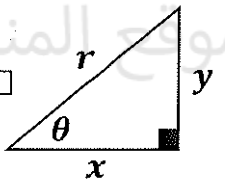


$$\sin\theta = \frac{y}{r} \qquad \cos\theta = \frac{x}{r} \qquad \tan\theta = \frac{y}{x},\ x \neq 0$$

$$\csc\theta = \frac{r}{y},\ y \neq 0 \qquad \sec\theta = \frac{r}{x},\ x \neq 0 \qquad \cot\theta = \frac{x}{y},\ y \neq 0,$$

تم تحميل هذا الملف من موقع المناهج البحرينية
almanahj.com/bh





$$r^2 = x^2 + y^2 \quad \Rightarrow \quad r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$x = \pm\sqrt{r^2 - y^2}\ ,\ y = \pm\sqrt{r^2 - x^2}$$

إشارة r دائماً $+$
إشارة x , y تُحدّد على حسب الرُبع

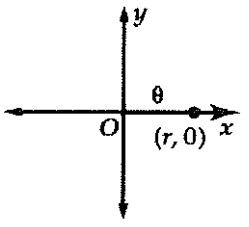
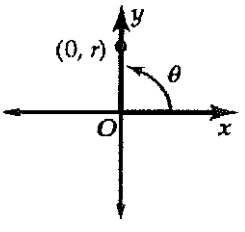
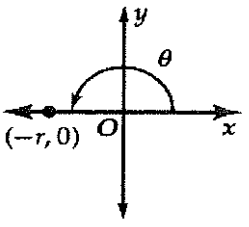
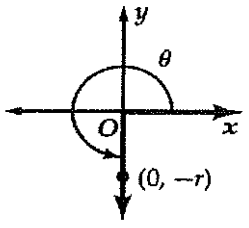
الرُبع الثاني	الرُبع الأول
$x-$, $y+$, $r+$	$x+$, $y+$, $r+$
الرُبع الثالث	**الرُبع الرابع**
$x-$, $y-$, $r+$	$x+$, $y-$, $r+$

بالحاسبة — الدوال المثلثية للزوايا الربعية والزوايا الخاصة — بالحاسبة

مفهوم أساسي

أضف إلى مطويتك

الزوايا الربعية

$\theta = 0°$ أو $\theta = 0$	$\theta = 90°$ أو $\theta = \frac{\pi}{2}$	$\theta = 180°$ أو $\theta = \pi$	$\theta = 270°$ أو $\theta = \frac{3\pi}{2}$
			

الزوايا الخاصة

$\theta = 30° = \frac{\pi}{6}$ | $\theta = 45° = \frac{\pi}{4}$ | $\theta = 60° = \frac{\pi}{3}$

⑨ الدوال المثلثية للزوايا (المرسومة)

أ./ عابدين

إيجاد قيم الدوال المثلثية لأي زاوية بمعلومية (نقطة على الضلع النهائي)

① إذا كان الضلع النهائي للزاوية θ المرسومة في الوضع القياسي يمر بالنقطة $P(8,-15)$.
، فأوجد القيم الفعلية للدوال المثلثية :
$\cos\theta$ ، $\tan\theta$ ، $\csc\theta$

② إذا كان الضلع النهائي للزاوية θ المرسومة في الوضع القياسي يمر بالنقطة $P(-6,8)$.
، فأوجد القيم الفعلية للدوال المثلثية :
$\sin\theta$ ، $\cot\theta$ ، $\sec\theta$

③ إذا كان الضلع النهائي للزاوية θ المرسومة في الوضع القياسي يمر بالنقطة $P(3,0)$.
، فأوجد القيم الفعلية للدوال المثلثية :
$\sin\theta$ ، $\sec\theta$

④ إذا كان الضلع النهائي للزاوية θ المرسومة في الوضع القياسي يمر بالنقطة $P(0,-4)$.
، فأوجد القيم الفعلية للدوال المثلثية :
$\csc\theta$ ، $\tan\theta$

⑤ اختر : إذا كان الضلع النهائي للزاوية θ المرسومة في الوضع القياسي يمر بالنقطة $P(0,6)$
، فما القيمة الفعلية لـ $\csc\theta$ ؟ A 0 B 1 C غير مُعرّفة

تم تحميل هذا الملف من
موقع المناهج البحرينية
alManahj.com/bh

ريض 262

⑨ الدوال المثلثية للزوايا (المرسومة)

أ./ عابدين

إيجاد قيم الدوال المثلثية لأي زاوية بمعلومية (إحدى الدوال المثلية ، والرُبع)

⑥ إذا كان : $\sin\theta = \frac{4}{5}$ ، وكان الضلع النهائي للزاوية θ يقع في الرُبع الثاني .
، فأوجد القيم الفعلية للدوال المثلثية :
$\cos\theta$ ، $\tan\theta$

⑦ إذا كان : $\cos\theta = -\frac{8}{17}$ ، وكان الضلع النهائي للزاوية θ يقع في الرُبع الثاني .
، فأوجد القيم الفعلية للدوال المثلثية :
$\tan\theta$ ، $\csc\theta$

⑧ إذا كان : $\cot\theta = -\frac{12}{5}$ ، وكان الضلع النهائي للزاوية θ يقع في الرُبع الرابع .
، فأوجد القيم الفعلية للدوال المثلثية :
$\sec\theta$ ، $\sin\theta$

⑨ إذا كان : $\tan\theta = \frac{3}{4}$ ، وكان الضلع النهائي للزاوية θ يقع في الرُبع الثالث .
، فأوجد القيم الفعلية للدوال المثلثية :
$\csc\theta$ ، $\cos\theta$

⑩ شعاع نقطة ابتدائه نقطة الأصل ، ويمر في النقطة $P(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2})$. أوجد قياس الزاوية بالدرجات ، وبالراديان التي يصنعها الشعاع مع الاتجاه الموجب للمحور x .

$\theta = -60^\circ = -\frac{\pi}{3}$

تم تحميل هذا الملف من موقع المناهج البحرينية
alManahj.com/bh

ريض 262

⑨ الدوال المثلثية و زوايا الإسناد

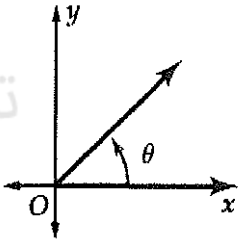
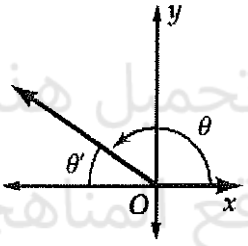
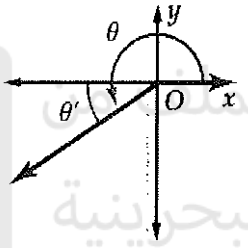
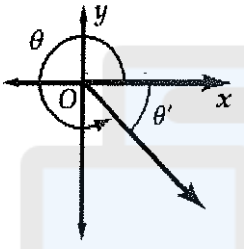
أ./ عابدين

إيجاد زوايا الإسناد + إشارة الدوال المثلثية

زاوية الإسناد θ' هي الزاوية الحادة المحصورة بين الضلع النهائي للزاوية θ والمحور x

مفهوم أساسي — زوايا الإسناد

أضف إلى مطويتك

الربع الأول	الربع الثاني	الربع الثالث	الربع الرابع
			
$\theta' = \theta$	$\theta' = 180° - \theta$ $\theta' = \pi - \theta$	$\theta' = \theta - 180°$ $\theta' = \theta - \pi$	$\theta' = 360° - \theta$ $\theta' = 2\pi - \theta$

ملحوظة ❶ إذا كان قياس الزاوية θ أكبر من $360°$ (أكبر من 2π) ⇐ فإننا نطرح دورة كاملة $360°$ (2π) أو مضاعفاتها (دورات كاملة) ، حتى نحصل على زاوية مكافئة قياسها موجب محصورة بين ($0°, 360°$) أو بين ($0, 2\pi$) ، ثم نوجد زاوية الإسناد θ' .

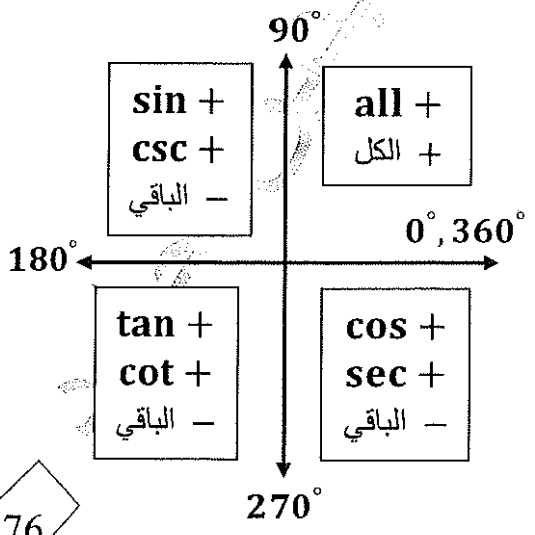
ملحوظة ❷ إذا كان قياس الزاوية θ أقل من $0°$ (سالبة) ⇐ فإننا نضيف دورة كاملة $360°$ أو (2π) أو مضاعفاتها (دورات كاملة) ، حتى نحصل على زاوية مكافئة قياسها موجب محصورة بين ($0°, 360°$) أو بين ($0, 2\pi$) ، ثم نوجد زاوية الإسناد θ' .

إشارة الدوال المثلثية

الربع الثاني	الربع الأول
$\sin\theta, \csc\theta$: +	$\sin\theta, \csc\theta$: +
$\cos\theta, \sec\theta$: −	$\cos\theta, \sec\theta$: +
$\tan\theta, \cot\theta$: −	$\tan\theta, \cot\theta$: +
الربع الثالث	**الربع الرابع**
$\sin\theta, \csc\theta$: −	$\sin\theta, \csc\theta$: −
$\cos\theta, \sec\theta$: −	$\cos\theta, \sec\theta$: +
$\tan\theta, \cot\theta$: +	$\tan\theta, \cot\theta$: −

a . s . t . c

all students take coffee



تم تحميل هذا الملف من موقع المناهج البحرينية
almanahj.com/bh

ريض 262

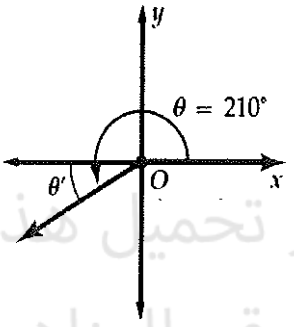
٩ تابع : الدوال المثلثية و زوايا الإسناد

أ./ عابدين

تمارين على إيجاد زوايا الإسناد

ارسم الزوايا المُعطى قياس كل منها فيما يأتي في الوضع القياسي ثم أوجد زاوية الاسناد لكل منها

١ 210° ← موجبة محصورة بين $0^\circ, 360^\circ$

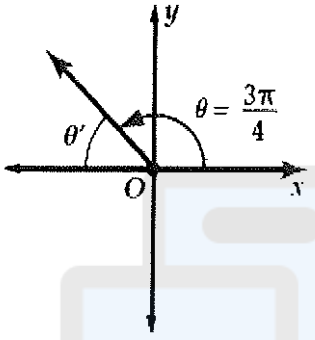


الضلع النهائي للزاوية 210° يقع في الربع الثالث.

$\theta' = \theta - 180^\circ$

$= 210^\circ - 180^\circ = 30^\circ$

٢ $-\frac{5\pi}{4}$ ← الموجبة المكافئة $-\frac{5\pi}{4} + 2\pi = \frac{3\pi}{4}$

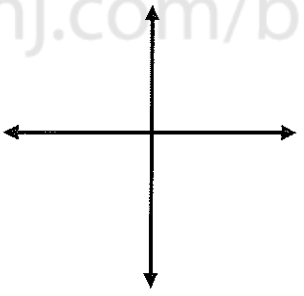


الضلع النهائي للزاوية يقع في الربع الثاني.

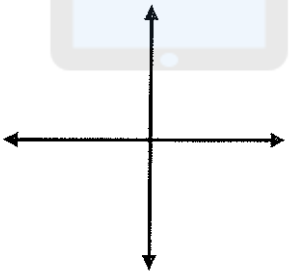
$\theta' = \pi - \theta$

$= \pi - \frac{3\pi}{4} = \frac{\pi}{4}$

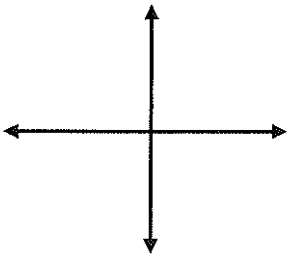
٣ ارسم الزاوية التي قياسها 285° في الوضع القياسي ، ثم أوجد زاوية الإسناد لها .



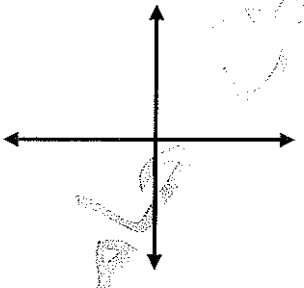
٤ ارسم الزاوية التي قياسها -110° في الوضع القياسي ، ثم أوجد زاوية الإسناد لها .



٥ ارسم الزاوية التي قياسها $-\frac{3\pi}{4}$ في الوضع القياسي ، ثم أوجد زاوية الإسناد لها .



٦ ارسم الزاوية التي قياسها $\frac{2\pi}{3}$ في الوضع القياسي ، ثم أوجد زاوية الإسناد لها .

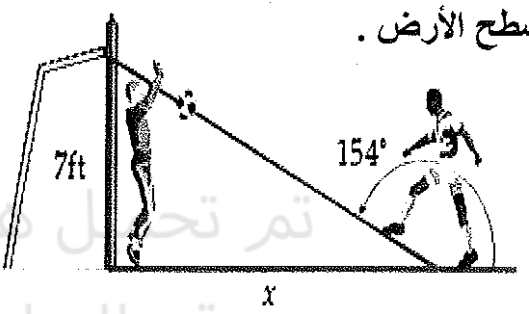


لمز تحميل هذا الملف من موقع المناهج البحرينية
alManahj.com/bh

٩ تابع : الدوال المثلثية و زوايا الإسناد

مسائل من واقع الحياة على زوايا الاسناد

٧ يركل لاعب كرة قدم الكرة باتجاه الهدف من مسافة x ft عن خط المرمى كما هو مبين في الشكل . يمسك الحارس الكرة على ارتفاع 7 ft من سطح الأرض .

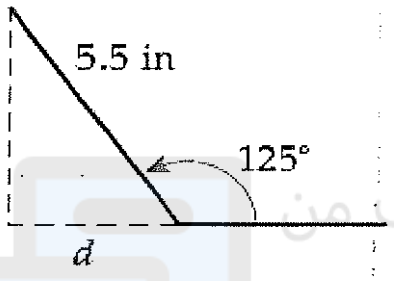


A أوجد قياس زاوية الإسناد للزاوية 154° .

B اكتب دالة مثلثية ، ثم استعمالها في إيجاد المسافة x بين اللاعب وخط المرمى عندما ركل اللاعب الكرة .

ج : $x = 14.4$ ft

٨ فتح سعيد حاسوبه المحمول فشكّل زاوية قياسها 125° كما هو مبين في الشكل أدناه . إذا علمت أن عرض شاشة الحاسوب 5.5 in



A أوجد قياس زاوية الإسناد للزاوية 125° .

B اكتب دالة مثلثية ، ثم استعمالها في إيجاد المسافة d من الحاسوب إلى الحائط المُسندة إليه الشاشة .

ج : $d = 3.2$ in

٩ عجلة دوارة في إحدى مدن الألعاب طول نصف قطرها 68 ft ، وترتفع عن سطح الأرض 15 ft ، بعد جلوس الشخص في العربة السفلية دارت العجلة بزاوية قياسها 202.5° في عكس حركة عقارب الساعة قبل أن تتوقف . كم يكون ارتفاع هذه العربة عن سطح الأرض عندما تتوقف العجلة عن الدوران ، لأقرب قدم ؟

ج : 146 ft

١٠ أي من الزوايا الآتية تُمثّل زاوية الإسناد للزاوية التي قياسها $\frac{5\pi}{6}$ ؟

A $\frac{\pi}{3}$

B $\frac{\pi}{4}$

C $\frac{\pi}{6}$

تم تحميل هذا الملف من موقع المناهج البحرينية
almanahj.com/bh

أ./ عابدين

❾ الدوال المثلثية باستعمال زوايا الإسناد

قيم الدوال المثلثية للزوايا الرُبعية وبعض الزوايا الخاصة

الزوايا الرُبعية

$\theta = 0° = 0$ ، $\theta = 90° = \frac{\pi}{2}$

$\theta = 180° = \pi$ ، $\theta = 270° = \frac{3\pi}{2}$

$\theta = 360° = 2\pi$

مباشرة بالحاسبة

الزوايا الخاصة

$\theta = 30° = \frac{\pi}{6}$

$\theta = 45° = \frac{\pi}{4}$

$\theta = 60° = \frac{\pi}{3}$

مباشرة بالحاسبة

انتبه : (حالات خاصة)

$\cot 90° = \frac{\cos 90°}{\sin 90°} = 0$

$\cot 270° = \frac{\cos 270°}{\sin 270°} = 0$

الحاسبة بالمقلوب ينتج ERROR

خطوات إيجاد قيم الدوال المثلثية للزوايا المُسنّدة

❶ تحديد الزاوية الموجبة المكافئة للزاوية θ (تنحصر بين $0°$ ، $360°$) بإضافة أو طرح دورات .

❷ تحديد الرُبع الذي يقع فيه الضلع النهائي للزاوية θ .

تعديل الزاوية (إن لزم الأمر لذلك)

❸ تحديد إشارة الدالة المثلثية التي بالسؤال حسب الرُبع المُحدّد .

❹ تحديد زاوية الاسناد θ' للزاوية θ حسب الرُبع المُحدّد .

❸ ، ❹ في خطوة واحدة

❺ إيجاد قيمة الدالة المثلثية للزاوية θ' الناتجة (بالحاسبة حيث تكون زاوية رُبعية أو خاصة) .

ملحوظة : $\sin^n x = (\sin x)^n$ ⇐ وهكذا تعمّم القاعدة مع جميع الدوال المثلثية

تمارين على إشارة الدوال المثلثية

❶ افترض أن زاوية θ في الوضع القياسي ، بحيث إن $\cos\theta > 0$.

، في أي رُبع يقع الضلع النهائي للزاوية θ ؟

A الرُبع الأول فقط .

B الرُبع الثاني فقط .

C الرُبع الأول أو الرُبع الثاني .

D الرُبع الأول أو الرُبع الرابع .

❷ افترض أن زاوية θ في الوضع القياسي ، بحيث إن $\csc\theta < 0$.

، في أي رُبع يقع الضلع النهائي للزاوية θ ؟

A الرُبع الثالث فقط .

B الرُبع الرابع فقط .

C الرُبع الثالث أو الرُبع الرابع .

D الرُبع الثاني أو الرُبع الرابع .

❸ ما قياس الزاوية التي تكون دالتا الظل و جيب التمام لها سالبتين ؟

A $180°$ B $110°$ C $210°$ D $340°$

٩ الدوال المثلثية باستعمال زوايا الإسناد

أوجد القيمة الفعلية لكل مقدار مما يأتي بدون استعمال الآلة الحاسبة ، موضّحاً الخطوات

١ $\cos(570^\circ)\ \cos\left(\frac{11\pi}{6}\right) - \cos(240^\circ)\ \sin(-150^\circ)$ [الجواب : -1]

٢ أثبت أن : $\csc 210^\circ \cos\left(\frac{7\pi}{3}\right) - 5\cot\left(\frac{3\pi}{4}\right) + 4\sin^2 150^\circ = 5$

٣ $\sin 300^\circ + \sec^2\left(\frac{\pi}{3}\right)\cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) - \cos 510^\circ$ [الجواب : -2]

تم تحميل هذا الملف من
موقع المناهج البحرينية
alManahj.com/bh

٩ الدوال المثلثية باستعمال زوايا الإسناد

أوجد القيمة الفعلية لكل مقدار مما يأتي بدون استعمال الآلة الحاسبة ، موضّحاً الخطوات

٤ بدون الحاسبة أثبت أن : $\tan 225^\circ + \sec(-30^\circ)\sin\frac{5\pi}{3} = 4\cot\frac{7\pi}{2}$

تم تحميل هذا الملف من
موقع المناهج البحرينية
alManahj.com/bh

٥ $\cos(420^\circ)\sin(3\pi) + \sqrt{3}\sec\left(-\frac{13\pi}{6}\right) - 4\tan^3(135^\circ)$

[الجواب : 6]

٦ أوجد قيمة : $\frac{\tan 600^\circ \sec 330^\circ + \cot 90^\circ + \csc\left(\frac{5\pi}{6}\right)}{2}$

[الجواب : 2]

٩ نشاط : اختبر نفسك

تدريب : اختر الإجابة الصحيحة في كل مما يأتي ، موضّحاً خطوات الحل كلّما أمكن ذلك

١ ما قياس الزاوية التي تكون دالتا الجيب و الظل لها سالبتين ؟

A $65°$ C $120°$

B $265°$ D $310°$

٢ ما قياس الزاوية θ في الوضع القياسي ، حيث $\sin\theta = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\tan\theta = -1$ ؟

A $45°$ C $225°$

B $135°$ D $315°$

٣ ما قيمة : $\sin^2 225° + \cos^2 45°$ ؟

A 0

B 1

C $\frac{\sqrt{2}}{2}$

D $-\frac{\sqrt{2}}{2}$

٤ ما القيمة الفعلية لـ $\cos 855°$ ؟

A $\sqrt{2}$

B $-\sqrt{2}$

C $\frac{1}{\sqrt{2}}$

D $-\frac{1}{\sqrt{2}}$

٥ ما القيمة الفعلية لـ $\cot \frac{5\pi}{2}$ ؟

A 1

B -1

C 0

D غير مُعرّفة

٦ ما القيمة الفعلية لـ $\sin^2 \frac{9\pi}{4}$ ؟

A 2

B $\frac{1}{2}$

C $\frac{2}{\sqrt{2}}$

D $\frac{\sqrt{2}}{2}$

٧ **اكتشف الخطأ** : يقوم خالد وأحمد بحساب قيمة $\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)$ الفعلية أيّ منهما كانت إجابته صحيحة ؟

خالد

$$\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = -0.5$$

أحمد

$$\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(-\frac{\pi}{3} + 2\pi\right) = \cos\left(\frac{5\pi}{3}\right)$$
$$= \cos\left(2\pi - \frac{5\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = 0.5$$

تم تحميل هذا الملف من موقع المناهج البحرينية
alManahj.com/bh

بطاقة (10) ريض 262

⑩ الـدوال الـدائـرية

أ./ عابدين

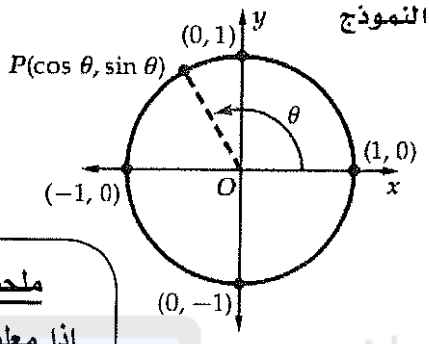
مفهوم أساسي

أضف إلى ملفي

دوال في دائرة الوحدة

التعبير اللفظي إذا قطع الضلع النهائي للزاوية في الوضع القياسي دائرة الوحدة في النقطة $P(x, y)$، فإن $\cos\theta = x$ ، $\sin\theta = y$.

النموذج



بالرموز $P(x, y) = P(\cos\theta, \sin\theta)$

مثال إذا كانت $\theta = 120°$ ، فإن:

$P(x, y) = P(\cos 120°, \sin 120°)$

ملحوظة هامة

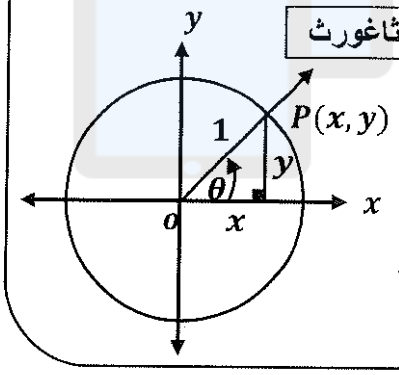
إذا معلوم الزاوية θ وطلب $P(x, y)$

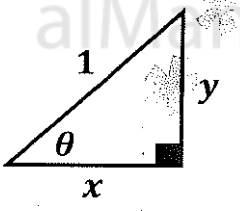
$x = \cos\theta$

$y = \sin\theta$

ملحوظة : إذا كان الضلع النهائي للزاوية في الوضع القياسي يقطع دائرة الوحدة في النقطة $P(x, y)$ فإن :

معادلة دائرة الوحدة ← $x^2 + y^2 = 1$ → نظرية فيثاغورث





الدوال المثلثية:

$$\sin\theta = \frac{y}{1} = y \quad \Rightarrow \quad \csc\theta = \frac{1}{y}$$

$$\cos\theta = \frac{x}{1} = x \quad \Rightarrow \quad \sec\theta = \frac{1}{x}$$

$$\tan\theta = \frac{y}{x} \quad \Rightarrow \quad \cot\theta = \frac{x}{y}$$

ملحوظة : دالتا الجيب (sin) ، وجيب التمام (cos)

❶ دوال دائرية تعريفها يعتمد على دائرة الوحدة . ❷ دوال دورية وطول الدورة $360°$ أو 2π .

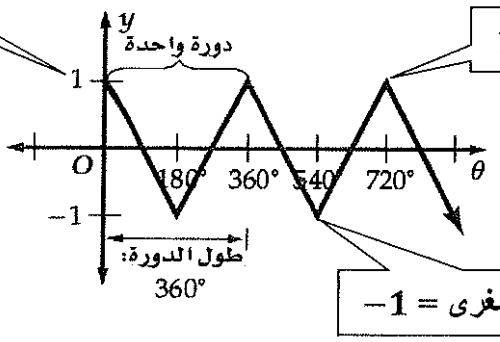
الـدوال الـدوريـة (طول الـدورة + السعة)

الدوال الدورية تتكرر قيم y في **الدوال الدورية** ضمن فترات منتظمة. بحيث يُسمّى النمط الواحد الكامل منها **دورة**، وتُسمّى المسافة الأفقية في الدورة **طول الدورة**.

السعة = 1

θ	y
0°	1
180°	−1
360°	1
540°	−1
720°	1

تتكرر الدورة كل 360°



القيمة العظمى = 1

القيمة الصغرى = −1

طول الدورة = 360°

❶ تابع : الدوال الدائرية

إيجاد قيم الدوال المثلثية بمعلومية نقطة على دائرة الوحدة

❶ إذا كان الضلع النهائي للزاوية θ المرسومة في الوضع القياسي يقطع دائرة الوحدة عند النقطة $P(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$.

، فأوجد كلاً من : $\sec\theta$, $\sin\theta$

❷ إذا كان الضلع النهائي للزاوية θ المرسومة في الوضع القياسي يقطع دائرة الوحدة عند النقطة $P(\frac{3}{5}, -\frac{4}{5})$.

، فأوجد كلاً من : $\csc\theta$, $\tan\theta$

❸ إذا كان الضلع النهائي للزاوية θ المرسومة في الوضع القياسي يقطع دائرة الوحدة عند النقطة $P(x, \frac{\sqrt{5}}{3})$ حيث $x < 0$ ، فأوجد :

(A) قيمة x .

(B) قيمة $\cot\theta$.

❹ إذا كان الضلع النهائي للزاوية θ المرسومة في الوضع القياسي يقطع دائرة الوحدة عند النقطة $P(3k, -4k)$ ، حيث $k > 0$ ، فأوجد :

(A) قيمة k .

(B) قيمة $\sec\theta$.

تم تحميل هذا الملف من موقع المناهج البحرينية

almanahj.com/bh

⑩ تابع : الدوال الدائرية

⑤ إذا كان الضلع النهائي للزاوية θ في الوضع يقع في الرُبع الثاني ، ويقطع دائرة الوحدة عند النقطة $P\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\ ,\ y\right)$ ، فما قيمة $\sin\theta$ ؟

A $-\frac{1}{2}$

B $-\frac{1}{4}$

C $\frac{1}{4}$

D $\frac{1}{2}$

⑥ إذا كان الضلع النهائي للزاوية θ في الوضع يقع في الرُبع الثالث ، ويقطع دائرة الوحدة عند النقطة $P\left(x\ ,-\frac{3}{4}\right)$ ، فما قيمة $\cos\theta$ ؟

⑦ إذا كانت $\theta=\frac{7\pi}{3}$ ، فما إحداثي نقطة تقاطع ضلع زاوية θ النهائي مع دائرة الوحدة ؟

⑧ إذا كانت $\theta=150^\circ$ ، فما إحداثي نقطة تقاطع ضلع زاوية θ النهائي مع دائرة الوحدة ؟

⑨ إذا كان الضلع النهائي للزاوية θ في الوضع القياسي يقع في الرُبع الثاني ، و يقطع دائرة الوحدة عند النقطة $P\left(x\ ,\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ ، فما قيمة $\cos\theta$ ؟

A $\frac{\sqrt{2}}{2}$ B $\frac{-\sqrt{2}}{2}$ C 1 D -1

تم تحميل هذا الملف من موقع المناهج البحرينية

almanahj.com/bh

ريض 262

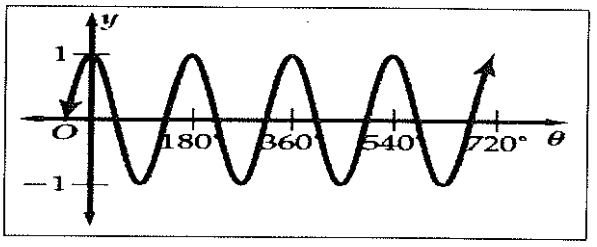
أ./ عابدين

❿ تابع : الدوال الدورية

إيجاد (طول الدورة + السعة) باستعمال التمثيل البياني للدالة الدورية

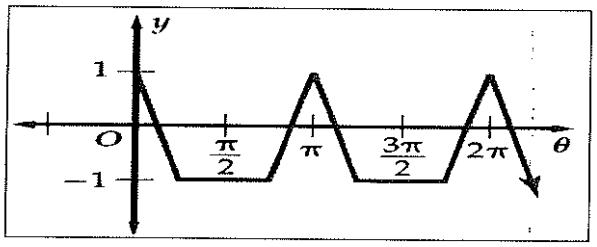
تدريب : أوجد طول الدورة ، والسعة للدالة الممثلة في الشكل أدناه في كل مما يأتي :

❶



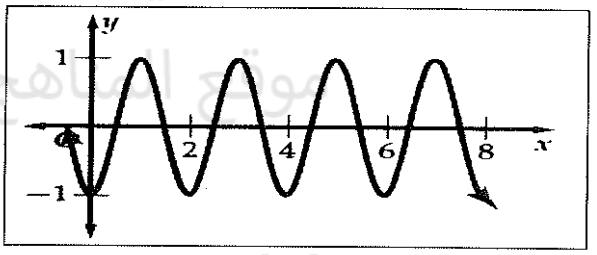
طول الدورة : ..... ، السعة : .....

❷



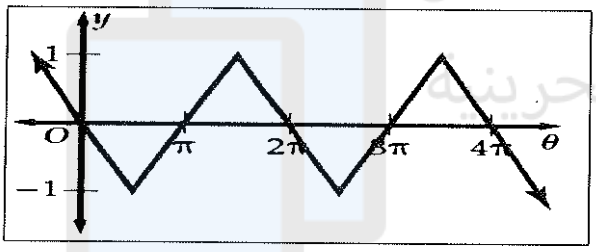
طول الدورة : ..... ، السعة : .....

❸



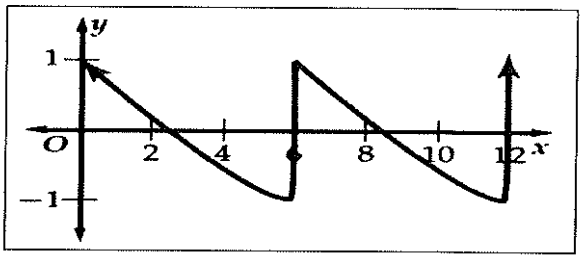
طول الدورة : ..... ، السعة : .....

❹



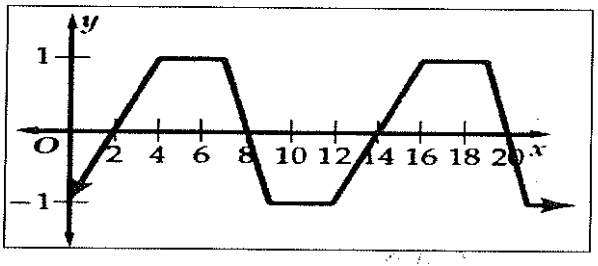
طول الدورة : ..... ، السعة : .....

❺



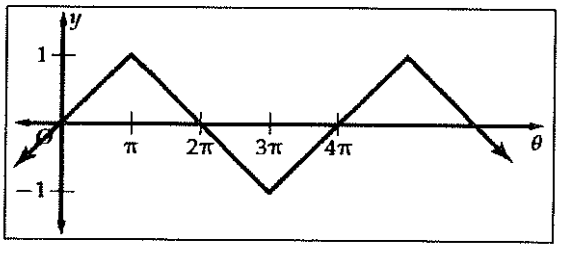
طول الدورة : ..... ، السعة : .....

❻



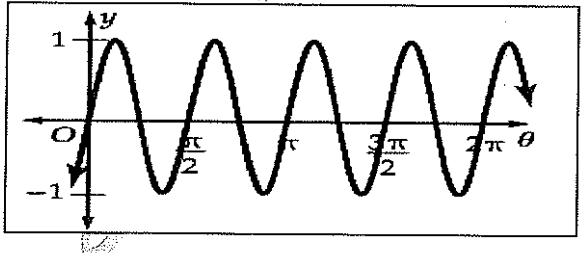
طول الدورة : ..... ، السعة : .....

❼ ما طول الدورة للدالة الممثلة بيانياً أدناه :



A) 720° B) 360° C) 540° D) 180°

❽ ما طول الدورة للدالة الممثلة بيانياً أدناه :



A) π B) $\frac{\pi}{3}$ C) 2π D) $\frac{\pi}{2}$

تم تحميل هذا الملف من موقع المناهج البحرينية
alManahj.com/bh

ريض 262

أ./ عابدين

⑫ تابع : تطبيقات على الدوال الدورية

استعمال الدوال الدورية لحل مسائل حياتية

قيمة الدالة الدورية متساوية عند بدايات ونهايات الدورات

طول الدورة (الزمن الدوري) : هو الزمن اللازم لإكمال دورة واحدة .

ملحوظة : عندما يكون المتغير المستقل هو الزمن ، فإن طول الدورة يسمى الزمن الدوري .

❶ يبلغ قطر عجلة دوارة في الصين $520\ ft$ تقريباً إذا كان ارتفاع أحد العربات في العجلة h يشكل دالة بالنسب للزمن t ، وتحتاج العجلة إلى $30\ sec$ لإكمال دورة كاملة . ارسم شكلاً يمثل منحنى الدالة مُعتبراً $h = 0$ عندما $t = 0$

ملاحظات عند الحل

① نوجد طول الدورة (الزمن الدوري)

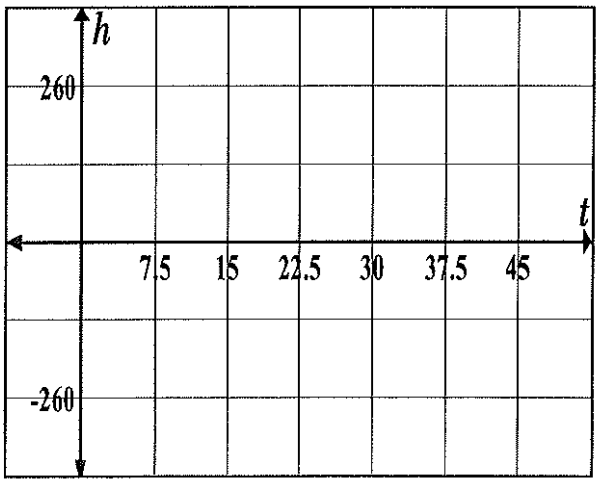
② نوجد التدريج t الأفقي $= \frac{\text{طول الدورة}}{4}$

③ الزمن t غير سالب $(t \geq 0)$

الحل :

- طول الدورة (الزمن الدوري) = ...
- التدريج الأفقي $= \frac{\text{طول الدورة}}{4}$ = ...

t					
h					



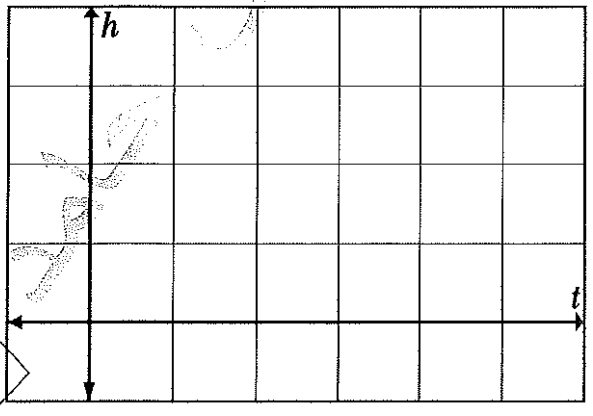
❷ إذا مثل الارتفاع الدوري لأرجوحة دالة في الزمن ، بحيث تصل الأرجوحة أقصى ارتفاع لها وهو $6\ ft$ ، ثم تعود إياباً لتصل $6\ ft$ مرّة أخرى مروراً بأقل ارتفاع وهو $2\ ft$ ، مستغرقاً زمناً قدره $1\ sec$ بين أقل ارتفاع وأقصى ارتفاع .

A) ما الزمن الذي تستغرقه حركة الأرجوحة ذهاباً وإياباً بدءًا بأقصى ارتفاع وانتهاءً إليه ؟

$t = 4\ sec$

B) مثّل ارتفاع الأرجوحة h كدالة في الزمن t ؟
(مُعتبراً $h = 6$ عندما $t = 0$)

t					
h					



⑩ نشاط : اختبر نفسك

تدريب : اختر الإجابة الصحيحة في كل مما يأتي (علماً بأنه توجد إجابة واحدة صحيحة فقط) .

① إذا كان الضلع النهائي للزاوية θ المرسومة في الوضع القياسي يمر بالنقطة $(-6, 2)$ ، فما القيمة الفعلية لـ $\cot\theta$ ؟

A -3

B $-\frac{1}{3}$

C $\frac{\sqrt{10}}{10}$

D $\frac{-3\sqrt{10}}{10}$

② إذا كان الضلع النهائي للزاوية θ في الوضع القياسي يقطع دائرة الوحدة عند النقطة $P(\frac{6}{10}, -\frac{8}{10})$ ، فما قيمة $\sec\theta$ ؟

A $-\frac{10}{6}$

B $-\frac{6}{10}$

C $\frac{10}{6}$

D $\frac{6}{10}$

③ إذا كان طول قطر إطار 18 in ، ويدور 4 دورات في 1 min ، فما طول دورة الدالة التي تُمثِّل ارتفاع نقطة تقع على الحافة الخارجية للإطار كدالة في الزمن t ؟

A 12 sec

B 15 sec

C 60 sec

D 15 min

④ إذا كانت $h(t)$ تُمثِّل الارتفاع بالأقدام كدالة دورية في الزمن t بالثواني ، فإذا كان طول دورة الدالة يساوي 2 sec ، وكان $h(1) = 6$ ft ، فما قيمة $h(5)$ ؟

A 6 ft

B 12 ft

C 18 ft

D 24 ft

⑤ إذا كان تغيّر ارتفاع الدواسة في الدراجة الهوائية بصورة دورية كدالة في الزمن يُعطى الجدول :

الزمن (sec)	0	0.5	1	1.5	2	2.5	3
الارتفاع (in)	18	11	4	11	18	11	4

فما طول دورة هذه الدالة ؟

A 1 sec

B 2 sec

C 1.5 sec

D 2.5 sec

تم تحميل هذا الملف من موقع المناهج البحرينية
dMadhj.com/bh

ريض 262

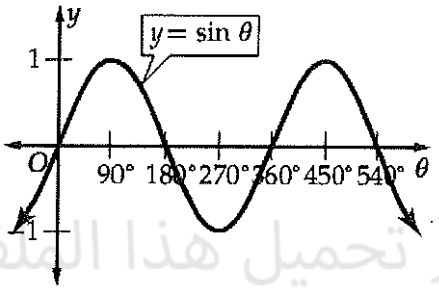
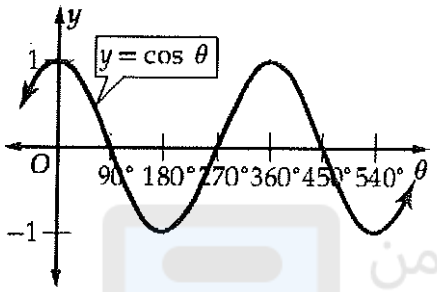
⑪ تمثيل الدوال المثلثية بيانياً

أ./ عابدين

مفهوم أساسي

أضف إلى مطويتك

دالتا الجيب وجيب التمام

الدالة الأم	$y = \sin\theta$	$y = \cos\theta$
التمثيل البياني		
المجال	مجموعة الأعداد الحقيقية	مجموعة الأعداد الحقيقية
المدى	$\{y \mid -1 \le y \le 1\}$	$\{y \mid -1 \le y \le 1\}$
السعة	1	1
طول الدورة	360°	360°

يمكنك تطبيق ما تعلمته في أثناء دراستك لتحويلات التمثيل البياني للدوال الأخرى على التمثيل البياني للدوال المثلثية $y = a\sin b\theta$, $y = a\cos b\theta$، حيث تكون السعة $= |a|$، أما طول الدورة $= \frac{360^\circ}{|b|}$.

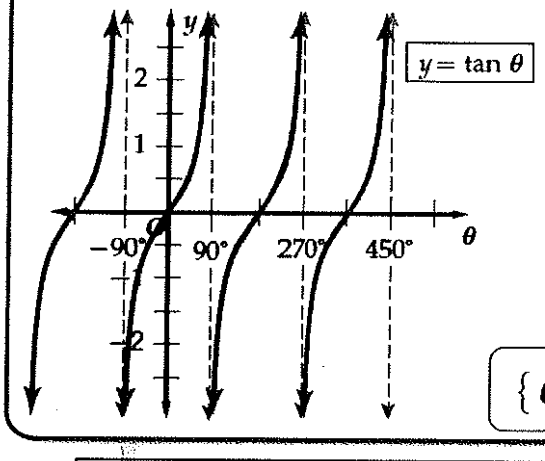
مفهوم أساسي

أضف إلى مطويتك

دالة الظل

الدالة الأم	$y = \tan\theta$
المجال	$\{\theta \mid \theta \neq 90^\circ + 180^\circ n, n \in \mathbf{Z}\}$
المدى	مجموعة الأعداد الحقيقية
السعة	غير معرفة
طول الدورة	180°
نقاط التقاطع مع المحور θ في الدورة الواحدة	$(0, 0)$, $\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{360^\circ}{b}, 0\right)$, $\left(\frac{360^\circ}{b}, 0\right)$

التمثيل البياني للدالة



مجال الدالة الأم : $\{\theta \mid \theta \neq (2n+1)90^\circ , n \in z\}$

طول الدورة لمنحنى الدالة $y = a\tan b\theta$ ، يساوي $\frac{180^\circ}{|b|}$ ، السعة لهذه الدالة غير معرّفة ، وخطوط التقارب الرأسية لها عند المضاعفات الفردية للعدد $\frac{180^\circ}{2|b|}$.

أ./ عابدين

ريض 262

⑪ تمثيل الدوال المثلثية بيانياً

الدالة الأم هي : $y = \sin\theta$

تمثيل دالة الجيب (sin)

الدالة الأم هي : $y = \sin\theta$

$y = a \sin b\theta$

① السعة $= |a|$

② طول الدورة $= \frac{360^\circ}{|b|} = \frac{2\pi}{|b|}$

طول تدريج θ أو x (الخطوة) $= \frac{\text{طول الدورة}}{4}$

طول تدريج y حسب قيمة السعة

المدى $= \{y \mid -|a| \leq y \leq |a| \ , y \in R\}$

المجال $= R$ (مجموعة الأعداد الحقيقة)

القيمة العظمى $= |a|$

القيمة الصغرى $= -|a|$

التمثيل البياني لدالة الجيب sin يمر بنقطة الأصل $(0,0)$

الدالة الأم هي : $y = \cos\theta$

تمثيل دالة جيب التمام (cos)

الدالة الأم هي : $y = \cos\theta$

$y = a \cos b\theta$

① السعة $= |a|$

② طول الدورة $= \frac{360^\circ}{|b|} = \frac{2\pi}{|b|}$

طول تدريج θ أو x (الخطوة) $= \frac{\text{طول الدورة}}{4}$

طول تدريج y حسب قيمة السعة

المدى $= \{y \mid -|a| \leq y \leq |a| \ , y \in R\}$

المجال $= R$ (مجموعة الأعداد الحقيقة)

القيمة العظمى $= |a|$

القيمة الصغرى $= -|a|$

التمثيل البياني لدالة جيب التمام cos عند $\theta = 0$ له قمة أو قاع حسب إشارة a

الدالة الأم هي : $y = \tan\theta$

تمثيل دالة الظل (tan)

الدالة الأم هي : $y = \tan\theta$

$y = a \tan b\theta$

① السعة = غير مُعرّفة

② طول الدورة $= \frac{180^\circ}{|b|} = \frac{\pi}{|b|}$

طول تدريج θ أو x (الخطوة) $= \frac{\text{طول الدورة}}{2}$

طول تدريج $y = |a|$

خطوط التقارب الرأسية للدالة عند المضاعفات القردية لنصف طول الدورة $(\frac{180}{2|b|})$

أي أن خطوط التقارب الرأسية هي : $\theta = (2n+1) \times \frac{\text{طول الدورة}}{2} \ , n \in z$

التمثيل البياني لـ tan يمر بنقطة الأصل $(0,0)$

المجال $= \left\{\theta \mid \theta \neq (2n+1) \times \frac{\text{طول الدورة}}{2} \ , n \in z\right\}$

المدى $= R$ (مجموعة الأعداد الحقيقة)

ملحوظة : السعة لدالة الظل غير مُعرّفة بسبب عدم وجود قيم عظمى أو صغرى لها .

ريض 262

أ./ عابدين

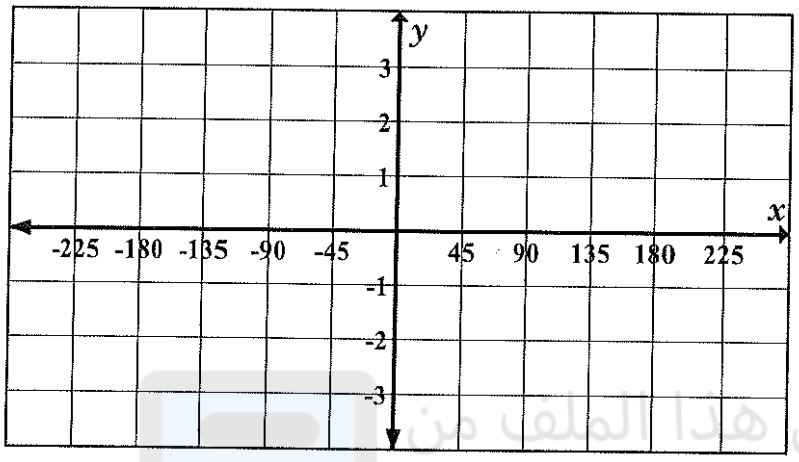
⑪ تمثيل دالة الجيب بيانياً

أوجد السعة ، وطول الدورة للدالة ، ثم مثلها بيانياً ، وحدد المجال والمدى والقيمة العظمى والصغرى ؟

❶ $y = 3 \sin 2\theta$

$a =$, $b =$

- سعة الدالة :
- طول الدورة :
- تدريج θ :

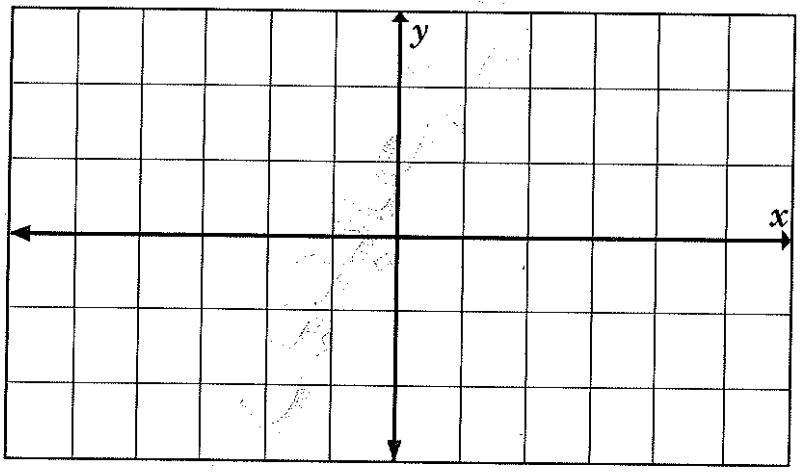


① MODE 7 ② ادخال الدالة
③ Start ← سالب طول الدورة .
④ End ← طول الدورة .
⑤ Step ← تدريج محور θ ($\frac{\text{طول الدورة}}{4}$)

- المجال =
- المدى =
- القيمة الصغرى =
- القيمة العظمى =

θ	-180°	-135°	-90°	-45°	0°	45°	90°	135°	180°
y	0	3	0	−3	0	3	0	−3	0

❷ $y = \frac{\sin 3x}{2}$ بتعديل السؤال $\Leftarrow$ $y = \frac{1}{2} \sin 3x$



❸ أوجد السعة وطول الدورة للدالة : $f(\theta) = -3 \sin\left(\frac{1}{2}\theta\right)$ ، ثم مثلها بيانياً .

تم تحميل هذا الملف من موقع المناهج البحرينية almanahj.com/bh

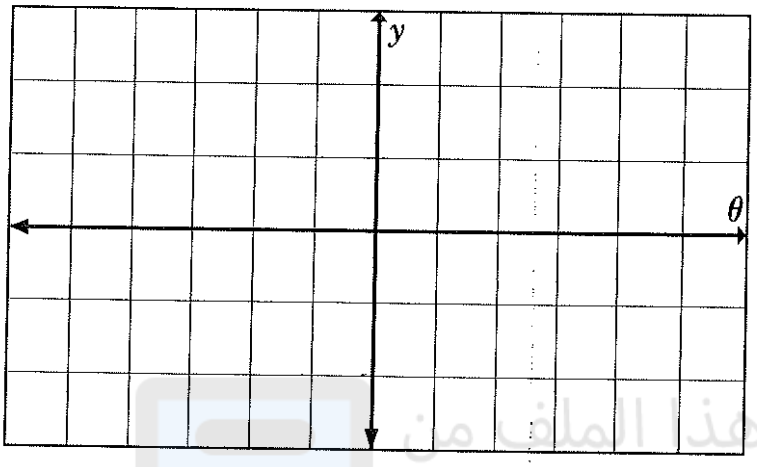
أ./ عابدين

⑪ تمثيل دالة جيب التمام بيانياً

ريض 262

أوجد السعة ، وطول الدورة للدالة ، ثم مثلها بيانياً ، وحدد المجال والمدى والقيمة العظمى والصغرى ؟

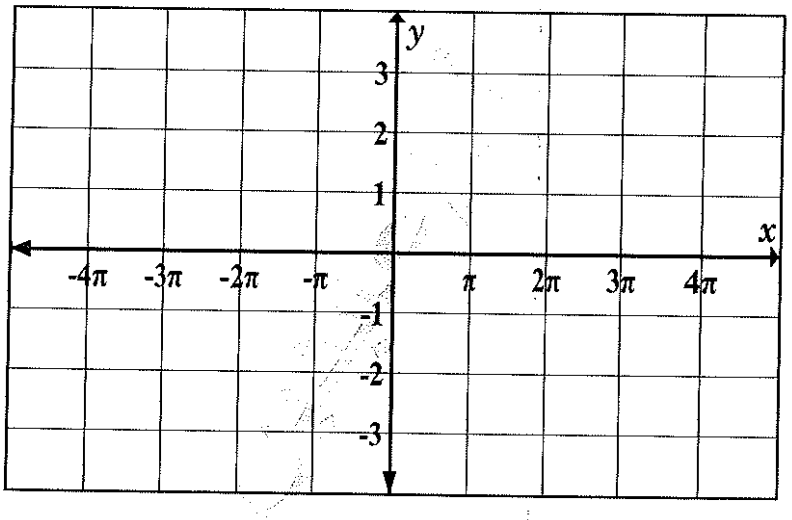
❶ $y = -2\cos 3\theta$



① MODE 7 ② ادخال الدالة
② Start ← سالب طول الدورة .
③ End ← طول الدورة .
④ Step ← تدريج محور θ $\left(\frac{\text{طول الدورة}}{4}\right)$

θ	-120°	-90°	-60°	-30°	0°	30°	60°	90°	120°
y	-2	0	2	0	-2	0	2	0	-2

❷ $y = 3\cos\left(\frac{x}{2}\right)$



❸ أوجد السعة وطول الدورة للدالة : $y = 0.5\cos(-3x)$ ، ثم مثلها بيانياً .

تم تحميل هذا الملف من موقع المناهج البحرينية
alManahj.com/bh

ريض 262

⑪ تمثيل دالة الظل بيانياً

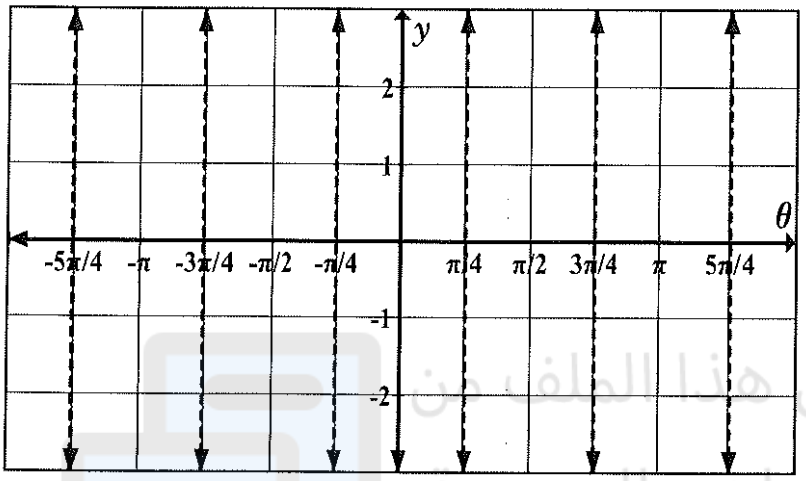
أ./ عابدين

أوجد السعة (إن وجدت) ، وطول الدورة للدالة المُعطاة ، ثم مثلها بيانياً ، وحدد المجال والمدى ؟

❶ $y = \tan 2\theta$

$a =$, $b =$

- السعة :
- طول الدورة :



- تدريج θ :

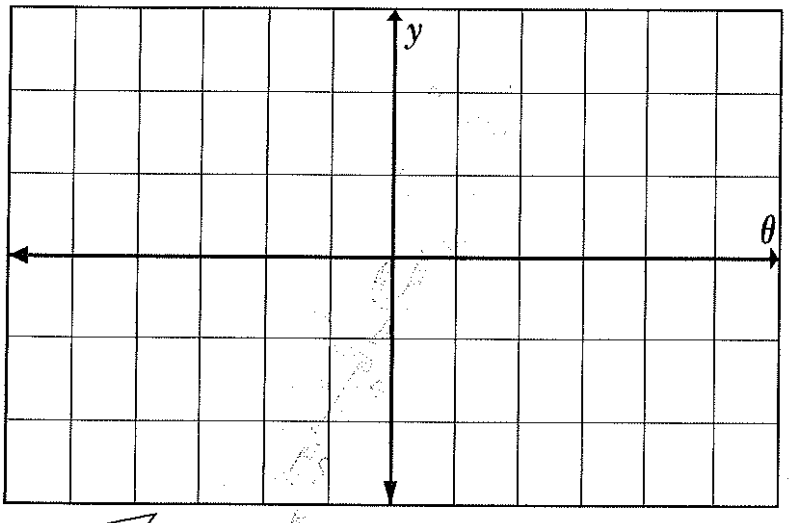
① تدريج محور $\theta = \frac{\text{طول الدورة}}{2}$

② طول تدريج $y = 1 = |a|$

- المجال :
- المدى :

θ	-135°	-90°	-45°	0°	45°	90°	135°
y	error	0	error	0	error	0	error

❷ $y = -\frac{1}{2}\tan\theta$



① تدريج محور $\theta = \frac{\text{طول الدورة}}{2}$

② طول تدريج $y = \frac{1}{2} = |a|$

❸ أوجد السعة (إن وجدت) وطول الدورة للدالة : $y = 2\tan\left(\frac{1}{2}x\right)$ ، ثم مثلها بيانياً .

تم تحميل هذا الملف من موقع المناهج البحرينية
almanahj.com/bh

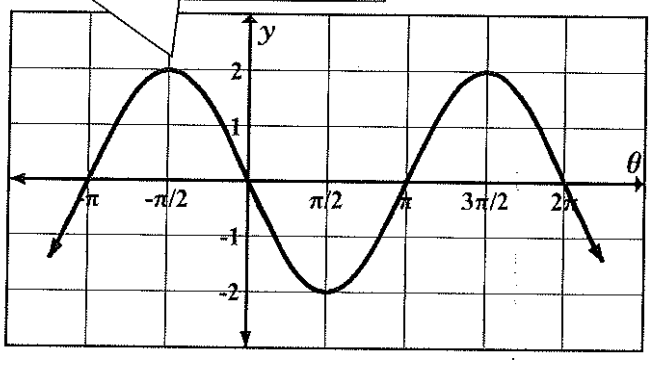
أ./ عابدين

ريض 262

⓫ كتابة قاعدة الدالة المثلثية من الرسم

❶ أي من الدوال الآتية مُعطى تمثيلها البياني في الشكل المجاور ؟

الدالة الأم : $y = \sin\theta$



A $y = 2\sin\theta$

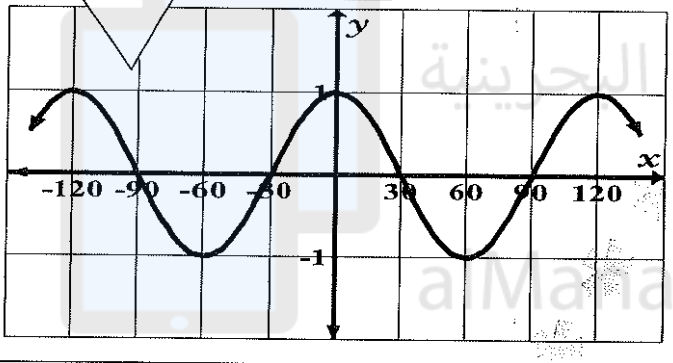
B $y = 2\cos\theta$

C $y = -2\sin\theta$

D $y = -2\cos\theta$

❷ أي من الدوال الآتية مُعطى تمثيلها البياني في الشكل المجاور ؟

الدالة الأم : .....



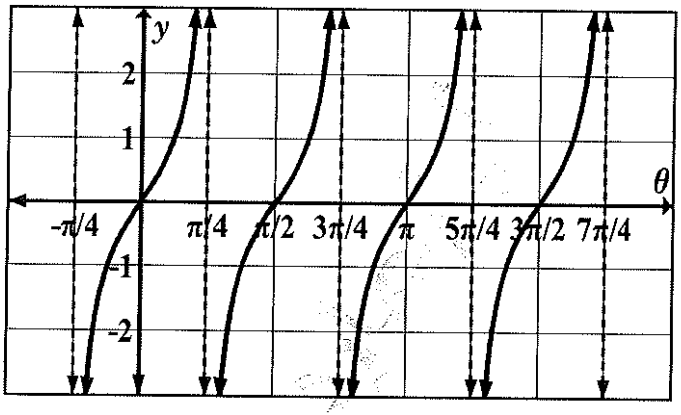
A $y = \sin 2x$

B $y = \cos 2x$

C $y = \sin 3x$

D $y = \cos 3x$

❸ أكمل مستعملاً التمثيل البياني المجاور :



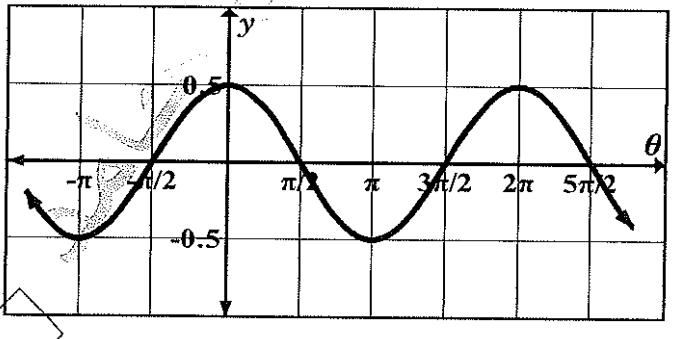
A طول دورة الدالة .....

B سعة الدالة (إن وجدت) .....

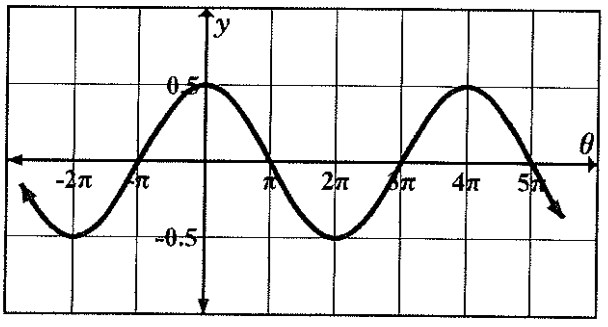
C الدالة الأم هي .....

D قاعدة الدالة هي .....

❹ ما التمثيل البياني للدالة $y = \frac{1}{2}\cos\theta$ ؟



B



A

ريض 262

⓫ السعة و طول الدورة لدوال المقلوب

أ./ عابدين

السعة وطول الدورة لدوال المقلوب

$y = a \sec b\theta$	$y = a \csc b\theta$	$y = a \cot b\theta$
① السعة غير مُعرّفة	① السعة غير مُعرّفة	① السعة غير مُعرّفة
② طول الدورة $= \frac{360^\circ}{\lvert b \rvert}$	② طول الدورة $= \frac{360^\circ}{\lvert b \rvert}$	② طول الدورة $= \frac{180^\circ}{\lvert b \rvert}$

تدريب : أوجد السعة (إن وجدت) ، وطول الدورة لكل دالة من الدوال المُعطاة :

❶ $y = 4 \sec \frac{3\theta}{5}$

❷ $y = \frac{\csc 2x}{3}$

❸ $y = 2 \cot\left(\frac{2}{3}\theta\right)$

تم تحميل هذا الملف من موقع المناهج البحرينية
alManahj.com/bh

❹ ما طول الدورة للدالة : $y = 3 \sec 5\theta$ ؟

A 360° C 120°

B 180° D 72°

❺ ما السعة للدالة : $y = -2 \tan 3\theta$ ؟

A 3 C 2

B -2 D غير مُعرّفة

❻ ما طول دورة الدالة : $y = 3 \cot\theta$ ؟

A 120° C 360°

B 180° D 108°

❼ ما طول الدورة للدالة : $y = \tan \frac{1}{2}\theta$ ؟

A 45° C 180°

B 90° D 360°

❽ ما مدى الدالة : $y = -5 \sin 3\theta$ ؟

A مجموعة الأعداد الحقيقية (R)

B $\{y \mid -3 \le y \le 3 \ , y \in R\}$

C $\{y \mid -5 \le y \le 5 \ , y \in R\}$

❾ ما السعة للدالة : $y = -3 \cos \frac{2}{3}\theta$ ؟

A $\frac{2}{3}$ C -3

B $\frac{3}{2}$ D 3

ريض 262

أ./ عابدين

⑪ تطبيقات حياتية على الدوال المثلثية

$y = a \sin b\theta$
$y = a \cos b\theta$

① السعة $= |a|$ ② طول الدورة $= \frac{2\pi}{|b|} = \frac{360^\circ}{|b|}$

طول الدورة (الزمن الدوري) = مقلوب التردد

طول الدورة $= \frac{1}{\text{التردد}}$

❶ قام لاعب بالقفز على جهاز الاهتزاز بتردد قدره 10 Hz إذا كانت سعة الاهتزاز تساوي 5 ft

(A) أوجد طول دورة الدالة . [0.1 sec]

(B) اكتب دالة جيب تمثل الارتفاع y في اهتزاز الجهاز كدالة في الزمن t .

[ج : $y = 5 \sin(20\pi t)$]

❷ يمكن للإنسان سمع أصوات ترددها يصل إلى 20 Hz ، افترض أن السعة تساوي وحدة واحدة

(A) أوجد طول دورة الدالة . [0.05 sec]

(B) اكتب دالة جيب التمام التي تعبر عن موجات الصوت y كدالة في الزمن t .

[ج : $y = \cos(40\pi t)$]

❸ عجلة ناعورة مائية طول قطرها 20 ft ، وتكمل العجلة دورة كاملة في 45 sec ، افترض أن ارتفاع أعلى العجلة يُمثّل الارتفاع عند اللحظة $t = 0$ sec . اكتب دالة تُمثِّل ارتفاع النقطة h كدالة في الزمن (t) .

[الجواب : $h = 10 \cos(8t)^\circ$]

❹ محطة لرصد الزلزال رصدت موجة لزلزال ذات تردد 0.5 Hz ، وسعته تساوي 1 m .

(A) أوجد طول دورة الدالة . [ج : 2 sec]

(B) اكتب دالة جيب تمثل الارتفاع h كدالة في الزمن t .

[الجواب : $h = \sin \pi t$]

تم تحميل هذا الملف من موقع المناهج البحرينية
alManahj.com/bh

بطاقة (12) ريض 262

⑫ الدوال المثلثية العكسية

أ./ عابدين

دالة الجيب : $y = \text{Sin}\, x$

$-90^\circ \le x \le 90^\circ$

$\frac{-\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2}$

دالة معكوس الجيب :

$x = \text{Sin}^{-1}\, y$

$x = \text{Arcsin}\, y$

كُتب حرف S كبير لأن مجال y محدد لكي يصبح المعكوس دالة

جيب التمام : $y = \text{Cos}\, x$

$0^\circ \le x \le 180^\circ$

$0 \le x \le \pi$

دالة معكوس جيب التمام :

$x = \text{Cos}^{-1}\, y$

$x = \text{Arccos}\, y$

كُتب حرف C كبير لأن مجال y محدد لكي يصبح المعكوس دالة

دالة الظل : $y = \text{Tan}\, x$

$-90^\circ \le x \le 90^\circ$

$\frac{-\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2}$

دالة معكوس الظل :

$x = \text{Tan}^{-1}\, y$

$x = \text{Arctan}\, y$

كُتب حرف T كبير لأن مجال y محدد لكي يصبح المعكوس دالة

ملاحظة : استعمل الآلة الحاسبة فتحصل على إجابة واحدة تمثل (قياس الزاوية المطلوبة)

تم تحميل هذا الملف من موقع المنهاج البحرينية
alManahj.com/bh

إيجاد قيم الدوال المثلثية العكسية

تدريب : أوجد قياس الزاوية بالدرجات والراديان :

① $\text{Sin}^{-1}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) =$

② $\text{Arccos}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) =$

③ $\text{Arctan}\left(-\sqrt{3}\right) =$

④ $\text{Arcsin}\,(-1) =$

حل المعادلات المثلثية باستعمال الدوال العكسية

تدريب : ما قيمة θ بالدرجات إلى أقرب جزء من عشرة ؟

⑤ $\text{Sin}\,\theta = -0.35$

A -20.5°
B 0.6°
C -0.6°
D 20.5°

⑥ $\text{Cos}\,\theta = -0.86$

A -149.3°
B -59.3°
C 59.3°
D 149.3°

⑦ $\text{Tan}\,\theta = 1.8$

A -60.9°
B 60.9°
C -29.1°
D 29.1°

⑫ تابع : الدوال المثلثية العكسية

تابع : حل المعادلات المثلثية باستعمال الدوال العكسية

⑧ ما قيمة : $\tan\left(\text{Tan}^{-1}\ 0.5\right)$ ؟

A -1

B 1

C -0.5

D 0.5

⑨ ما حل المعادلة : $\sec\theta = 2$ ؟

، حيث $0^\circ \le \theta \le 180^\circ$

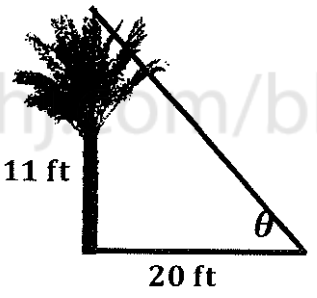
A 30°

B 45°

C 60°

D 150°

⑩ في الشكل ما قياس الزاوية θ لأقرب درجة ؟



A 61°

B 33°

C 57°

D 29°

⑪ اكتشف الخطأ : قام عمر وعلي بحل المعادلة $\cos x - 0.3 = 0$ ، حيث $0^\circ < x < 90^\circ$

فأي منهما حل المعادلة بصورة صحيحة ؟

عمر	علي
$\cos x = 0.3$	$\cos x = -0.3$
$x = \cos^{-1}(0.3)$	$x = \cos^{-1}(-0.3)$
$x \approx 72.5^\circ$	$x \approx 107.5^\circ$

⑫ ما هي قيمة θ بالراديان ؟ $\theta = -\frac{\pi}{2}$

$$\text{Sin}\,\theta = \tan\left[\text{Sin}^{-1}\left(\frac{-\sqrt{2}}{2}\right)\right]$$

⑬ حل المعادلة (θ بالراديان) ؟ $\theta = \pi$

$$\text{Cos}\,\theta = \tan\left[\text{Arccos}\left(\frac{-\sqrt{2}}{2}\right)\right]$$

تم تحميل هذا الملف من موقع المناهج البحرينية
almanahj.com/bh

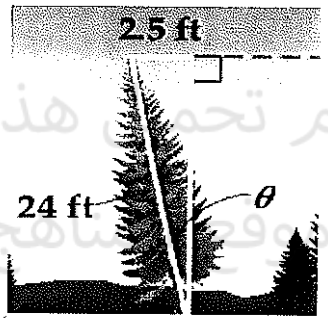
ريض 262

⑫ تابع : الدوال المثلثية العكسية

أ./ عابدين

تطبيقات حياتية على الدوال المثلثية العكسية

❶ شجرة طولها 24 ft ، وتميل عن الاتجاه الرأسي بمقدار 2.5 ft بزاوية (θ) كما في الشكل ، اكتب دالة مثلثية عكسية يمكن استعمالها لإيجاد قياس زاوية الميل θ ، ثم أوجد قياس الزاوية θ بالدرجات للأقرب جزء من عشرة .



[ج : $\theta \approx 6^\circ$]

❷ يسير قارب من نقطة R باتجاه الغرب إلى نقطة P ليقطع نهراً عرضه 190 m ، وبسبب التيار ينحرف ليصل القارب إلى النقطة Q التي تبعُد مسافة 59 m عن وجهته الأصلية P . اكتب دالة مثلثية عكسية يمكن استعمالها لإيجاد قياس الزاوية θ التي أزاح التيار القارب بها عن اتجاهه الأصلي ، ثم أوجد قياس هذه الزاوية بالدرجات درجة .

[الجواب : $\theta \approx 17^\circ$]

❸ تُقلع طائرة من المطار بسرعة ثابتة ، بعد أن قطعت الطائرة مسافة أفقية 800 yd كانت على ارتفاع 285 yd رأسياً . ، فما زاوية ارتفاع الطائرة خلال الإقلاع ؟

A 15.6°

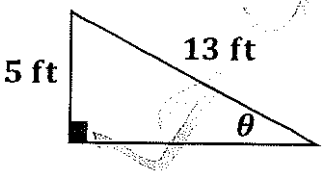
B 18.4°

C 19.6°

D 22.3°

❹ منحدر للتزلج ارتفاعه 5 ft ، وطوله 13 ft ، كما في الشكل أدناه . اكتب دالة مثلثية عكسية يمكن استعمالها لإيجاد θ قياس الزاوية التي يصنعها المنحدر مع سطح الأرض ، ثم أوجدها بالدرجات لأقرب عُشر .

[ج : $\theta \approx 22.6^\circ$]



تم تحميل هذا الملف من موقع المنهج البحرينية
alManahj.com/bh

⑫ نشاط : اختبر نفسك

تدريب : اختر الإجابة الصحيحة في كل مما يأتي (علماً بأنه توجد إجابة واحدة فقط صحيحة)

① ما قيمة $\tan\left[\text{Sin}^{-1}(-0.35)\right]$ إلى أقرب جزء من مئة ؟

A 0.37 C 0.01

B -0.37 D -0.01

② ما قيمة $\sin\left(\text{Arctan}\ \frac{4}{9}\right)$ إلى أقرب جزء من مئة ؟

A 0.91 C 0.41

B 0.92 D 0.50

③ ما قيمة $\cos\left(2\ \text{Sin}^{-1}\ 0.8\right)$ ؟

A 0.6 C 0.28

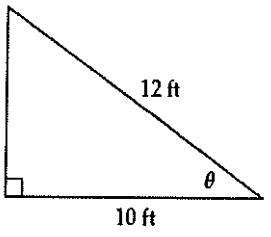
B -0.6 D -0.28

④ ما قيمة $\tan\left(\text{Arccos}\ -0.51\right)$ ؟

A -1.69 C 1.69

B -0.02 D 0.02

⑤ ما زاوية ارتفاع المنحدر بالشكل أدناه ؟



A 26.3°

B 28.5°

C 30.4°

D 33.6°

⑥ ما قيمة $\text{Sin}^{-1}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ ، بالراديان ؟

A $\frac{\pi}{6}$

B $\frac{\pi}{4}$

C $\frac{\pi}{3}$

D $\frac{\pi}{2}$

⑦ ما حل المعادلة : $\csc x = 1$ ، $0 \le x \le 2\pi$ ؟

A $\frac{\pi}{3}$

B $-\frac{\pi}{2}$

C $\frac{\pi}{2}$

D $\frac{3\pi}{2}$

⑧ إذا كان $\sin\theta = \frac{2}{3}$ ، $\frac{-\pi}{2} \le \theta \le \frac{\pi}{2}$ ، فما قيمة $\cos 2\theta$ ؟

A $-\frac{1}{9}$

B $\frac{1}{9}$

C $-\frac{1}{3}$

D $\frac{1}{3}$

تم تحميل هذا الملف من موقع المناهج البحرينية
alManahj.com/bh