مملكة البحرين
وزارة التربية و التعليم
مدرسة أحـمد العمران

مسائل في الإستقراء الرياضي مجمعة من إختبارات سابقة في ريض 319

الرياضيات (4)
ريض 262
الفصل الثاني (2010-2011)

تجميع: أ. عبدالإله حسن أحمد

* أثبت باستخدام مبدأ الاستقرار الرياضي صحة العبارات التالية لكل n عدد طبيعي :

$$3+3^2+3^3+...+3^n=\frac{3}{2}(3^n-1) \quad (1)$$

الحل :

نفرض أن مجموعة الكل $F : F \subset \mathbb{Z}^+$

أولاً : خطوة الابتداء : في حالة $(n=1)$

$\because L.H.S = 3 \quad , \quad R.H.S = \frac{3}{2}(3-1) = 3$ 1

$\therefore$ الطرفان متساويان

$\therefore$ العبارة صحيحة في حالة $(n=1)$. أي أن $1 \in F$

ثانياً : خطوة الاستنتاج : نفرض أن العبارة صحيحة في حالة $(n=r)$. أي أن $r \in F$

$3+3^2+3^3+......+3^r = \frac{3}{2}(3^r-1)$ ......(I) 1

نثبت أن العبارة صحيحة في حالة $(n=r+1)$. أي أن نثبت أن $r+1 \in F$

بإضافة الحد الذي رتبته $(r+1)$ إلى الطرفين في (I) نجد أن

$3+3^2+3^3+......+3^r+3^{r+1} = \frac{3}{2}(3^r-1)+3^{r+1}$ 1

$= \frac{3}{2}(3^r) - \frac{3}{2} + (3^r \cdot 3)$ 1

$= 3^r\left(\frac{3}{2}+3\right) - \frac{3}{2}$ ½

$= 3^r\left(\frac{9}{2}\right) - \frac{3}{2}$ ½

$= \frac{3}{2}(3^r \cdot 3 - 1)$ ½

$= \frac{3}{2}(3^{r+1}-1)$ ½

$\therefore$ العبارة صحيحة في حالة $(n=r+1)$. أي أن $r+1 \in F$

$\therefore$ بالاستقراء $F = \mathbb{Z}^+$ $(\forall n \in \mathbb{Z}^+)$

$$5+5^2+5^3+\ldots+5^n=\frac{5}{4}(5^n-1) \quad \textbf{(2)}$$

الحل :

نفرض أن مجموعة الحل هي : $F \subset Z^+$

أولاً : خطوة الابتداء (في حالة $n=1$)

$$L.H.S. = 5 \;\; \frac{1}{2} \quad , \quad R.H.S. = \frac{5}{4}(5-1) = \frac{5}{4}(4) = 5 \;\; 1$$

$\because$ الطرفان متساويان $\therefore$ العبارة صحيحة في حالة $(n=1)$ $\frac{1}{2}$

$\therefore 1 \in F$

ثانياً : خطوة التتابع (نفرض أن العبارة صحيحة في حالة $(n=r)$)

$$\therefore 5^1+5^2+5^3+\cdots\cdots+5^r=\frac{5}{4}(5^r-1) \;\; 1 \quad ---(1)$$

ولإثبات صحة العبارة في حالة $(n=r+1)$ علينا أن نثبت أن :

$$5^1+5^2+5^3+\cdots\cdots+5^r+5^{r+1}=\frac{5}{4}(5^{r+1}-1) \;\; \frac{1}{2}$$

بإضافة الحد الذي رتبته $(r+1)$ إلى الطرفين في (1) ، نحصل على :

$$5^1+5^2+5^3+\cdots\cdots+5^r+5^{r+1} \;\; \frac{1}{2} = \frac{5}{4}(5^r-1)+5^{r+1} \;\; \frac{1}{2}$$

$$=\frac{5^{r+1}}{4}-\frac{5}{4}+5^{r+1} \;\; \frac{1}{2} = 5^{r+1}\left(\frac{1}{4}+1\right)-\frac{5}{4} \;\; \frac{1}{2}$$

$$=5^{r+1}\left(\frac{5}{4}\right)-\frac{5}{4} \;\; \frac{1}{2} = \frac{5}{4}(5^{r+1}-1) \;\; \frac{1}{2}$$

$\therefore$ العبارة صحيحة في حالة $(n=r+1)$ ، أي أن $(r+1) \in F$

$\therefore F = Z^+$

$\therefore$ العبارة صحيحة :

$\forall\, n \in Z^+$ $\frac{1}{2}$

$$5\times6^1+5\times6^2+5\times6^2+\ldots+5\times6^n=6(6^n-1)$$ **(3)**

الحل :

نفرض أن مجموعة الحل هي :

$$F\subset Z^+$$

أولاً : خطوة الابتداء (في حالة $(n=1)$) :

$L.H.S = 5\times6 = 30$ ½ ، $R.H.S = 6(6-1) = 6\times5 = 30$ ½

$\because$ الطرفان متساويان $\therefore$ العبارة صحيحة في حالة $(n=1)$ ½

$\therefore 1\in F$

ثانياً : خطوة التتابع (نفرض أن العبارة صحيحة في حالة $(n=\text{ر})$) :

$$\therefore 5\times6^1+5\times6^2+5\times6^3+\ldots+5\times6^{\text{ر}}=6(6^{\text{ر}}-1)\quad ---(1)$$ 1

ولإثبات صحة العبارة في حالة $(n=\text{ر}+1)$ ، علينا أن نثبت أن :

$$5\times6^1+5\times6^2+5\times6^3+\ldots+5\times6^{\text{ر}+1}=6(6^{\text{ر}+1}-1)$$ ½

بإضافة الحد الذي رتبته $(\text{ر}+1)$ إلى الطرفين في (1) ، نحصل على :

$$5\times6^1+5\times6^2+5\times6^3+\ldots+5\times6^{\text{ر}}+5\times6^{\text{ر}+1}=6(6^{\text{ر}}-1)+5\times6^{\text{ر}+1}$$ ½ ½

$$=6[6^{\text{ر}}-1+5\times6^{\text{ر}}]$$ ½

$$=6(6\times6^{\text{ر}}-1)=6(6^{\text{ر}+1}-1)$$ ½ ½

$\therefore$ العبارة صحيحة في حالة $(n=\text{ر}+1)$ ، أي أن :

$(\text{ر}+1)\in F \qquad \therefore F=Z^+$ ½

$\therefore$ العبارة صحيحة لكل n تنتمي إلى Z^+

$$\frac{1}{3\times4}+\frac{1}{4\times5}+\ldots+\frac{1}{(n+2)(n+3)}=\frac{n}{3(n+3)} \quad (4)$$

الحل :

نفرض أن مجموعة الحل هي : $F\subset Z^{+}$

اولا : خطوة الابتداء : نثبت صحة العبارة عندما $n=1$ ($\frac{1}{2}$) ($\frac{1}{2}$)

$$L.H.S=\frac{1}{3\times4}=\frac{1}{12}\ ,\ R.H.S=\frac{1}{3\times4}=\frac{1}{12} \qquad \because\ L.H.S=R.H.S$$

العبارة صحيحة عندما $n=1$ ($\frac{1}{2}$)

ثانياً : خطوة التتابع : نفرض أن $r\in F$ أي أن العبارة صحيحة عندما $n=r$

$$\therefore\ \frac{1}{3\times4}+\frac{1}{4\times5}+\ldots\ldots\ldots+\frac{1}{(r+2)(r+3)}=\frac{r}{3(r+3)} \quad (1)$$

نثبت أن $(r+1)\in F$ أي أن العبارة صحيحة عندما $n=r+1$

بإضافة الحد الذي رتبته $(r+1)$ إلى الطرفين في ثانياً وهو : $\frac{1}{(r+3)(r+4)}$ ($\frac{1}{2}$)

$$\frac{1}{3\times4}+\frac{1}{4\times5}+\ldots\ldots+\frac{1}{(r+3)(r+4)}=\frac{r}{3(r+3)}+\frac{1}{(r+3)(r+4)} \quad (\tfrac{1}{2})$$

$$(\tfrac{1}{2})\ =\frac{r(r+4)+3}{3(r+3)(r+4)}\ (\tfrac{1}{2})$$

$$(\tfrac{1}{2})\ =\frac{r^2+4r+3}{3(r+3)(r+4)}=\frac{(r+1)(r+3)}{3(r+3)(r+4)}=\frac{r+1}{3(r+4)} \quad (\tfrac{1}{2})\ (\tfrac{1}{2})$$

$\therefore$ العبارة صحيحة عندما $n=r+1$

$$6+24+54+\ldots+6n^2=n(n+1)(2n+1) \quad (5)$$

<u>الحل :</u>

نفرض أن مجموعة الحل هي : $F \subset Z^+$

اولا : خطوة الابتداء : نثبت صحة العبارة عندما $n=1$ ١/٢ ١/٢

$\because L.H.S=R.H.S \qquad L.H.S=6 \;,\; R.H.S=1\times2\times3=6$

$\therefore$ العبارة صحيحة عندما $n=1$ ١/٢

ثانياً : خطوة التتابع : نفرض أن $r \in F$ أي أن العبارة صحيحة عندما $n=r$

$$\therefore \quad 6+24+54+\ldots\ldots\ldots\ldots+6r^2=r(r+1)(2r+1) \qquad ١$$

نثبت أن $(r+1)\in F$ أي أن العبارة صحيحة عندما $n=r+1$

بإضافة الحد الذي رتبته $(r+1)$ إلى الطرفين في ثانياً وهو : $6(r+1)^2$ ١

$$6+24+54+\ldots\ldots+6r^2+6(r+1)^2=r(r+1)(2r+1)+6(r+1)^2 \quad ١/٢$$

$$=(r+1)\left[r(2r+1)+6(r+1)\right] \quad ١$$

$$=(r+1)\left[2r^2+7r+6\right] \quad ١/٢$$

$$=(r+1)(r+2)(2r+3)$$

$\therefore$ العبارة صحيحة عندما $n=r+1$ ١

وهذا يثبت أن عندما $r\in F$ فإن $(r+1)\in F$

$\therefore \quad F=Z^+$ ١/٢ (أي أن العبارة صحيحة $\forall n\in Z^+$)

(6) $6+18+54+\ldots+2\times3^n=3^{n+1}-3$

<u>الحل :</u>

نفرض ان مجموعة الحل هي : $F\subset Z^+$

اولاً : خطوة الابتداء : تثبت صحة العبارة عندما $n=1$ $\frac{١}{٢}$ $\frac{١}{٢}$

$\frac{١}{٢}$ $\because\ L.H.S=R.H.S$ $\quad L.H.S=6\ ,\ R.H.S=9-3=6$

$\therefore$ العبارة صحيحة عندما $n=1$

ثانياً : خطوة التتابع : نفرض أن $r\in F$ أي أن العبارة صحيحة عندما $n=r$

(١) $\therefore\ 6+18+54+\ldots+2\times3^r=3^{r+1}-3$

نثبت أن $(r+1)\in F$ أي أن العبارة صحيحة عندما $n=r+1$

بإضافة الحد الذي رتبته $(r+1)$ إلى الطرفين في ثانياً وهو : $2\times3^{r+1}$ (١)

$$6+18+54+\ldots+2\times3^r+2\times3^{r+1}=3^{r+1}-3+2\times3^{r+1} \quad (١)$$

$$=3\times3^{r+1}-3 \quad (١)$$

$$=3^{r+2}-3 \quad (\tfrac{١}{٢})$$

$\frac{١}{٢}$ $\therefore$ العبارة صحيحة عندما $n=r+1$

(7) $(3^{2n}+7)$ تقبل القسمة على 8

الحل :

نفرض أن مجموعة الحل هي :

$$F \subset Z^+$$

أولاً : خطوة الابتداء (في حالة $(n=1)$)

$3^2+7=16$ (1)

تقبل القسمة على 8 $\therefore$ العبارة صحيحة في حالة $(n=1)$ $(\frac{1}{2})$

$\therefore 1 \in F$ $(\frac{1}{2})$

ثانياً : خطوة التتابع : (نفرض أن العبارة صحيحة في حالة $(n=r)$)

$\therefore (3^{2r}+7)$ تقبل القسمة على 8 $(\frac{1}{2})$

$\therefore 3^{2r}+7=8K \; , \; K\in Z^+ \Longrightarrow 7=8K-3^{2r}$ $(\frac{1}{2})$

ولإثبات صحة العبارة في حالة $(n=r+1)$: $(\frac{1}{2})$

$3^{2(r+1)}+7=3^{2r}\cdot 3^2+7=3^{2r}\cdot 3^2+8K-3^{2r}=3^{2r}(9-1)+8K$ $(\frac{1}{2})$ $(\frac{1}{2})$ $(\frac{1}{2})$ $(\frac{1}{2})$

$=3^{2r}(8)+8K$ $(\frac{1}{2})$

وحيث أن $8K$ تقبل القسمة على 8 ، $3^{2r}(8)$ تقبل القسمة على 8 $(\frac{1}{2})$

$\therefore$ العبارة صحيحة في حالة $(n=r+1)$ ، أي أن :

$(r+1)\in F \qquad \therefore F=Z^+$ $(\frac{1}{2})$

$\therefore$ العبارة صحيحة لكل n تنتمي إلى Z^+

(8) $(3^n - 2^n - 1)$ تقبل القسمة على 2

الحل :

نفرض أن مجموعة الحل هي : $F \subset Z^+$

اولا : خطوة الابتداء : نثبت صحة العبارة عندما $n = 1$

$3^1 - 2^1 - 1 = 0$ يقبل القسمة على 2 $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{2}$ $\therefore$ العبارة صحيحة عندما $n=1$ $\frac{1}{2}$

ثانياً : خطوة التتابع : نفرض أن $r \in F$ أي أن العبارة صحيحة عندما $n = r$

أي $(3^r - 2^r - 1)$ يقبل القسمة على 2 $\frac{1}{2}$

$\frac{1}{2}$ $\therefore 3^r - 2^r - 1 = 2k \quad , \quad k \in \{1, 2, 3, ...\}$

$\frac{1}{2}$ $3^r = 2^r + 2k + 1$

نثبت أن $(r+1) \in F$ أي أن العبارة صحيحة عندما $n = r + 1$

$3^{r+1} - 2^{r+1} - 1 = 3^r \times 3 - 2^r \times 2 - 1$ $\frac{1}{2}$

$= (2^r + 2k + 1) \times 3 - 2^r \times 2 - 1$ $\frac{1}{2}$

$= 2^r \times 3 + 6k + 3 - 2^r \times 2 - 1$ $\frac{1}{2}$

$= 2^r (3 - 2) + 6k + 2$ $\frac{1}{2}$

$= 2^r + 6k + 2$ $\frac{1}{2}$

$\frac{1}{2}$ وحيث أن $(2^r + 6k + 2)$ يقبل القسمة على 2 إذن $3^{r+1} - 2^{r+1} - 1$ يقبل القسمة على 2

$\frac{1}{2}$ $\therefore$ العبارة صحيحة عندما $n = r + 1$

وهذا يثبت أن عندما $r \in F$ فان $(r+1) \in F$

$\therefore \quad F = Z^+$ $\frac{1}{2}$ (أي أن العبارة صحيحة $\forall n \in Z^+$)

(9) $(4^{2n}+4^{n}-2)$ تقبل القسمة على 6

الحل :

اولاً : خطوة الابتداء : تثبت صحة العبارة عندما $n=1$

$16+4-2=18$ يقبل القسمة على 6 $\therefore$ العبارة صحيحة عندما $n=1$

ثانياً : خطوة التتابع : نفرض أن $r\in F$ أي أن العبارة صحيحة عندما $n=r$

أي $(4^{2r}+4^{r}-2)$ يقبل القسمة على 6

$$\therefore\ 4^{2r}+4^{r}-2=6k \quad ، \quad k\in\{1,2,3,\dots\}$$

$$4^{2r}=6k-4^{r}+2$$

نثبت أن $(r+1)\in F$ أي أن العبارة صحيحة عندما $n=r+1$

$$4^{2r+2}+4^{r+1}-2=4^{2r}\times 4^{2}+4^{r}\times 4-2$$
$$=(6k-4^{r}+2)\times 16+4^{r}\times 4-2$$
$$=96k-16\times 4^{r}+32+4^{r}\times 4-2$$
$$=96k-12\times 4^{r}+30$$
$$=6(16k-2\times 4^{r}+5)$$

وحيث أن $6(16k-2\times 4^{r}+5)$ يقبل القسمة على 6 $\therefore (4^{2n}+4^{n}-2)$

يقبل القسمة على 6 $\therefore$ العبارة صحيحة عندما $n=r+1$ وهذا يثبت أن عندما $r\in F$

فان $(r+1)\in F$ $\therefore$ $F=Z^{+}$ (أي أن العبارة صحيحة $\forall n\in Z^{+}$)