شكراً لتحميلك هذا الملف من موقع المناهج البحرينية

مذكرة ريض 263

تاريخ نشر الملف على موقع المناهج: 2024-03-04 14:32:48

التواصل الاجتماعي بحسب الصف الثاني الثاني

روابط مواد الصف الثاني الثاني على تلغرام

التربية الاسلامية	اللغة العربية	اللغة الانجليزية	الرياضيات

المزيد من الملفات بحسب الصف الثاني الثاني والمادة رياضيات في الفصل الأول

1	نموذج أسئلة امتحان نهاية الفصل الأوّل للعام الدراسي 2022/2023مقرر فيز 217
2	نموذج إجابة امتحان نهاية الفصل الأوّل للعام الدراسي 2017/2018
3	نموذج إجابة امتحان نهاية الفصل الأوّل للعام الدراسي 2016/2017
4	نموذج امتحان نهاية الفصل الأول للعام الدراسي 2022/2023

المزيد من الملفات بحسب الصف الثاني الثانوي والمادة رياضيات في الفصل الأول	
5	نموذج أسئلة امتحان نهاية الفصّل الأوّل

مُذكرة ريض 263 لعام 2020

الرياضيات 4

اسم الطالب: .....

الصف: .....

المدرسة: .....

JANUARY 26, 2020

إعداد الأستاذ : محمود عبدالأمير زيد

الرياضيات 4

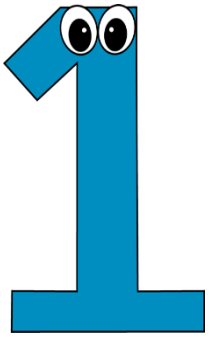
الوحدة الأولى (كثيرات الحدود ودوالها)	الوحدة الثانية (القطوع المخروطية)	الوحدة الثالثة (الاحتمال والإحصاء)
1-1: العمليات على كثيرات الحدود	2-1: القطوع المُكافئة	3-1: الدراسات التجريبية والمسحية وبالمُلاحظة
1-2: قسمة كثيرات الحدود	2-2: الدوائر	3-2: التحليل الإحصائي
1-3: دوال كثيرات الحدود	2-3: القطوع الناقصة	3-3: الاحتمال المشروط
1-4: تحليل التمثيلات البيانية لدوال كثيرات الحدود	2-4: القطوع الزائدة	3-4: الاحتمال والتوزيعات الاحتمالية
1-5: حل مُعادلات كثيرات الحدود	2-5: تحديد نوع القطوع المخروطية	3-5: التوزيع الطبيعي
1-6: نظريتا الباقي والعوامل	2-6: حل الأنظمة الخطية وغير الخطية	3-6: التوزيعات ذات الحدين
1-7: الجذور والأصفار		
1-8: نظرية الصفر النسبي		

اليوم:.....

التاريخ:.....

الحصة:.....

الوحدة الأولى : (كثيرات الحدود ودوالها)



الدرس الأول : العمليات على كثيرات الحدود

ملخص المفهوم

أضف إلى مطويتك

خصائص الأسس

لأي عددين حقيقيين x , y وعددين صحيحين a , b :

الخاصية	التعريف	مثال
ضرب القوى	$x^a \cdot x^b = x^{a+b}$	$3^2 \cdot 3^4 = 3^{2+4} = 3^6$ $p^2 \cdot p^9 = p^{2+9} = p^{11}$
قسمة القوى	$\frac{x^a}{x^b} = x^{a-b}, x \neq 0$	$\frac{9^5}{9^2} = 9^{5-2} = 9^3$ $\frac{b^6}{b^4} = b^{6-4} = b^2$
الأسّ السالب	$x^a = \frac{1}{x^{-a}}, x^{-a} = \frac{1}{x^a}, x \neq 0$	$3^{-5} = \frac{1}{3^5}$ $\frac{1}{b^{-7}} = b^7$
قوة القوة	$(x^a)^b = x^{ab}$	$(3^3)^2 = 3^{3 \cdot 2} = 3^6$ $(d^2)^4 = d^{2 \cdot 4} = d^8$
قوة ناتج الضرب	$(xy)^a = x^a y^a$	$(2k)^4 = 2^4 k^4 = 16k^4$ $(ab)^3 = a^3 b^3$
قوة ناتج القسمة	$\left(\frac{x}{y}\right)^a = \frac{x^a}{y^a}, y \neq 0,$ $\left(\frac{x}{y}\right)^{-a} = \left(\frac{y}{x}\right)^a = \frac{y^a}{x^a}, x \neq 0, y \neq 0$	$\left(\frac{x}{y}\right)^2 = \frac{x^2}{y^2}$ $\left(\frac{a}{b}\right)^{-5} = \frac{b^5}{a^5}$
القوة الصفرية	$x^0 = 1, x \neq 0$	$7^0 = 1$

مفهوم أساسي

أضف إلى مطويتك

تبسيط وحيدات الحد

تكون وحيدة الحد في أبسط صورة عندما:

- لا تتضمن قوى القوة.
- يظهر كل أساس مرة واحدة.
- تكون جميع الكسور المتضمنة في أبسط صورة.
- لا تتضمن أسسًا سالبة.

مثال1: بسّط كل تعبير مما يأتي مُفترضًا أن أيًّا من المُتغيرات لا يساوي صفرًا :

A) $(2x^{-3}y^{3})(-7x^{5}y^{-6})$

B) $\frac{15c^{5}d^{3}}{-3c^{2}d^{7}}$

D) $(-2x^{3}y^{2})^{5}$

C) $\left(\frac{a}{4}\right)^{-3}$

تمرين1: بسّط كل تعبير مما يأتي مُفترضًا أن أيًّا من المُتغيرات لا يساوي صفرًا :

A) $(-2b^{-2}c^{3})^{3}$

B) $8u(2z)^{3}$

D) $\left(\frac{2x^{3}y^{2}}{-x^{2}y^{5}}\right)^{-2}$

C) $-(4w^{-3}z^{-5})(8w)^{2}$

مثال2: حدّد إذا كان كل تعبير مما يأتي كثيرة حدود أو لا ، وإن كان كذلك فأذكر درجتها:

A) $\frac{1}{4}x^4y^3 - 8x^5$

B) $\sqrt{x} + x + 4$

C) $\frac{ab^3-1}{az^4+3}$

D) $\frac{x}{y} + 3x^2$

تمرين2: حدّد إذا كان التعبير كثيرة حدود أو لا ، وإن كان كذلك فأذكر درجتها:

$$x^5y + 9x^4y^3 - 2xy$$

مثال3: بسّط كُلًا من التعبيرين الآتيين:

A) $(4x^2 - 5x + 6) - (2x^2 + 3x - 1)$

B) $(6x^2 - 7x + 8) + (-4x^2 + 9x - 5)$

تمرين3: بسّط كُلًا من التعبيرين الآتيين:

A) $(-x^2 - 3x + 4) - (x^2 + 2x + 1)$

B) $(3x^2 - 6) + (-x^2 + 1)$

مثال4: أوجد ناتج: $3x(2x^2 - 4x + 6)$

تمرين4: أوجد ناتج: $\frac{4}{3}x^2(6x^2 + 9x - 12)$

مثال5: تتطلب تعليمات السلامة في إحدى شركات النقل البري تحديد مدة قيادة سائقي الشاحنات $10h$ يوميًا، تتخللها فترة استراحة، إذا قاد أحد سائقي الشركة شاحنته في فترة ما قبل الاستراحة بسرعة $90km/h$ ، وبعد الاستراحة بسرعة $100km/h$ ، فاكتب كثيرة حدود تمثل المسافة التي قطعها.

تمرين5: استثمر فيصل مبلغ $90000BD$ في مشروعين أحدهما صناعي نسبة ربحه السنوي 18% ، والآخر عقاري نسبة ربحه السنوي 42%، إذا كانت x تُمثل المبلغ الذي استثمره فيصل في المشروع العقاري، فاكتب كثيرة حدود تُمثل ربحه في المشروعين بعد عام واحد.

مثال6: أوجد ناتج $(n^2 + 4n - 6)(n + 2)$.

تمرين6: أوجد ناتج $(2x^2 - 4x + 5)(3x - 1)$.

تدريب1: بسّط كل مما يأتي:

a) $(2a^3b^{-2})(-4a^2b^4)$

b) $\frac{12x^4y^2}{2xy^5}$

c) $\left(\frac{2a^2}{3b}\right)^3$

d) $\left(6g^5h^{-4}\right)^3$

تدريب2: حدّد ما إذا كان كل تعبير مما يأتي كثيرة حدود أم لا:

a) $3x + 4y$

b) $\frac{1}{2}x^2 - 7y$

c) $x^2 + \sqrt{x}$

تدريب3: أوجد ناتج $(-5x + 2)(3x^2 + x - 1)$.

تدريب4: يُمارس عثمان رياضتي الركض السريع ورفع الأثقال مدة 75min يوميًا. وعند ركضه يحرق 10 سعرات حرارية في الدقيقة، أما عندما يرفع الأثقال يحرق 7.5 سعرات حرارية في الدقيقة. إذا يمارس رفع الاثقال $xmin$ في أحد الأيام، فاكتب كثيرة حدود تمثل عدد السعرات الحرارية التي حرقها في ممارسته للرياضتين ذلك اليوم.

اليوم:.....

التاريخ:.....

الحصة:.....

الدرس الثاني : قسمة كثيرات الحدود

مثال1:بسّط المقدار $\frac{6x^4y^3+12x^3y^2-18x^2y}{3xy}$.

قسمة وحيدات الحد باستخدام مهارات التبسيط السابقة التي تعلمتها في الدرس السابق أو في المقررات السابقة.

تمرين1A:بسّط المقدار $(20c^4d^2f-16cdf^2+4cdf)\div(4cdf)$.

تمرين1B:بسّط المقدار $(18x^2y+27x^3y^2z)(3xy)^{-1}$.

القسمة المُطوّلة لكثيرات الحدود تُسمى بخوازمية القسمة.

مثال2:استعمل القسمة المطولة لإيجاد ناتج $(x^2+3x-40)\div(x-5)$.

تمرين2A:استعمل القسمة المطولة لإيجاد ناتج $(x^2 + 7x - 30) \div (x - 3)$.

تمرين2B:استعمل القسمة المطولة لإيجاد ناتج $(x^2 - 13x + 12) \div (x - 1)$.

مثال3:استعمل القسمة المطولة لإيجاد ناتج $(a^2 + 7a - 11)(3 - a)^{-1}$.

تمرين3:استعمل القسمة المطولة لإيجاد ناتج $(r^2 + 5r + 7)(1 - r)^{-1}$.

مفهوم أساسي

أضف إلى مطويتك

القسمة التركيبية

الخطوة 1 اكتب معاملات المقسوم بعد ترتيب حدوده تنازليًا بحسب درجتها. تأكد من أن المقسوم عليه على الصورة $x - r$، ثم اكتب الثابت r في الصندوق، واكتب المعامل الأول أسفل الخط الأفقي.

الخطوة 2 اضرب المعامل الأول في r، واكتب الناتج أسفل المعامل الثاني.

الخطوة 3 اجمع ناتج الضرب مع المعامل الثاني.

الخطوة 4 كرر الخطوتين 3 , 2 حتى تصل إلى ناتج جمع العددين في العمود الأخير. الأعداد في الصف الأخير تمثل معاملات ناتج القسمة، ودرجة الحد الأول أقل بواحد من درجة المقسوم، والعدد الأخير هو الباقي.

مثال4: استعمل القسمة التركيبية لإيجاد ناتج $(2x^3 - 13x^2 + 26x - 24) \div (x - 4)$.

تمرين4A: استعمل القسمة التركيبية لإيجاد ناتج $(2x^3 + 3x^2 - 4x + 15) \div (x + 3)$.

تمرين4B: استعمل القسمة التركيبية لإيجاد ناتج $(4a^4 + 2a^2 - 4a + 12) \div (a + 2)$.

مثال5:استعمل القسمة التركيبية لإيجاد ناتج $(3x^4 - 5x^3 + x^2 + 7x) \div (3x + 1)$.

تمرين5A:استعمل القسمة التركيبية لإيجاد ناتج $(8x^4 - 4x^2 + x + 4) \div (2x + 1)$.

تمرين5B:استعمل القسمة التركيبية لإيجاد ناتج $(15b^3 + 8b^2 - 21b + 6) \div (5b - 4)$.

تدريب1:استعمل القسمة التركيبية لإيجاد ناتج $(3x^3 - 8x^2 + 11x - 14) \div (x - 2)$.

تدريب2:استعمل القسمة التركيبية لإيجاد ناتج $(8y^5 - 2y^4 - 16y^2 + 4) \div (4y - 1)$.

تدريب3: صُمّم صندوق على شكل متوازي مستطيلات بحيثُ ترتبط أبعاده بعلاقة مُعينة بدلالة المُتغير x، حيثُ x عدد طبيعي. إذا كان حجم الصندوق $6x^3 + 31x^2 + 53x + 30$، وارتفاعه $x + 2$، فما عرضه، وما طوله علمًا بأن طوله وعرضه من العوامل الأولية لحجمه؟

الدرس الثالث : دوال كثيرات الحدود

اليوم:.....

التاريخ:.....

الحصة:.....

كثيرة الحدود	التعبير	الدرجة	المعامل الرئيس
الثابتة	12	0	12
الخطية	$4x-9$	1	4
التربيعية	$5x^2-6x-9$	2	5
التكعيبية	$8x^3+12x^2-3x+1$	3	8
الصيغة القياسية	$a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$	n	a_n

مثال1: حدّد الدرجة والمُعامل الرئيس لكل كثيرة حدود في مُتغير واحد مما يأتي، وإذا لم تكون كثيرة حدود في مُتغير واحد، فاذكر السبب.

$8x^5-4x^3+2x^2-x-3$	$12x^2-3xy+8x$
كثيرة حدود من متغير واحد: (نعم / لا)	كثيرة حدود من متغير واحد: (نعم / لا)
الدرجة:	الدرجة:
المُعامل الرئيس:	المُعامل الرئيس:

تمرين1: حدّد الدرجة والمُعامل الرئيس لكل كثيرة حدود في مُتغير واحد مما يأتي، وإذا لم تكون كثيرة حدود في مُتغير واحد، فاذكر السبب.

$5x^3-4x^2-8x+\frac{4}{x}$	$5x^6-3x^4+12x^3-14$
كثيرة حدود من متغير واحد: (**نعم / لا**)	كثيرة حدود من متغير واحد: (**نعم / لا**)
الدرجة:	الدرجة:
المُعامل الرئيس:	المُعامل الرئيس:

مثال2: يمكن تمثيل حجم الهواء في رئة الإنسان خلال دورة تنفس مُدتها:
$v(t) = -0.037t^3 + 0.152t^2 + 0.173t\ min$، حيثُ v الحجم باللترات، و t الزمن بالثواني.

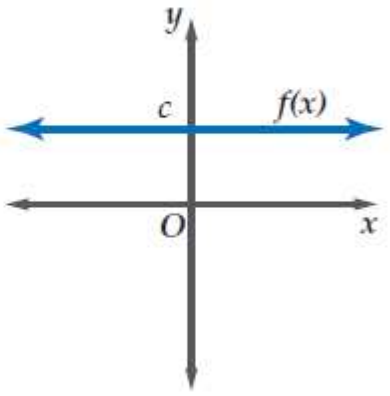
أوجد حجم الهواء في الرئتين خلال دورة تنفس مُدتها 2_{sec}، وبعد 4_{sec}.

مثال3: إذا كانت $g(x) = x^2 - 5x + 8$ ، فأوجد $g(5a - 2) + 3g(2a)$

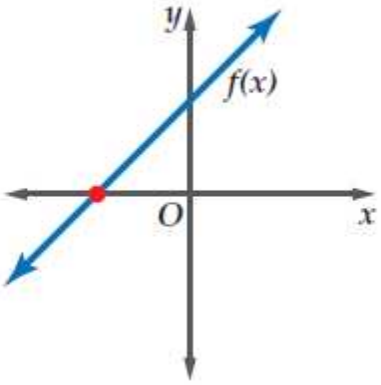
تمرين3: إذا كانت $h(x) = 2x^2 + 5x + 3$ ، فأوجد $h(-4d + 3) - 0.5h(d)$

تمثيل دوال كثيرات الحدود بيانيًا:

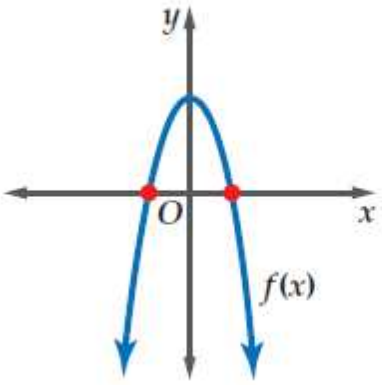
الدالة الثابتة الدرجة 0



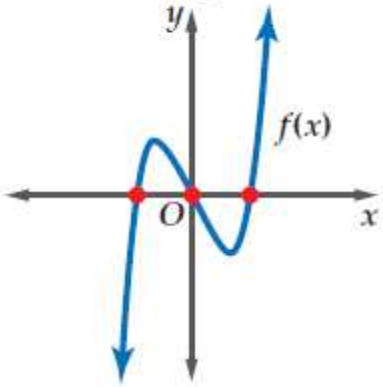
الدالة الخطية الدرجة 1



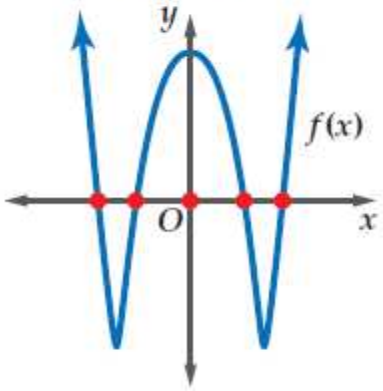
الدالة التربيعية
الدرجة 2



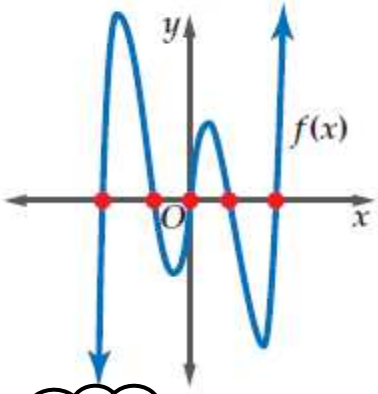
الدالة التكعيبية
الدرجة 3



دالة من الدرجة الرابعة
الدرجة 4



دالة من الدرجة الخامسة
الدرجة 5



ملاحظة مهمة

سلوك طرفي التمثيل البياني لكثيرات الحدود

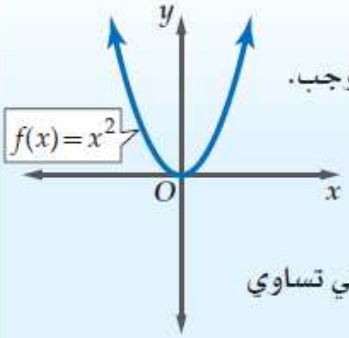
المُعامل الرئيس ودرجة كثيرة الحدود هما العاملان الوحيدان في تحديد لطرفي التمثيل البياني. إذا كان لطرفي التمثيل البياني الاتجاه نفسه، فالدالة زوجية الدرجة، أما إذا كان لهما اتجاهان مُختلفان، فالدالة فرديّة الدرجة.

مفهوم أساسي

أضف إلى مطويتك

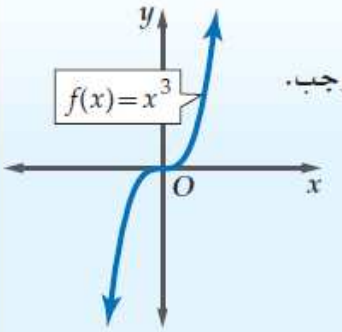
سلوك طرفي التمثيل البياني لدالة كثيرة الحدود

نوع الدرجة زوجية
المعامل الرئيس عدد موجب.
المجال مجموعة الأعداد الحقيقية.
المدى مجموعة الأعداد الحقيقية الأكبر من أو التي تساوي القيمة الصغرى .



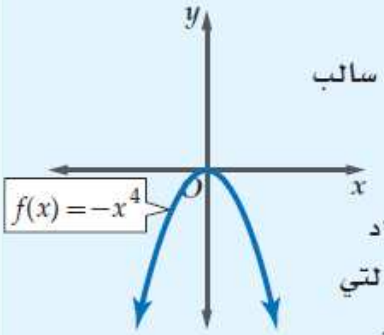
سلوك طرفي التمثيل البياني
$x \to -\infty$ عندما $f(x) \to +\infty$
$x \to +\infty$ عندما $f(x) \to +\infty$

نوع الدرجة فردية
المعامل الرئيس عدد موجب.
المجال مجموعة الأعداد الحقيقية.
المدى: مجموعة الأعداد الحقيقية.



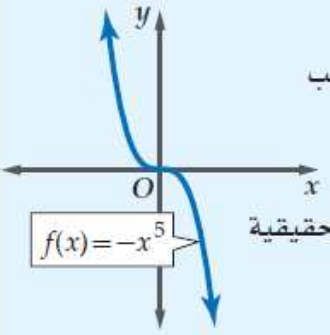
سلوك طرفي التمثيل البياني
$x \to -\infty$ عندما $f(x) \to -\infty$
$x \to +\infty$ عندما $f(x) \to +\infty$

نوع الدرجة زوجية
المعامل الرئيس عدد سالب
المجال مجموعة الأعداد الحقيقية
المدى مجموعة الأعداد الحقيقية الأقل من أو التي تساوي القيمة العظمى.



سلوك طرفي التمثيل البياني
$x \to -\infty$ عندما $f(x) \to -\infty$
$x \to +\infty$ عندما $f(x) \to -\infty$

نوع الدرجة فردية
المعامل الرئيس عدد سالب
المجال مجموعة الأعداد الحقيقية
المدى مجموعة الأعداد الحقيقية



سلوك طرفي التمثيل البياني
$x \to -\infty$ عندما $f(x) \to +\infty$
$x \to +\infty$ عندما $f(x) \to -\infty$

مفهوم أساسي

أضف إلى مطويتك

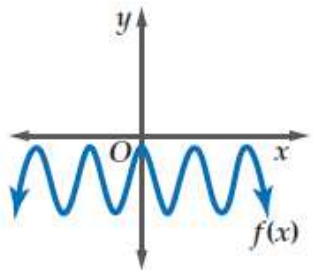
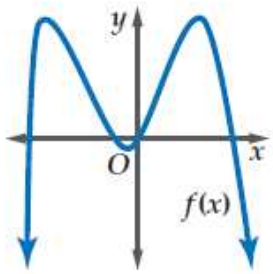
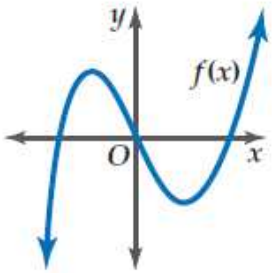
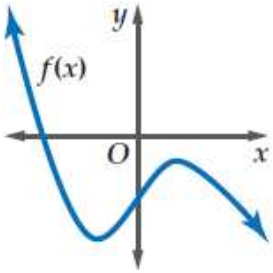
أصفار الدوال الفردية الدرجة والزوجية الدرجة

يكون للدوال الفردية الدرجة عدد فردي من الأصفار المنتمية إلى مجموعة الأعداد الحقيقية، ويكون للدوال الزوجية الدرجة عدد زوجي من الأصفار أو لا يكون لها أصفار تنتمي إلى مجموعة الأعداد الحقيقية.

ملاحظة مهمة

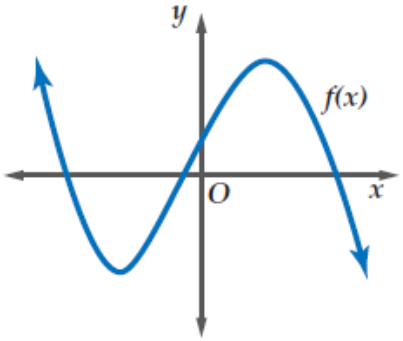
الصفر المُكرر مرتين وصفر الدالة

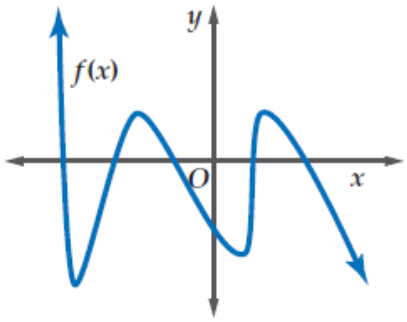
عندما يمس التمثيل البياني المحور x يكون للدالة **صفران مُتساويان**. أما **صفر الدالة** هو الإحداثي x لنقطة تقاطع التمثيل البياني للدالة مع المحور x.

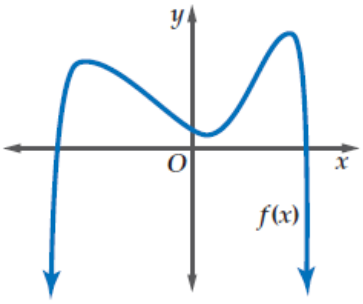
كثيرتا حدود زوجيتا الدرجة		كثيرتا حدود فرديتا الدرجة	
			
ليس لها أصفار تنتمي إلى مجموعة الأعداد الحقيقية	لها 4 أصفار تنتمي إلى مجموعة الأعداد الحقيقية	لها 3 أصفار تنتمي لمجموعة الأعداد الحقيقية	لها صفر واحد ينتمي إلى مجموعة الأعداد الحقيقية

مثال4: أجب عمّا يأتي لكل من التمثيلين البيانيين أدناه:

- صف سلوك طرفي التمثيل البياني.
- حدّد إذا كانت درجة كثيرة الحدود فردية أو زوجية، وعدد الأصفار الحقيقية.

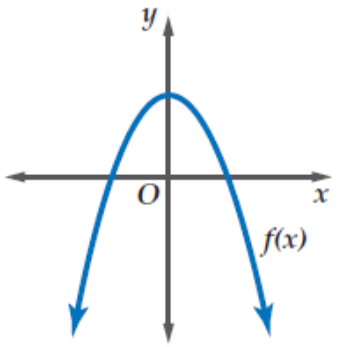




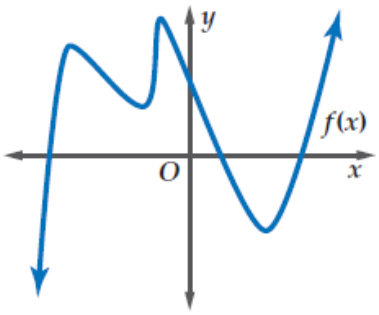


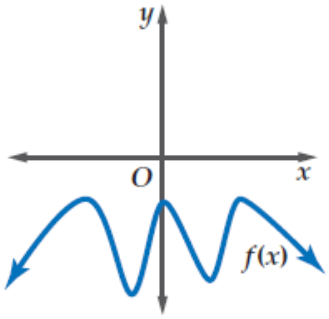
تمرين4: أجب عمّا يأتي لكل من التمثيلين البيانيين أدناه:

- صف سلوك طرفي التمثيل البياني.
- حدّد إذا كانت درجة كثيرة الحدود فردية أو زوجية، وعدد الأصفار الحقيقية.

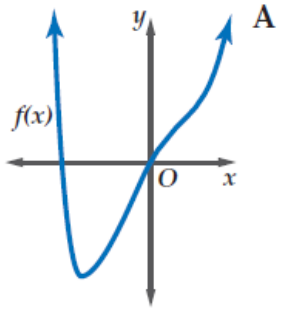
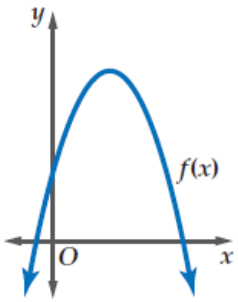
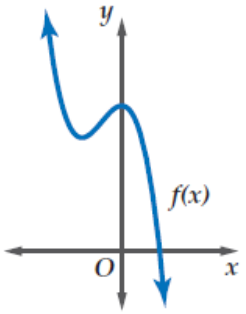
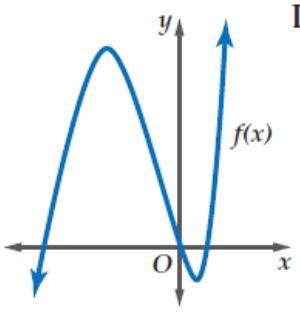


تدريب1: حدّد عدد الأصفار الحقيقية للدالة وصف سلوك طرفي الدالة:





تدريب2: استعمل الدرجة وسلوك طرفي التمثيل البياني لتقابل بين كل دالة وتمثيلها البياني مما يأتي:

$f(x) = -4x^3 - 4x^2 + 8$ ☐	A 
$f(x) = -2x^2 + 8x + 5$ ☐	B 
$f(x) = x^4 - 3x^2 + 6x$ ☐	C 
$f(x) = x^3 + 3x^2 - 4x$ ☐	D 

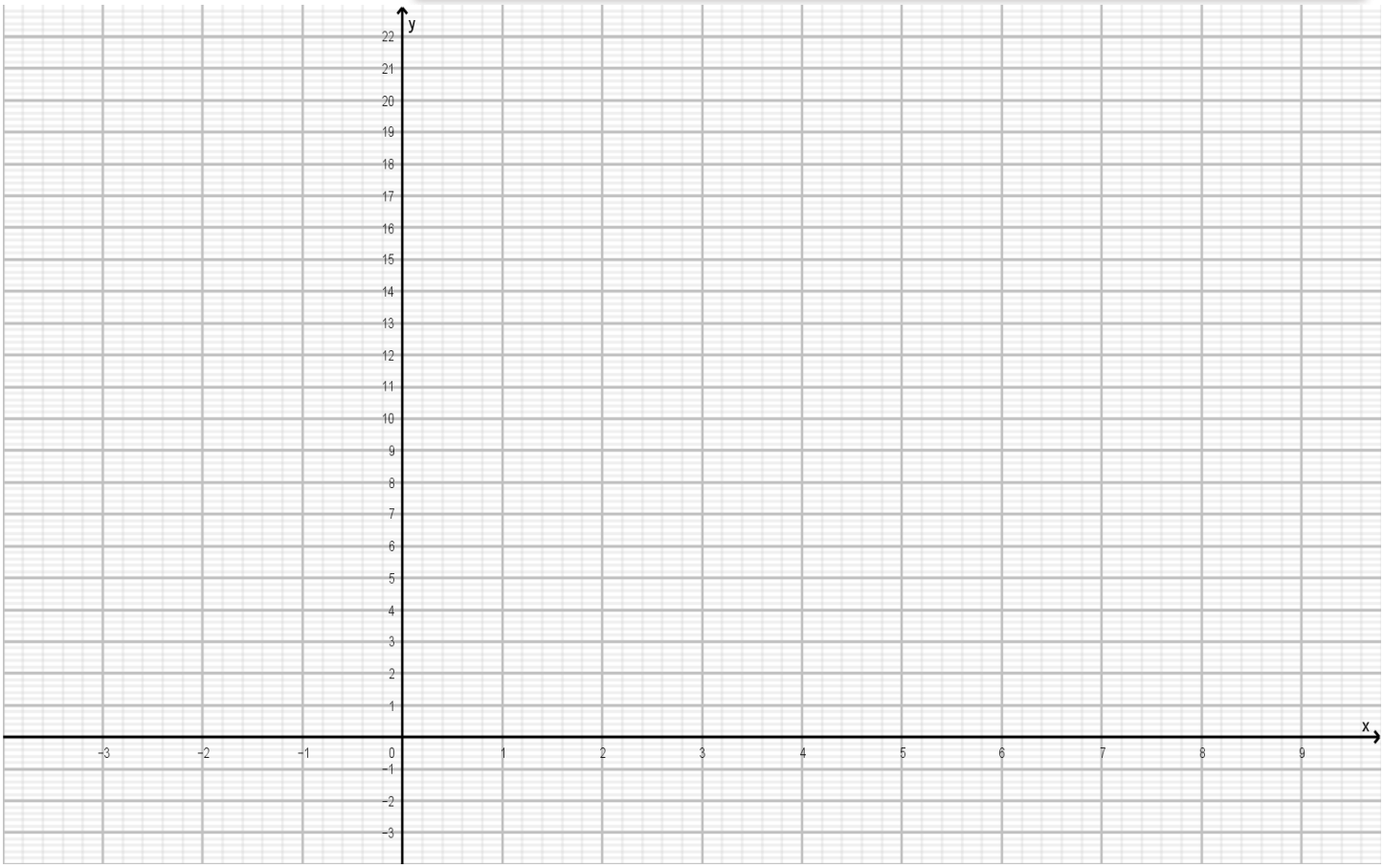
الدرس الرابع : تحليل التمثيلات البيانية لدوال كثيرات الحدود

اليوم:.....

التاريخ:.....

الحصة:.....

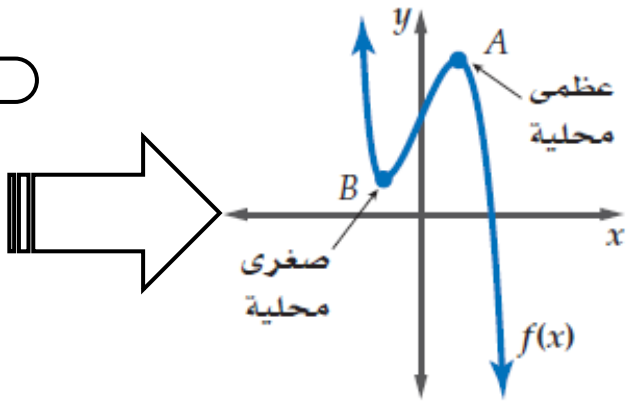
مثال1: مثّل الدالة $f(x) = x^4 - x^3 - 2$ بيانيًا بتكوين جدول القيم.



مثال2: حدّد كل قيمتين صحيحتين مُتتاليتين للمُتغير x يقع بينهما صفر حقيقي للدالة.

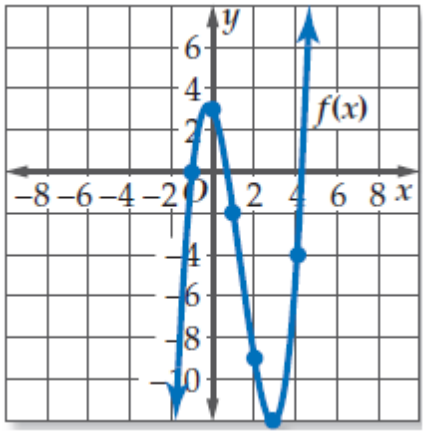
$$f(x) = x^4 - 3x^3 - 2x^2 + x + 1$$

يكون لمُنحنى دالة كثيرة الحدود من الدرجة n، على الأكثر $n - 1$ نقطة تحوّل.



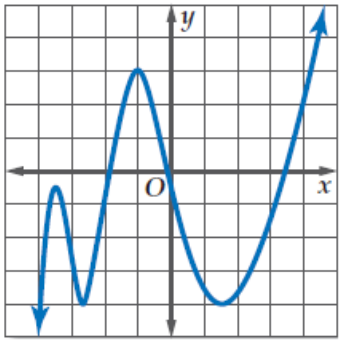
مثال3: قدّر الإحداثي x يقع للنقاط العظمى المحلية، والنقاط الصغرى المحلية.

$$f(x) = x^3 - 4x^2 - 2x + 3$$



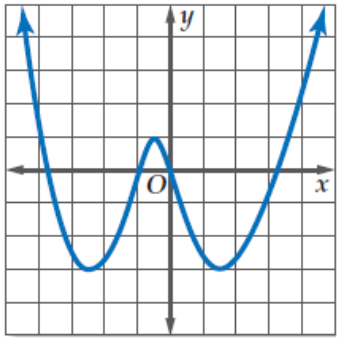
تدريب1: أجب عمّا يأتي:

a(قدّر الإحداثي x لكل نقطة تحول، وحدّد إذا كانت عظمى محلية أو صغرى محلية.
b(قدّر الإحداثي x لكل صفر من أصفار الدالة.
c(حدّد أقل درجة مُمكنة للدالة.
d(حدّد كُلًّا كم مجال الدالة ومداها.



تدريب2: أجب عمّا يأتي:

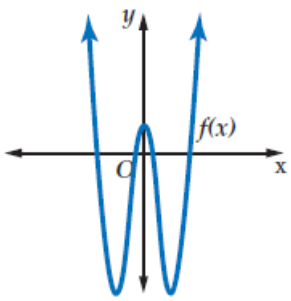
e(قدّر الإحداثي x لكل نقطة تحول، وحدّد إذا كانت عظمى محلية أو صغرى محلية.
f(قدّر الإحداثي x لكل صفر من أصفار الدالة.
g(حدّد أقل درجة مُمكنة للدالة.
h(حدّد كُلًّا كم مجال الدالة ومداها.



تدريب3: ما عدد الأصفار الحقيقية للدالة المُمثلة بيانيًا في الشكل المُجاور؟

A

تدريب3: يُبين الشكل المُجاور التمثيل البياني لدالة كثيرة الحدود $f(x)$، ما درجة $f(x)$ ؟



3 A

4 B

5 D

6 C

الدرس الخامس : حل مُعادلات كثيرة الحدود

اليوم:.....

التاريخ:.....

الحصة:.....

ملخص المفهوم

أضف إلى مطويتك

طرائق التحليل

عدد الحدود	طريقة التحليل	الحالة العامة
أي عدد	إخراج العامل المشترك الأكبر	$4a^3b^2 - 8ab = 4ab(a^2b - 2)$
حدّان	الفرق بين مربعين	$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$
	مجموع مكعبين	$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$
	الفرق بين مكعبين	$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$
ثلاثة حدود	ثلاثية حدود على صورة المربع الكامل	$a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$ $a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$
	ثلاثية الحدود على الصورة العامة	$acx^2 + (ad + bc)x + bd = (ax + b)(cx + d)$
أربعة حدود أو أكثر	تجميع الحدود	$ax + bx + ay + by = x(a + b) + y(a + b)$ $= (a + b)(x + y)$

مثال1: حلّل كُلًّا من كثيرتي الحدود الآتيتين، وإذا لم يكن ذلك مُمكنًا، فاكتب "كثيرة حدود أولية".

a) $3a^2bx + 15cx^2y + 25ad^3y$

b) $20fy - 16fz + 15gy + 8hz - 10hy - 12gz$

تمرين1: حلّل كُلًّا من كثيرتي الحدود الآتيتين، وإذا لم يكن ذلك مُمكنًا، فاكتب "كثيرة حدود أولية".

c) $30ax - 24bx + 6cx - 5ay^2 + 4by^2 - cy^2$

d) $13ax + 18bz - 15by - 14az - 32bx + 9ay$

مثال2: حلّل كُلًّا من كثيرتي الحدود الآتيتين، وإذا لم يكن ذلك مُمكنًا، فاكتب "كثيرة حدود أولية".

e) $x^6 - y^6$

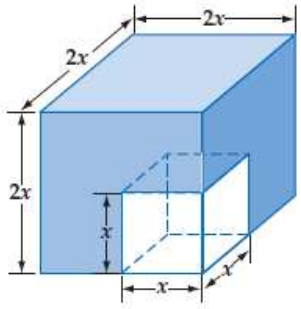
f) $a^3x^2 - 6a^3x + 9a^3 - b^3x^2 + 6b^3x - 9b^3$

تمرين2: حلّل كُلًّا من كثيرتي الحدود الآتيتين، وإذا لم يكن ذلك مُمكنًا، فاكتب "كثيرة حدود أولية".

g) $a^6 + b^6$

h) $x^5 + 4x^4 + 4x^3 + x^2y^3 + 4xy^3 + 4y^3$

مثال3: قُطع مُكعب صغير من آخر كبير كما في الشكل المُجاور، وأُعطي حجم الجزء المُتبقي يساوي $7000cm^3$، والمطلوب إيجاد أبعاد المُكعبين الصغير والكبير. إذا كان طول ضلع المُكعب الصغير يُساوي نصف طول ضلع المُكعب الكبير. فما بُعدا المُكعبين؟



تمرين3: إذا كان طول ضلع المُكعب الصغير ثلث طول ضلع المُكعب الكبير، وحجم الجزء المُتبقي $\mathbf{3250}\boldsymbol{cm^3}$، فأوجد بُعدي المُكعبين.

مفهوم أساسي

أضف إلى مطويتك

الصورة التربيعية

التعبير اللفظي الصورة التربيعية لكثيرة الحدود في متغير x هي $au^2 + bu + c$، حيث a,b,c أعداد حقيقية، $a \neq 0$، u هو تعبير جبري بدلالة المتغير x.

مثال $12x^6 + 8x^3 + 1 = 3u^2 + 4u + 1,\ u = 2x^3$

مثال4: اكتب التعبيرين الآتيين على الصورة التربيعية، إن أمكن ذلك:

(a $\mathbf{150}\boldsymbol{n^8} + \mathbf{40}\boldsymbol{n^4} - \mathbf{15}$

(b $\boldsymbol{y^8} + \mathbf{12}\boldsymbol{y^3} + \mathbf{8}$

تمرين4: اكتب التعبيرين الآتيين على الصورة التربيعية، إن أمكن ذلك:

c) $x^4 + 5x + 6$

d) $8x^4 + 12x^2 + 18$

مثال5: حل المُعادلة $18x^4 - 21x^2 + 3 = 0$

تمرين5A: حل المُعادلة $4x^4 - 8x^2 + 3 = 0$

تمرين5B: حل المُعادلة $8x^4 + 10x^2 - 12 = 0$

تدريب1: حل المُعادلة $x^4 - 19x^2 + 48 = 0$

تدريب2: حل المُعادلة $x^3 + 27 = 0$

تدريب3: صنع أنس ممرًا خشبيًا عرضه $\boldsymbol{xft}$ حول بركة مُستطيلة الشكل. إذا كان طول البركة $\boldsymbol{40ft}$ وعرضها $\boldsymbol{30ft}$، ومساحة سطحُها مع الممر $\boldsymbol{2000ft^2}$، فما عرض الممر الخشبي ؟

تدريب4: إذا كان $\boldsymbol{f(t) = t^3 + 5t^2 - 4t - 20}$، فأوجد $\boldsymbol{t}$ عندما $\boldsymbol{f(t) = 0}$.

تدريب5: ما حلول المُعادلة $\boldsymbol{15x^4 - 8x^2 + 1 = 0}$

الدرس السادس : نظريتا الباقي والعوامل

اليوم:.....

التاريخ:.....

الحصة:.....

نظرية

أضف إلى مطويتك

نظرية الباقي

التعبير اللفظي إذا قسمت كثيرة حدود $P(x)$ على $x-r$ ، فإن الباقي ثابت ويساوي $P(r)$ ، وكذلك :

المقسوم		ناتج القسمة		المقسوم عليه		الباقي
$P(x)$	$=$	$Q(x)$	$\cdot$	$(x-r)$	$+$	$P(r)$

حيث $Q(x)$ دالة كثيرة حدود تقل درجتها بواحد عن درجة $P(x)$.

مثال $x^2+6x+2 = (x-4)\cdot(x+10)+42$

تُسمى عملية تطبيق نظرية الباقي باستعمال القسمة التركيبية لإيجاد قيمة الدالة **التعويض التركيبي.** وهي طريقة سهلة لإيجاد قيمة دالة، خصوصًا عندما تكون درجة كثيرة الحدود أكبر من الدرجة الثانية.

مثال1: إذا كان $f(x) = 3x^4 - 3x^3 + 5x + 2$، فأوجد $f(4)$. مُستخدمًا الطريقتين التعويض التركيبي والتعويض المُباشر.

التعويض التركيبي

التعويض المُباشر

تمرين1A: إذا كان $f(x) = 3x^3 - 6x^2 + x - 11$، فأوجد $f(3)$. مُستخدمًا الطريقتين التعويض التركيبي والتعويض المُباشر.

التعويض التركيبي

التعويض المُباشر

تمرين1B: إذا كان $f(x) = 4x^5 + 2x^3 + x^2 - 1$، فأوجد $f(-1)$. مُستخدمًا الطريقتين التعويض التركيبي والتعويض المُباشر.

التعويض التركيبي

التعويض المُباشر

مثال²: إذا كان $S(x) = 0.02x^4 - 0.52x^3 + 4.03x^2 + 0.09x + 77.54$، لتقدير عدد الطلبة في جامعة ما، حيثُ x عدد السنوات منذُ العام **1993**م، وتُمثل $S(x)$ عدد الطلبة بالآلاف. ما العدد المُتوقع لطلبة الجامعة عام **2013**م ؟

تمرين²: يمكن استعمال الدالة $C(x) = 2.4x^3 - 22.3x^2 + 53.8x + 548.2$، لتقدير عدد الطلبة في إحدى الجامعات منذُ عام **2000**م، حيثُ تمثل x عدد السنوات، $C(x)$ عدد الطلبة بالآلاف، قدّر عدد طلبة الجامعة عام **2012**م.

أضف إلى مطويتك

نظرية

نظرية العوامل

تكون ثنائية الحد $x - r$ عاملاً من عوامل كثيرة الحدود $P(x)$ إذا وفقط إذا كان $P(r) = 0$.

مثال3: حدّد إذا كان $x-5$ عامل من عوامل كثيرة الحدود $x^3-7x^2+7x+15$، ثُم أوجد عواملها الأخرى.

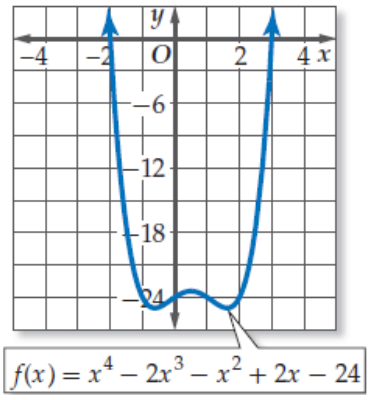
تمرين3: بيّن أن $x-2$ أحد عوامل كثيرة الحدود $x^3-7x^2+4x+12$، ثُم أوجد عواملها الأخرى.

تدريب1: أوجد العوامل الأخرى لكثيرات الحدود مُستخدمًا أحد عوامُلها المُعطاة:

a) $x^3 - 6x^2 + 11x - 6, x - 1$

b) $3x^3 + 10x^2 - x - 12, x - 1$

تدريب2: استعمل التمثيل البياني لإيجاد جميع عوامل كل دالة كثيرة حدود فيما يأتي:



تدريب3: ما قيمة $\boldsymbol{k}$ التي تجعل باقي قسمة $\boldsymbol{x^4 + kx^3 + 1}$ على $\boldsymbol{x - 2}$ يساوي $\boldsymbol{9}$ ؟

A $\boldsymbol{2}$ **C** $\boldsymbol{-1}$

B $\boldsymbol{1}$ **D** $\boldsymbol{-2}$

الدرس السابع : الجذور والأصفار

اليوم:.....

التاريخ:.....

الحصة:.....

ملخص المفهوم

أضف إلى مطويتك

الأصفار، والعوامل، والجذور، والمقاطع

التعبير اللفظي إذا كانت $P(x) = a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0$ دالة كثيرة حدود، فإن العبارات الآتية متكافئة:

- c صفر للدالة $P(x)$.
- c جذر أو حل للمعادلة $P(x) = 0$.
- $x - c$ عامل من عوامل كثيرة الحدود $a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0$.
- إذا كان c عددًا حقيقيًّا، فإن $(c, 0)$ هي نقطة تقاطع التمثيل البياني للدالة $P(x)$ مع المحور x.

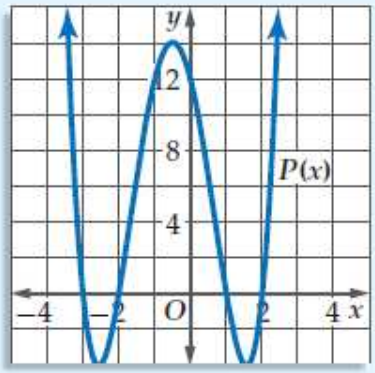
مثال افرض أن دالة كثيرة الحدود هي $P(x) = x^4 + 2x^3 - 7x^2 - 8x + 12$.

فإن أصفار هذه الدالة هي $-3, -2, 1, 2$

وجذور المعادلة $x^4 + 2x^3 - 7x^2 - 8x + 12 = 0$ هي $-3, -2, 1, 2$

عوامل كثيرة الحدود $x^4 + 2x^3 - 7x^2 - 8x + 12$ هي $(x + 3), (x + 2), (x - 1), (x - 2)$

ونقاط تقاطع التمثيل البياني للدالة $P(x) = x^4 + 2x^3 - 7x^2 - 8x + 12$ مع المحور x هي $(-3, 0), (-2, 0), (1, 0), (2, 0)$.



نظرية

أضف إلى مطويتك

النظرية الأساسية في الجبر

كل معادلة كثيرة حدود درجتها أكبر من صفر لها جذر واحد على الأقل ينتمي لمجموعة الأعداد المركبة.

مثال1: حل كل مُعادلة مما يأتي، وحدّد عدد جذورها، وأنواعها:

a) $x^2 + 6x + 9 = 0$

b) $x^3 + 25x = 0$

تمرين1: حل كل مُعادلة مما يأتي، وحدّد عدد جذورها، وأنواعها:

c) $x^3 + 4x^2 - 7x - 10 = 0$

d) $x^3 + 2x = 0$

e) $x^4 - 16 = 0$

f) $3x^3 - x^2 + 9x - 3 = 0$

نتيجة

أضف إلى مطويتك

نتيجة للنظرية الأساسية في الجبر

التعبير اللفظي يكون لمعادلة كثيرة الحدود من الدرجة n العدد n فقط من الجذور المنتمية إلى مجموعة الأعداد المركبة بما في ذلك الجذور المكررة.

مثال

x^3+2x^2+6	$4x^4-3x^3+5x-6$	$-2x^5-3x^2+8$
3 جذور	4 جذور	5 جذور

قانون

أضف إلى مطويتك

قانون ديكارت للإشارات

إذا كانت $P(x)=a_nx^n+\ldots+a_1x+a_0$ دالة كثيرة حدود معاملات حدودها أعداد حقيقية، فإن :

- عدد الأصفار الحقيقية الموجبة للدالة $P(x)$ يساوي عدد مرات تغير إشارة معاملات حدود الدالة $P(x)$ ، أو أقل منه بعدد زوجي.
- عدد الأصفار الحقيقية السالبة للدالة $P(x)$ يساوي عدد مرات تغير إشارة معاملات حدود الدالة $P(-x)$ ، أو أقل منه بعدد زوجي.

مثال2: حدّد العدد المُمكن للأصفار الحقيقية الموجبة، والأصفار الحقيقية السالبة، والأصفار التخيلية للدالة $f(x)=x^6+3x^5-4x^4-6x^3+x^2-8x+5$:

تمرين[2]: حدّد العدد المُمكن للأصفار الحقيقية الموجبة، والأصفار الحقيقية السالبة، والأصفار التخيلية للدالة $f(x) = 2x^5 + x^4 + 3x^3 - 4x^2 - x + 9$:

مثال[3]: أوجد جميع أصفار الدالة $f(x) = x^4 - 18x^2 + 12x + 80$

تمرين3: أوجد جميع أصفار الدالة $f(x) = x^3 + 2x^2 + 9x + 18$

نظرية

أضف إلى مطويتك

نظرية الأعداد المركبة المترافقة

التعبير اللفظي إذا كان a, b عددين حقيقيين حيث $b \neq 0$ ، و كان $a + bi$ صفرًا لدالة كثيرة حدود معاملات حدودها أعداد حقيقية. فإن $a - bi$ صفر للدالة أيضًا.

مثال إذا كان $3 + 4i$ صفرًا للدالة $f(x) = x^3 - 4x^2 + 13x + 50$، فإن $3 - 4i$ صفر للدالة أيضًا.

مثال4: أوجد دالة كثيرة حدود درجتها اقل ما يمكن ومُعاملات حُدودها أعداد صحيحة، إذا كان العددان $-1, 5 - i$ من أصفارها.

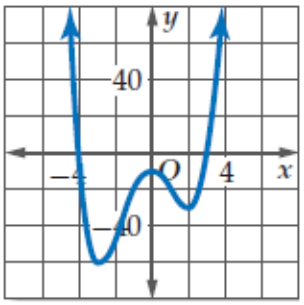
تمرين4: أوجد دالة كثيرة حدود درجتها اقل ما يمكن ومُعاملات حُدودها أعداد صحيحة، إذا كان العددان $-1, 1+2i$ من أصفارها.

إن كثيرة الحدود التي أوجدتها في المثال والتمرين السابقين ليست وحيدة، إذ يُمكن أن تكون من الصورة $p(x) = a(x^3 - 9x^2 + 16x + 26)$، حيثُ a عدد حقيقي لا يُساوي الصفر.

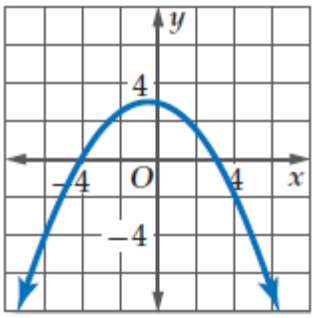
تدريب1: أوجد دالة كثيرة حدود درجتها اقل ما يمكن ومُعاملات حُدودها أعداد صحيحة، إذا كان العددان $0, -5, 3+i$ من أصفارها.

تدريب2: قابل بين التمثيل البياني لكل دالة كثيرة الحدود أدناه وأصفارها:

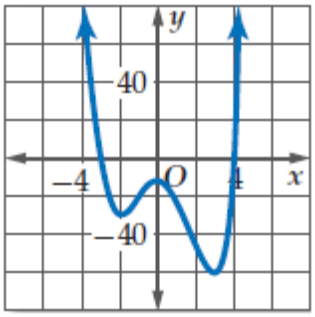
$-4, 3, i, -i$



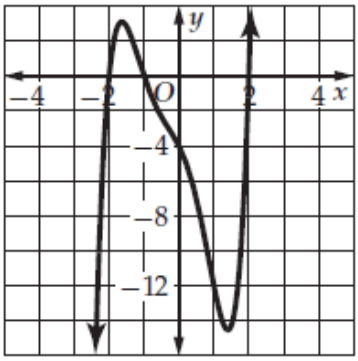
$-4, 3$



$-3, 4, i, -i$



تدريب3: استعمل التمثيل البياني للدالة $f(x) = x^5 + x^4 - 3x^3 - 3x^2 - 4x - 4$، وحدّد أيًّا مما يأتي لا يُعد عاملًا لكثيرة الحدود؟



$x - 2$ A　　$x - 1$ C

$x + 2$ B　　$x + 1$ D

الدرس الثامن : نظرية الصفر النسبي

اليوم:.....

التاريخ:.....

الحصة:.....

نظرية

أضف إلى مطويتك

نظرية الصفر النسبي

التعبير اللفظي إذا كانت $P(x)$ دالة كثيرة حدود معاملات حدودها أعداد صحيحة، فإن أي صفر نسبي للدالة، $P(x)$ سيكون على صورة العدد النسبي $\frac{p}{q}$ في أبسط صورة، حيث p أحد عوامل الحد الثابت، q أحد عوامل المعامل الرئيس.

مثال لتكن $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 17x + 12$ ، فإذا كان العدد النسبي $\frac{3}{2}$ صفر للدالة $f(x)$، فإن 3 أحد عوامل العدد 12، و 2 أحد عوامل العدد 2.

نتيجة نظرية الصفر النسبي

إذا كانت $P(x)$ دالة كثيرة حدود معاملات حدودها أعداد صحيحة، والمعامل الرئيس لها 1، وحدها الثابت لا يساوي صفرًا، فإن أي صفر نسبي للدالة $P(x)$ يجب أن يكون أحد عوامل الحد الثابت.

مثال1: أوجد جميع الأصفار النسبية المُمكنة التي تُحددها نظرية الصفر النسبي لكل من الدالتين الآتيتين:

a) $f(x) = 4x^5 + x^4 - 2x^3 - 5x^2 + 8x + 16$

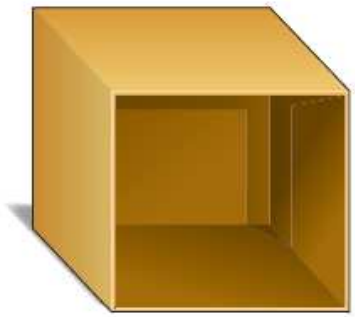
b) $f(x) = x^3 - 2x^2 + 5x + 12$

تمرين1: أوجد جميع الأصفار النسبية المُمكنة التي تُحددها نظرية الصفر النسبي لكل من الدالتين الآتيتين:

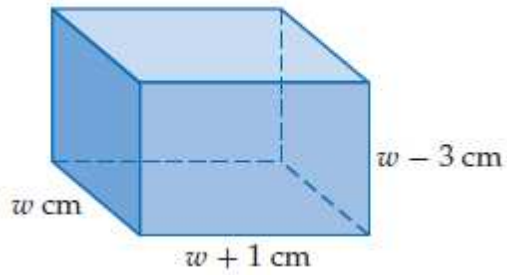
c) $\boldsymbol{g(x) = 3x^3 - 4x + 10}$

d) $\boldsymbol{h(x) = x^3 + 11x^2 + 24}$

مثال2: صنع إبراهيم صندوقًا على شكل مُتوازي مُستطيلات حجمه $\boldsymbol{8019in^3}$، أوجد أبعاد الصندوق إذا كان طوله يزيد على عرضه بمقدار $\boldsymbol{24in}$، وارتفاعه يزيد على عرضه بمقدار $\boldsymbol{18in}$.



تمرين[2]: مُتوازي مُستطيلات حجمه $1056cm^3$، ويزيد طوله على عرضه بمقدار $1cm$، ويقل ارتفاعه عن عرضه بمقدار $3cm$، أوجد أبعاده.



مثال[3]: أوجد جميع أصفار الدالتين الآتيتين:

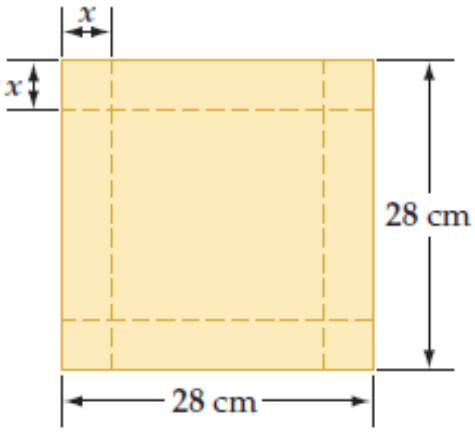
1) $k(x) = 2x^4 - 5x^3 + 20x^2 - 45x + 18$	2) $h(x) = 9x^4 + 5x^2 - 4$

تدريب: يُراد عمل صندوق بقص مُربعات صغيرة مُتساوية في المساحة من زوايا ورقة مُقواة مربعة الشكل، ثُمّ ثني الجوانب إلى الأعلى.

a) اكتب الدالة $V(x)$ التي تمثل حجم الصندوق.

b) ما قيمة x التي تجعل حجم الصندوق $1152cm^3$.

c) إذا كان $x = 6cm$، فما حجم الصندوق؟



اليوم:.....

التاريخ:.....

الحصة:.....

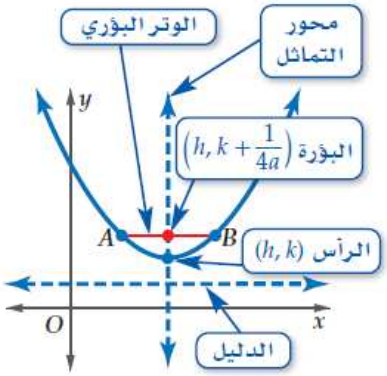
الوحدة الثانية : (القطوع)

الدرس الأول : القطوع المُكافئة

مفهوم أساسي — معادلات القطوع المكافئة

أضف إلى مطويتك

الصورة القياسية	$y = a(x-h)^2 + k$	$x = a(y-k)^2 + h$
اتجاه فتحة القطع	إلى أعلى إذا كان $a > 0$ إلى أسفل إذا كان $a < 0$	إلى اليمين إذا كان $a > 0$ إلى اليسار إذا كان $a < 0$
الرأس	(h, k)	(h, k)
معادلة محور التماثل	$x = h$	$y = k$
البؤرة	$\left(h, k + \frac{1}{4a}\right)$	$\left(h + \frac{1}{4a}, k\right)$
معادلة الدليل	$y = k - \frac{1}{4a}$	$x = h - \frac{1}{4a}$
طول الوتر البؤري	$\left\|\frac{1}{a}\right\|$ وحدة	$\left\|\frac{1}{a}\right\|$ وحدة

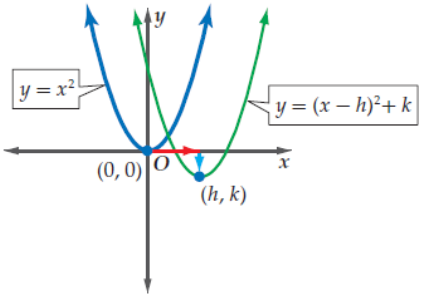


الصورة العامة للقطع المُكافئ ← $y = ax^2 + bx + c$

مثال1: اكتب $y = 2x^2 - 12x + 6$ على الصورة القياسية، ثم حدد كلًا من الرأس ومعادلة محور التماثل واتجاه فتحة القطع المُكافئ.

تمرين1: اكتب $y = 4x^2 + 16x + 34$ على الصورة القياسية، ثم حدد كلًا من الرأس ومعادلة محور التماثل واتجاه فتحة القطع المُكافئ.

التمثيل البياني للقطوع المُكافئة (للمعادلة التربيعية $y = a(x - h)^2 + k$، هو ناتج عن إزاحة التمثيل البياني للدالة الأم $y = x^2$، حيث يتم إزاحته أفقيًا بمقدار h وحدة، ورأسيًا بمقدار k وحدة، كما يحدث له انعكاسٌ و / أو توسيعٌ اعتمادًا على قيمة a.

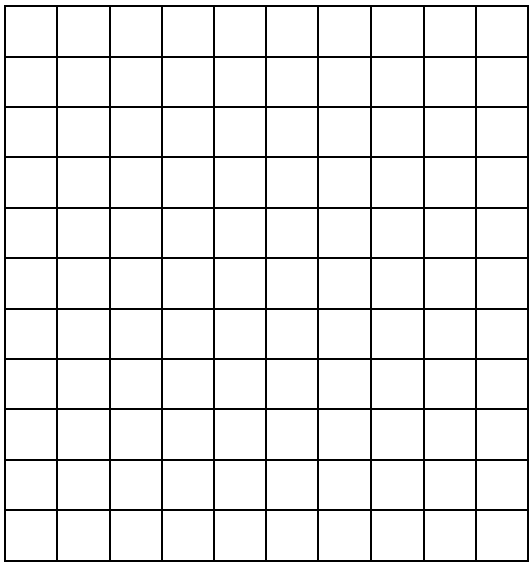


مثال2: مثّل المُعادلتين الآتيتين بيانيًا:

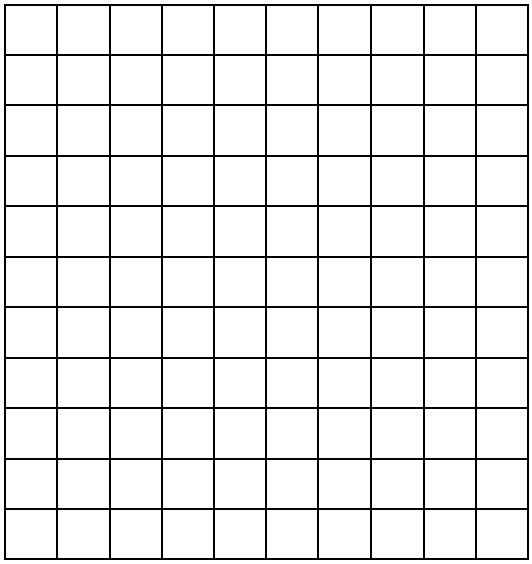
(a $y = -3x^2$

(b $y = -3(x - 4)^2 + 5$

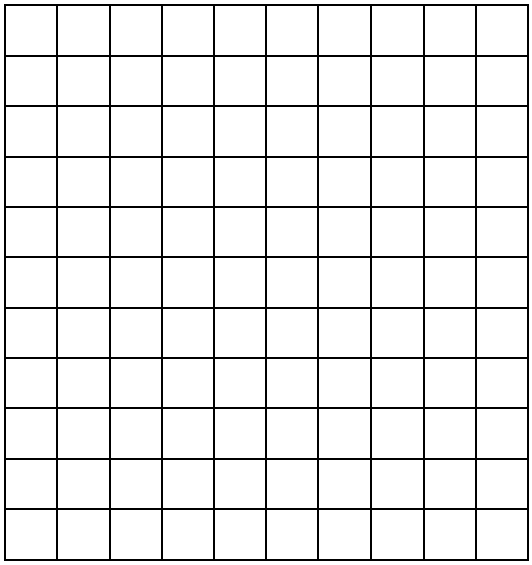
تمرين[2]: مثّل المُعادلة الآتية بيانيًا: $y = 2(x-1)^2 - 4$



مثال[3]: مثّل المُعادلة الآتية بيانيًا: $2x - y^2 = 4y + 10$



تمرين3: مثّل المُعادلة الآتية بيانيًا: $2x - y^2 = 4y + 10$



مثال4: أوجد معادلة القطع المُكافىء الذي رأسه $(-2, -4)$ ومعادلة دليله $y = 1$.

تمرين4A: أوجد معادلة القطع المُكافىء الذي رأسه $(1, 3)$ والبؤرة $(1, 5)$.

تمرين[4B]: أوجد معادلة القطع المُكافىء الذي رأسه $(1, 3)$ والبؤرة $(1, 5)$.

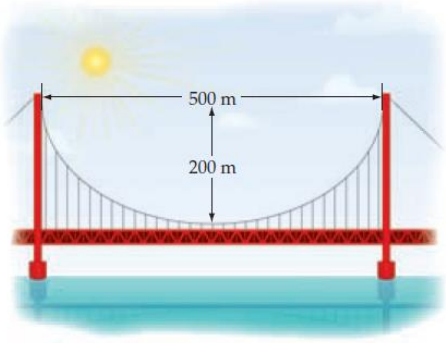
مثال[5]: يمكن أن تُسخّر الطاقة الشمسية لإنتاج الطاقة الكهربائية عن طريق استعمال مرايا على صورة قطوع مُكافئة، حيث تعكس المرايا أشعة الشمس إلى بؤر هذه القطوع. لنفرض أن البؤرة لكل من القطوع المُكافئة تبعد

تمرين[5]: أوجد مُعادلة لمرآة قطع مُكافىء، تقع بؤرتها أعلى القطع بمقدار $4.5ft$، علمًا بأن طول الوتر البؤري $18ft$، وأن البؤرة تُمثل نقطة الأصل.

تدريب1: أوجد مُعادلة القطع المكافىء الذي رأسه $(0, 2)$، وبؤرته $(0, 4)$.

تدريب2: أوجد مُعادلة القطع المكافىء الذي رأسه $(3, 2)$، ومعادلة دليله $y = 8$.

تدريب3: اكتب مُعادلة قطع مُكافىء لتمثل السلك المُعلق للجسر كما هو موضح في الشكل أدناه. افترض ان نقطة الأصل تقع عند أدنى نقطة من السلك.

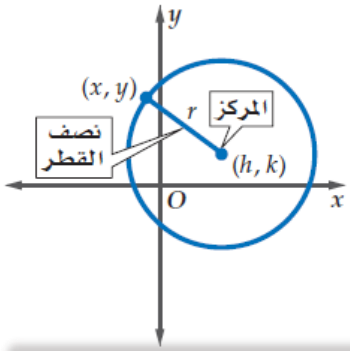


الدرس الثاني : الدوائر

اليوم:.....

التاريخ:.....

الحصة:.....



مفهوم أساسي معادلات الدوائر

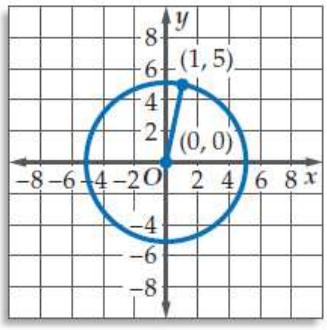
أضف إلى مطويتك

الصورة القياسية للمعادلة	$x^2 + y^2 = r^2$	$(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$
المركز	$(0, 0)$	(h, k)
طول نصف القطر	r	r

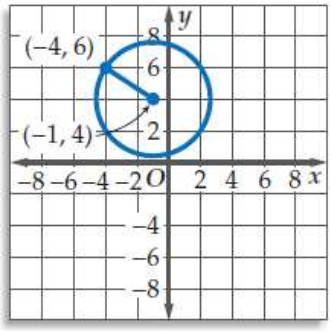
مثال1: تقدم مجموعة محلات تجارية عرضًا لتوصيل الطلبات مجانًا ضمن حدود $35km$ عن المحل. إذا كان محل أحمد من ضمن هذه المحلات بحيث يقع $100km$ شمال المكتب الرئيس، وإلى الشرق منه على بعد $45km$، فاكتب معادلة لتمثيل نهاية حدود التوصيل المجاني لمحل أحمد، مُفترضًا أن المكتب الرئيس يقع عند نقطة الأصل.

تمرين1: إذا كان مدى نوع مُعين من الهواتف اللاسلكية $30mi$ في أي اتجاه، وإذا كان الهاتف يقع على بُعد $4mi$ جنوب المركز الرئيس، وإلى الغرب منه بمقدار $3mi$. فاكتب مُعادلة تُمثّل نهاية حدود الإرسال، مفترضًا أن المركز الرئيس يقع عند نقطة الأصل.

مثال2: أوجد مُعادلة الدائرة في الشكل المُجاور.



تمرين2: أوجد مُعادلة الدائرة في الشكل المُجاور.



مثال3: أوجد مُعادلة الدائرة إذا كان طرفا قطر فيها $(-8, -1), (6, 7)$.

تمرين3: أوجد مُعادلة الدائرة إذا كان طرفا قطر فيها $(\mathbf{1},\mathbf{5})$,$(\mathbf{3},\mathbf{3})$.

مثال4: أوجد المركز، وطول نصف القطر للدائرة التي مُعادلتها $\boldsymbol{x^2+y^2=100}$ ، ثم مثلها بيانيًا.

تمرين4: أوجد المركز، وطول نصف القطر للدائرة التي مُعادلتها $(x-1)^2+y^2=81$، ثم مثلها بيانيًا.

مثال5: أوجد المركز، وطول نصف القطر للدائرة التي مُعادلتها $x^2+y^2-8x+12y-12=0$.

تمرين5: أوجد المركز، وطول نصف القطر للدائرة التي مُعادلتها $x^2+y^2+4x-10y-7=0$.

تدريب1: أوجد مُعادلة الدائرة التي مركزها $(\mathbf{8}, \mathbf{-9})$، وتمس المحور $\boldsymbol{y}$.

تدريب2: أوجد مُعادلة الدائرة التي مركزها $(\mathbf{2}, \mathbf{4})$، وتمس المحور $\boldsymbol{x}$.

تدريب3: يقع المركز في الربع الأول، وتمس المُستقيم $\boldsymbol{x = 5}$، والمحور $\boldsymbol{x}$، والمحور $\boldsymbol{y}$.

تدريب4: يقع المركز في الربع الثاني، وتمس المُستقيمين $\boldsymbol{y = 5}$، والمحور $\boldsymbol{y = 1}$، والمحور $\boldsymbol{y}$.

الدرس الثالث : القطوع الناقصة

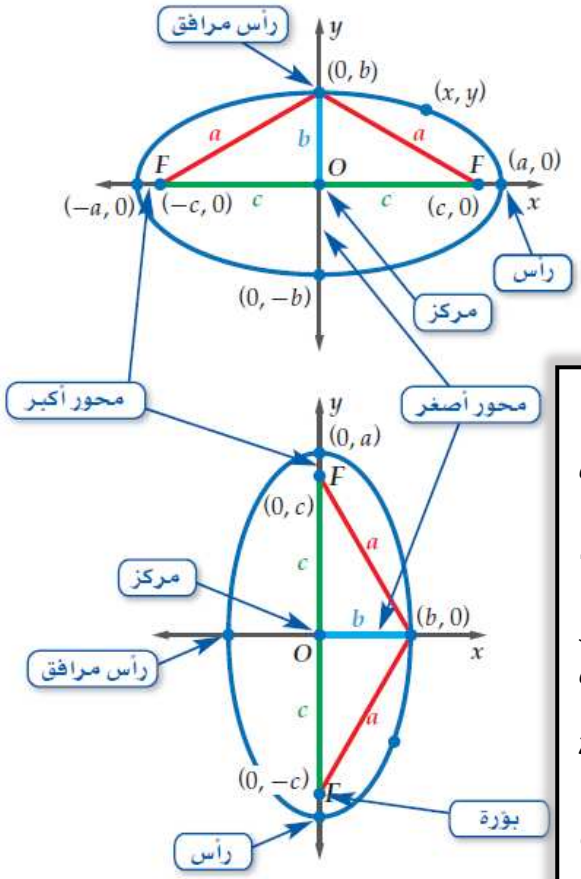
اليوم:.....

التاريخ:.....

الحصة:.....

مفهوم أساسي — معادلة القطع الناقص الذي مركزه نقطة الأصل — أضف إلى مطويتك

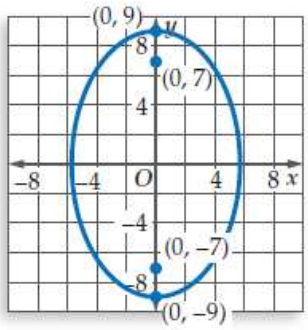
الصورة القياسية	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$	$\frac{y^2}{a^2}+\frac{x^2}{b^2}=1$
وضع القطع	أفقي عندما $a^2 > b^2$	رأسي عندما $a^2 > b^2$
البؤرتان	$(c, 0), (-c, 0)$	$(0, c), (0, -c)$
طول المحور الأكبر	$2a$ وحدة	$2a$ وحدة
طول المحور الأصغر	$2b$ وحدة	$2b$ وحدة



ملاحظات:

1) طول المحور الأكبر يساوي $2a$ وحدة، ويساوي مجموع بعدي البؤرتين عن أية نقطة عليه.
2) ترتبط الثوابت a, b, c في معادلة القطع الناقص بالعلاقة $c^2 = a^2 - b^2$.
3) المسافة من بؤرة القطع إلى أي من الرأسين المُرافقين يساوي a .
4) المحور الأكبر: إذا كان مقام x^2 في الصورة القياسية هو الأكبر، فإن المحور الأكبر يكون أفقيًا، وإذا كان y^2 له المقام الأكبر فإن المحور الأكبر يكون رأسيًا.
5) رأسا القطع الناقص الرأسي: رأسا القطع الناقص الرأسي الذي مركزه نقطة الأصل $(0, a), (0, -a)$. والرأسان المرافقان $(b, 0), (-b, 0)$.
6) البعد بين بؤرتي القطع الناقص يساوي $2c$. أما البُعد بين المركز وإحدى البؤرتين يساوي c.

مثال[1]: أوجد مُعادلة القطع الناقص المُمثل في الشكل المُجاور.



تمرين[1]: أوجد مُعادلة القطع الناقص الذي رأساه $(-4,0), (4,0)$ وبؤرتاه $(-2,0), (2,0)$.

مفهوم أساسي

أضف إلى مطويتك

معادلة القطع الناقص الذي مركزة النقطة (h, k)

الصورة القياسية	$\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$	$\frac{(y-k)^2}{a^2}+\frac{(x-h)^2}{b^2}=1$
وضع القطع	افقي عندما $a^2 > b^2$	رأسي عندما $a^2 > b^2$
البؤرتان	$(h+c, k), (h-c, k)$	$(h, k+c), (h, k-c)$
الرأسان	$(h+a, k), (h-a, k)$	$(h, k+a), (h, k-a)$
الرأسان المرافقان	$(h, k+b), (h, k-b)$	$(h+b, k), (h-b, k)$

مثال[2]: أوجد مُعادلة القطع الناقص رأساه $(6,4), (6,-8)$، ورأساه المرافقين $(9,-2), (3,-2)$.

مركز القطع الناقص

هو نقطة منتصف للقطعة الواصلة بين الرأسين الرئيسيين أو المرافقين

تمرين[2]: أوجد مُعادلة القطع الناقص رأساه $(9,8)$,$(-3,8)$، ورأساه المرافقين $(3,4)$,$(3,12)$.

مثال[3]: يدور كوكب عطارد كبقية الكواكب في مدار ليس دائريًا تامًا حول الشمس، ويبعد عنها مسافة 43 مليون ميل في أبعد نقطة عنها، و 28.5 مليون ميل في أقرب نقطة منها، ويأخذ مداره شكل القطع الناقص حيثُ تكون الشمس في إحدى بؤرتيه. إذا كان قطر الشمس $870000mi$ تقريبًا، فاكتب معادلة القطع الناقص الذي تمثل كوكب عطارد.

تمرين[3]: يبعد بلوتو عن الشمس من أقرب نقطة 2.757 مليون ميل، وأبعد نقطة له 4.583 مليون ميل، أوجد معادلة القطع الناقص التي تُمثل مدار بلوتو حول الشمس.

مثال[4]: أوجد كُلًا من المركز، والبؤرتين، وطولي المحورين الأكبر والأصغر، للقطع الناقص الذي مُعادلته:

$$25x^2 + 9y^2 + 250x - 36y + 436 = 0$$

تمرين[4]: أوجد كُلًا من المركز، والبؤرتين، وطولي المحورين الأكبر والأصغر، للقطع الناقص الذي مُعادلته:

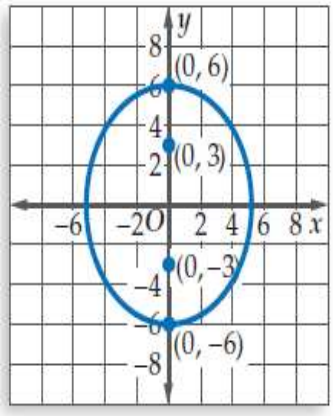
$$x^2 + 4y^2 - 2x + 24y + 21 = 0$$

تدريب1: أوجد مُعادلة القطع الناقص الذي مركزه $(-2,6)$، أحد الرؤوس $(-2,16)$، الرأس المرافق $(1,6)$.

تدريب2: أوجد البؤرتين للقطع الناقص الذي مُعادلته:

$$\frac{(x-1)^2}{4}+\frac{(y+2)^2}{9}=1$$

تدريب3: ما هي مُعادلة القطع الناقص المُمثل بيانيًا ؟

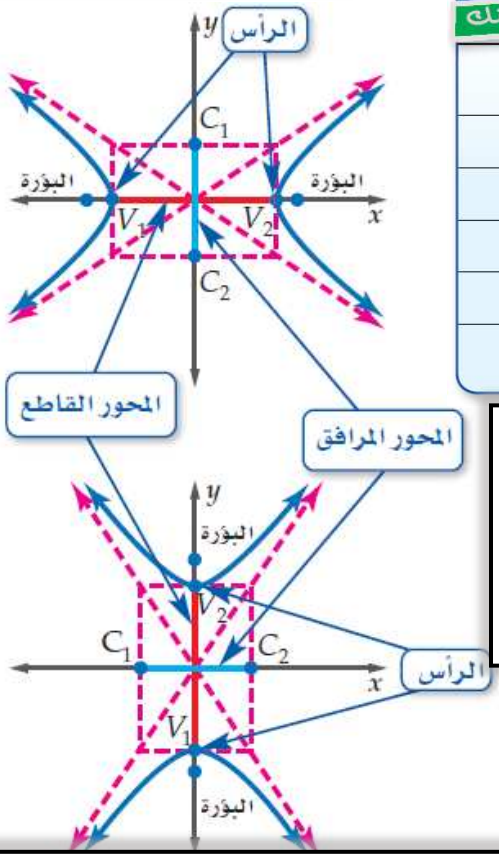


الدرس الرابع : القطوع الزائدة

اليوم:.....

التاريخ:.....

الحصة:.....



مفهوم أساسي — معادلة القطع الزائد الذي مركزه نقطة الأصل

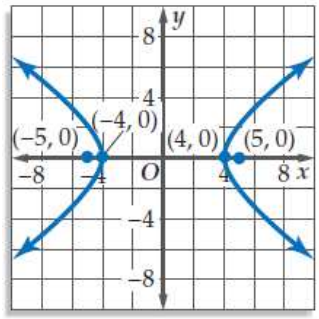
أضف إلى مطويتك

الصورة القياسية	$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$	$\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1$
وضع القطع	أفقي	رأسي
البؤرتان	$(\pm c, 0)$	$(0, \pm c)$
طول المحور القاطع	$2a$ وحدة	$2a$ وحدة
طول المحور المرافق	$2b$ وحدة	$2b$ وحدة
معادلتا خطي التقارب	$y=\pm\frac{b}{a}x$	$y=\pm\frac{a}{b}x$

ملاحظات:

1) **المحور البؤري هو المحور القاطع نفسه. وهو يصل بين نقطتي تقاطع القطع الزائد مع المحور x أو المحور y.**
2) **يوجد محوران للتماثل.**
3) **ترتبط القيم a, b, c بالمُعادلة $c^2 = a^2 + b^2$**

مثال1: أوجد مُعادلة القطع الزائد المُمثل في الشكل المُجاور.



تمرين[1]: أوجد مُعادلة القطع الزائد الذي رأساه $(\mathbf{6,0}),(\mathbf{-6,0})$ وبؤرتاه $(\mathbf{8,0}),(\mathbf{-8,0})$.

مثال[2]: إذا علمت أن مُعادلتي الخطين التقاربيين للقطع الزائد هما $\boldsymbol{y=-\frac{5}{3}x}$ ، $\boldsymbol{y=\frac{5}{3}x}$، وإذا علمت أن رأسي القطع يقعان عند النقطتين $(\mathbf{0,5})$, $(\mathbf{0,-5})$. فاكتب مُعادلة هذا القطع.

تمرين[2]: إذا علمت أن مُعادلتي الخطين التقاربيين للقطع الزائد هما $\boldsymbol{y=-\frac{7}{9}x}$ ، $\boldsymbol{y=\frac{7}{9}x}$، وإذا علمت أن رأسي القطع يقعان عند النقطتين $(\mathbf{9,0})$, $(\mathbf{-9,0})$. فاكتب مُعادلة هذا القطع.

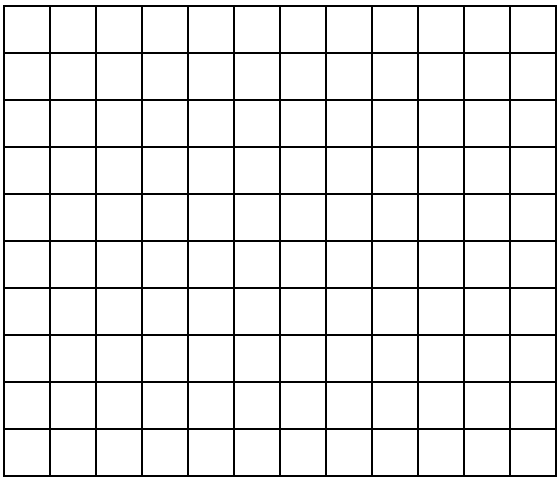
مفهوم أساسي

أضف إلى مطويتك

معادلة القطع الزائد الذي مركزه النقطة (h, k)

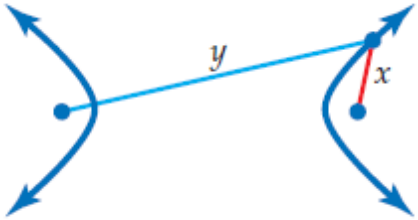
الصورة القياسية	$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$	$\frac{(y-k)^2}{a^2} - \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1$
وضع القطع	أفقي	رأسي
البؤرتان	$(h+c, k)$, $(h-c, k)$	$(h, k+c)$, $(h, k-c)$
الرأسان	$(h+a, k)$, $(h-a, k)$	$(h, k+a)$, $(h, k-a)$
معادلتا خطي التقارب	$y-k = \pm\frac{b}{a}(x-h)$	$y-k = \pm\frac{a}{b}(x-h)$

مثال 3: مثّل المُعادلة $\frac{(x-3)^2}{4} - \frac{(y+2)^2}{16} = 1$ بيانيًا. وأوجد كلًا من الرأسين، والبؤرتين، ومُعادلة كل من خطي التقارب.



تمرين[3]: مثّل المُعادلة $\frac{(y-4)^2}{9} - \frac{(x+3)^2}{25} = 1$ بيانيًا. وأوجد كلًا من الرأسين، والبؤرتين، ومُعادلة كل من خطي التقارب.

تُمثّل القيمة $2a$ في مُعادلة القطع الزائد **الفرق الثابت**. وهو القيمة المُطلقة للفرق بين بُعد أي نقطة على القطع الزائد وكل من بؤرتيه. لأية نقطة على القطع الزائد المُجاور، ويكون لها الفرق الثابت نفسه $|y - x| = 2a$



مثال[4]: تبعد الأرض عن الشمس

تمرين[4]: تسلّمت محطتان **A** و **B** اللتان تبعدان عن بعضهما البعض $\mathbf{150}\boldsymbol{mi}$ إشارة استغاثة حول سقوط طائرة. إذا علمت أن بُعد موقع الطائرة عن المحطة **A** يزيد عن بُعدها عن المحطة **B** بمقدار $\mathbf{80}\boldsymbol{mi}$ ، فأوجد مُعادلة القطع الزائد الذي مركزه نقطة الأصل، والذي تم تحديد موقع الطائرة عليه.

تدريب¹: إذا كانت المُعادلة $\frac{x^2}{36} - \frac{y^2}{4} = 1$ تُمثل قطعًا مخروطيًا، فما بؤرتاه ؟

A $(2\sqrt{10}, 0), (-2\sqrt{10}, 0)$
B $(0, -2\sqrt{10}), (0, 2\sqrt{10})$
C $(-4\sqrt{2}, 0), (4\sqrt{2}, 0)$
D $(0, -4\sqrt{2}), (0, 4\sqrt{2})$

تدريب²: إذا كانت المُعادلة $\frac{y^2}{9} - \frac{x^2}{49} = 1$ تُمثل قطعًا مخروطيًا، فما مُعادلتا خطي التقارب للقطع ؟

A $y = \pm\frac{7}{3}x$
B $x = \pm\frac{7}{3}y$
C $y = \pm\frac{3}{7}x$
D $x = \pm\frac{3}{7}y$

اليوم:.....

التاريخ:.....

الحصة:.....

الدرس الخامس : تحديد نوع القطوع المخروطية

الصورة القياسية لمُعادلات القطوع المخروطية : $\boldsymbol{Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F}$

مفهوم أساسي

أضف إلى مطويتك

الصور القياسية لمعادلات القطوع المخروطية

القطع المخروطي	الصورة القياسية للمعادلة	
الدائرة	$(x-h)^2 + (y-k) = r^2$	
	الوضع الأفقي	الوضع الرأسي
القطع المكافئ	$x = a(y-k)^2 + h$	$y = a(x-h)^2 + k$
القطع الناقص	$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$	$\frac{(y-k)^2}{a^2} + \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1$
القطع الزائد	$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$	$\frac{(y-k)^2}{a^2} - \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1$

مثال¹: اكتب المعادلة $\boldsymbol{16x^2 - 25y^2 - 128x - 144 = 0}$ على الصورة القياسية، وحدّد ما إذا كانت تُمثّل قطعًا مكافئًا، أو دائرة، أو قطعًا ناقصًا، أو قطعًا زائدًا.

تمرين[1]: اكتب المعادلة $4x^2 + y^2 - 16x + 8y - 4 = 0$ على الصورة القياسية، وحدّد ما إذا كانت تُمثّل قطعًا مكافئًا، أو دائرة، أو قطعًا ناقصًا، أو قطعًا زائدًا.

مفهوم أساسي

أضف إلى مطويتك

تصنيف القطوع المخروطية باستعمال المميز

نوع القطع المخروطي	المميز
دائرة	$B^2 - 4AC < 0, B = 0, A = C$
قطع ناقص	$B^2 - 4AC < 0, B \neq 0$ أو $A \neq C$
قطع مكافئ	$B^2 - 4AC = 0$
قطع زائد	$B^2 - 4AC > 0$

تمرين[2]: حدّد إذا كانت كل مُعادلة من المُعادلات الآتية تُمثّل قطعًا مُكافئًا، أو دائرة، أو قطعًا ناقصًا، أو قطعًا زائدًا، دون كتابتها على الصورة القياسية.

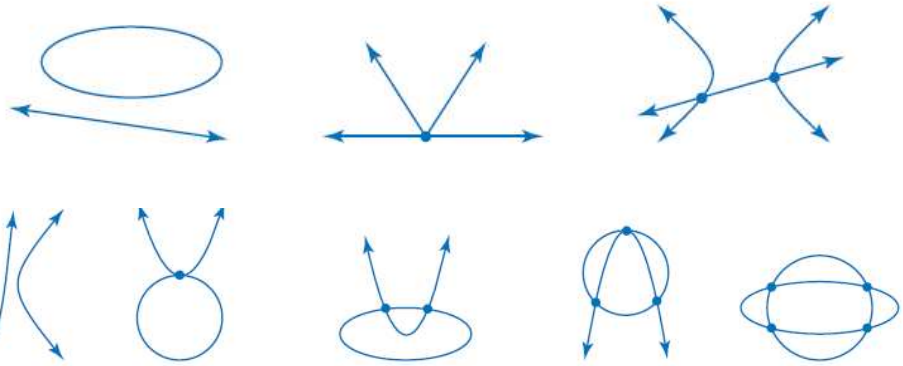
1) $8y^2 - 6x^2 + 4xy - 6x + 2y - 4 = 0$	
2) $3xy + 4x^2 - 2y + 9x - 3 = 0$	
3) $3x^2 + 16x - 12y + 2y^2 - 6 = 0$	

الدرس السادس : حل الأنظمة الخطية وغير الخطية

اليوم:.....

التاريخ:.....

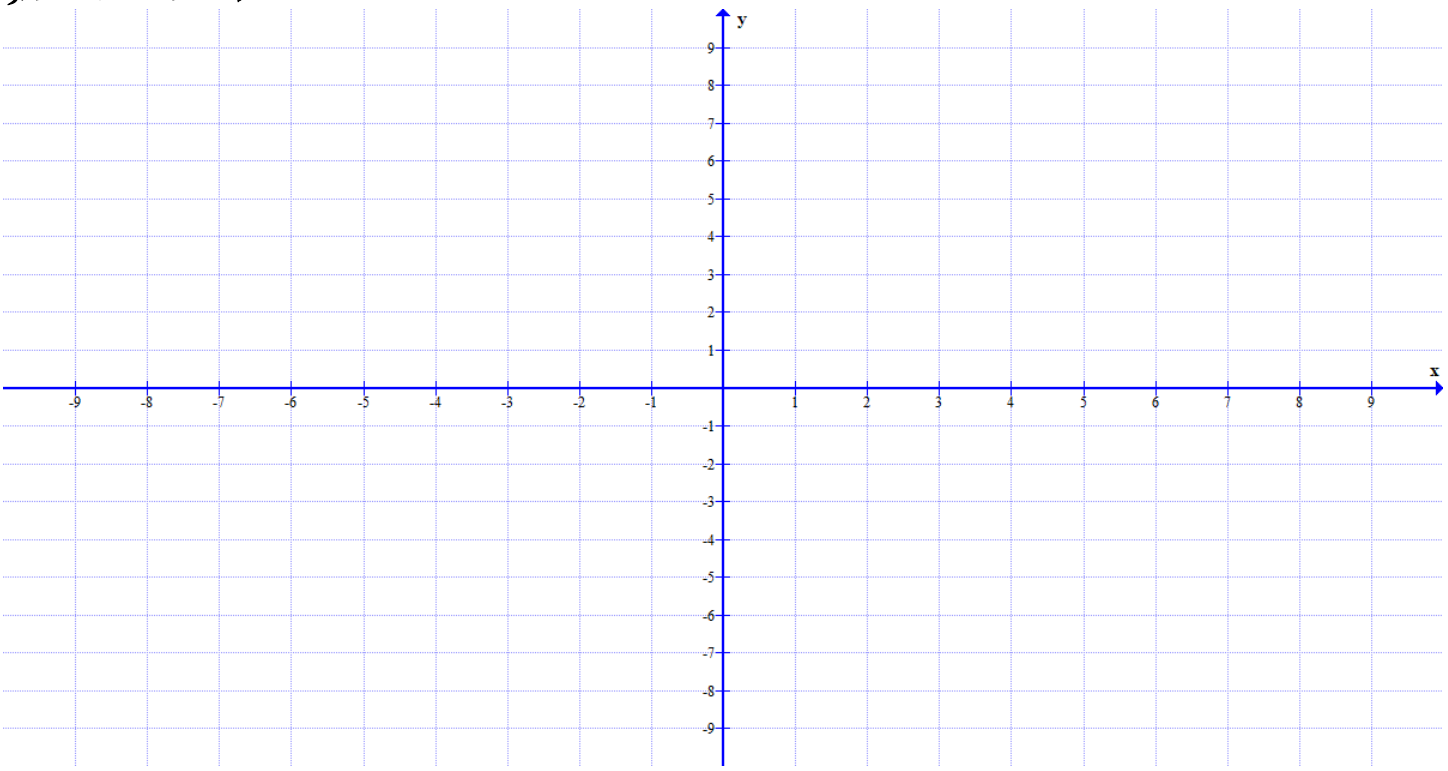
الحصة:.....



تمرين1: حل نظام المعادلات: $3(y-4)-2(x-3)=-6\,,\,5x^2+2y^2-53=0$

تمرين²: حل نظام المعادلات: $3x^2 + 4y^2 = 48 \, , 2x^2 - y^2 = -1$

تمرين³: حل نظام المتباينات بيانيًا : $x^2 + y^2 \leq 49 \;\; , \;\; x^2 - 4y^2 > 16$



تمرين4: يصنع عادل إطارًا لنافذة لها شكل النصف العلوي من قطع ناقص، ارتفاعه عند أعلى نقطة (عند منتصف القاعدة)

الوحدة الثالثة : (الاحتمال والإحصاء)

الدرس الأول : الدراسات التجريبية والمسحية وبالمُلاحظة

اليوم:.....

التاريخ:.....

الحصة:.....

أولًا: <u>العينة المُتحيزة وغير المُتحيزة</u> العينة المُتحيزة هي العينة التي يتم تفضيلها على سائر عناصر المُجتمع (غير عشوائية) . أما العينة غير المُتحيزة يتم اختيارها عشوائيًا أو لم تعتمد على خاصية عندما تم تحديدها.

تمرين[1]: حدّد إذا كانت كل من الدراسات المسحية الآتية تتبنى عينة مُتحيزة أو غير مُتحيزة:

a) سؤال كل لاعب بمهرجان كرة السلة عن الرياضة التي يحب مُشاهدتها على التلفاز .....
b) الاتصال بـ **100** شخص اختيرت أرقامهم عشوائيًا، وسؤالهم عن رأيهم في الجمارك .....
c) الذهاب إلى ملعب كرة القدم وسؤال **100** شخص اختيروا عشوائيًا عن رياضتهم المُفضلة .....
d) استطلاع رأي كل شخص ثالث يخرج ثالث يخرج من مطعم للمشويات، لمعرفة الوجبة المُفضلة للناس.....
e) يخرج المُعلم الطالب الذي ينتهي اسمه بحرف مُعين لكي يحل على السبورة .....
f) يرسل صاحب مخزن للأدوات الرياضية استبانة دراسة مسحية لكل شخص ينتهي رقم هاتفه برقم مُعين .....
g) الاستفسار من طلبة صف مُعين من المُتميزين في مادة العلوم عن أفضل المواد لديهم .....
h) الاستفسار من كل طالب يخرج بعد **20** طالبًا من مدرستك عن الطالب الذي سيصوتون له في انتخابات المجلس الطلابي .....

ثانيًا: الدراسات المسحية والتجريبية وبالمُلاحظة

الدراسة المسحية هي الدراسات التي تهتم بجمع البيانات، دون القيام بالتعديل فيها. أما الدراسة بالمُلاحظة هي التي يتم فيها ملاحظة الأفراد دون محاولة التأثير في النتائج. أما الدراسة التجريبية التي يتم فيها إجراء تعديل مُتعمد على الأشياء قيد الدراسة وتجري ملاحظة استجاباتهم.

يُسمى الاشخاص أو الحيوانات التي تخضع للمُعالجة في الدراسة التجريبية بالمجموعة التجريبية أما النصف الثاني ممن يخضعون لعلاج شكلي أو لا يخضعون للعلاج بالمجموعة الضابطة.

تمرين[2]: حدّد ما إذا كان الموقف تُمثل دراسة تجريبية أو مسحية أو بالمُلاحظة:

1) اختر **80** طالبًا جامعيًا نصفهم درس الإحصاء في المدرسة الثانوية ، وقارن نتائج المجموعتين في مساق للإحصاء تم تدريسه بالجامعة.....
2) اختر **200** طالب عشوائيًا من مدرسة ثانوية ، وأخذ رأيهم حول وسيلة المواصلات في المدارس ليضعوا تقييمهم على مقاس مُتدرج من **1** (لا أوافق مُطلقًا) إلى **5** (أوافق بشدة).

ثانيًا: الدراسات المسحية والتجريبية وبالمُلاحظة

3) قبل الاختبار قام المُعلم بإجراء مُراجعة المادة لطلبة الصف **A** ، بينما لم يراجع لطلبة الصف **B** ثُم قام المُعلم بالمقارنة بين النتيجتين .....

4) اختر **300** شخص واقسمهم عشوائيًا في مجموعتين إحداهما تقرأ القرآن لمدة ساعة قبل النوم، والأخرى لا تفعل شيئًا ثُم قارن بين كيفية نوم كل من المجموعتين .....

5) اختر **250** شخصًا نصفهم في فريق رياضة ومقارنة كمية الوقت الذي يمضونه في حل الواجبات.....

6) تريد مقارنة صحة الطلبة الذين يذهبون إلى المدرسة سيرًا على الأقدام والذين يأتون بالحافلات.....

ثالثًا: التمييز بين الارتباط والسببية

عندما توجد علاقة بين شيئين بحيثُ يكون وقوع ظاهرة مُعينة يكون سببًا مُباشرًا في وقوع الأخرى فإن هذا يُسمى (سببية) بينما لو أثرت ظاهرة مُعينة على الأخرى فإنها تسمى (ارتباط).

تمرين[3]: حدّد ما إذا كانت العبارات الآتية تظهر إرتباطًا أو سببية:

- عندما أدرس أحصل على تقدير ممتاز .....
- عندما أمارس الرياضة أكون في وضع نفسي أفضل .....
- عندما يكون الطقس حارًا في فصل الصيف ، يكثر بيع المشروبات الباردة .....
- كثرة القراءة تجعلك أكثر دكاءًا .....
- دلت الأبحاث على أن من يتقن أكثر من لغة ، يكون أقل إمكانية للإصابة بالمرض .....
- النوم بحذائك يؤدي إلى الشعور بالصداع .....
- إذا مارست رياضة الركض يوميًا ، فسأكمل السباق في ثلاث ساعات .....
- عندما لا تكون السماء غائمة ، فلن تمطر .....
- إذا درست لمدة ثلاث ساعات ، فسأحصل على درجة **100%** في اختبار التاريخ .....

الدرس الثاني : التحليل الإحصائي

اليوم:.....

التاريخ:.....

الحصة:.....

مفهوم أساسي

اضف إلى مطويتك

مقاييس النزعة المركزية

استعمل	الناتج من	متى...
الوسط	قسمة مجموع القيم على عددها	لا يوجد في البيانات قيم متطرفة.
الوسيط	العدد الذي يشغل موقع المنتصف عند ترتيب القيم، أو الوسط عند وجود عددين في المنتصف .	عندما يكون في البيانات قيم متطرفة ولكن لا توجد فراغات كبيرة في منتصف البيانات.
المنوال	العدد أو الأعداد التي تظهر أكثر من غيرها.	في البيانات التي تتكرر فيها قيم عديدة.

تمرين1: القيم التالية تُمثل درجات عينة لدرجات اختبارات المُنتصف في أحد الصفوف:

$$15, 14, 20, 12.5, 19, 19.5, 18, 16, 8, 5$$

1) أوجد الوسط لعينة الدرجات

2) أوجد قيمة الوسط لدرجات الطلاب الحاصلين على أكثر من **15**

تمرين2A: أوجد الوسيط لمجموعة القيم التالية:

$$19, 17, 26, -6, 10, 17, 0$$

تمرين^{2B}: أوجد الوسيط لمجموعة القيم التالية:

$$25, -10, 8, 9, 30, 1, 11, 7, 5, 15$$

تمرين^{3}: أوجد المنوال لمجموعة القيم التالية:

a) $5, 17, 4, 5, 6, 4, 5, 11, 4.5$

b) $9, 7, 8, 10, -9, 4, 5$

c) $4, -5, 6, 5, 6, 4, 6, 11, 3$

d) $8, 6, 6, 5, 8, 4, 5, 11, 8$

القيم المُتطرفة هي واحدة من البيانات أكبر أو أقل بكثير من باقي البيانات ، وليس بالضرورة أن تكون ضمن البيانات قيم مُتطرفة.

مثال^{1}: أي مقاييس النزعة المركزية يناسب بصورة أفضل البيانات الآتية ، ولماذا ؟

a) $833, 796, 781, 776, 758$

b) $65, 21, 17, 52, 25, 17, 11, 22, 60, 44$

المُعلمة هو مقياس يصف خاصية في المجتمع الكلي ، أما **الإحصائي** يصف خاصية في العينة

مثال[2]: حدّد إذا كان كل مما يأتي يُمثل عينة، أو مُجتمعًا كليًا:

1) تقدير عدد ساعات مُشاهدة ربات البيوت للتلفاز خلالأسبوع في المملكة.

2) أعطى اختبار رياضيات للخريجين في المملكة، لتحليل بعض المهارات الرياضية.

3) تُقارن معلمة درجات الاختبار في صفها.

4) تُقارن معلمة درجات طالباتها مع مُعدّل الدرجات في المملكة لأحد الاختبارات الوطنية.

مثال[3]: عيّن العينة والمجتمع في كل من المواقف الآتية ، ثُم صف إحصائي العينة ومعلمة المجتمع:

a) اختيرت عينة عشوائية من إحدى الجامعات مُكونة من 40 من طالبي المنح الدراسية ، ثُم حسب الوسط لدرجاتهم.

العينة: المجتمع: إحصائي العينة: معلمة المجتمع:

b) اختيرت عينة عشوائية طبقية من الممرضين العاملين في جميع مستشفيات دول الخليج العربي، ثُم حُسب وسيط رواتب هؤلاء الممرضين.

العينة: المجتمع: إحصائي العينة: معلمة المجتمع:

مفهوم أساسي

اضف إلى مطويتك

هامش خطأ المعاينة

عند سحب عينة حجمها n من مجتمع كلي، فإنه يمكن تقريب هامش الخطأ في المعاينة بالقيمة $\pm \frac{1}{\sqrt{n}}$

مثال[4]: في دراسة مسحية عشوائية شملت **3247** شخصًا، قال **41%** منهم إنهم مرتاحون للنهضة العلمية.

a) ما هامش الخطأ المُعاينة ؟

b) ما الفترة المُمكنة التي تحتوي على نسبة افراد المجتمع المرتاحين للنهضة العلمية ؟

قانون

اضف إلى مطويتك

قانونا الانحراف المعياري

عينة

$$s = \sqrt{\frac{\sum_{k=1}^{n} (x_k - \bar{x})^2}{n-1}}$$

حيث n عدد قيم العينة

مجتمع كلي

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{k=1}^{N} (x_k - \mu)^2}{N}}$$

حيث N عدد قيم المجتمع

مثال[5]: أوجد الوسط، والتباين، والانحراف المعياري، مُقربًا إلى أقرب جزء من عشرة لكل من مجموعتي البيانات الآتيين:

$6, 10, 15, 11, 8$	$92, 84, 71, 83, 100$

تدريب[1]: في مجموعة من تسعة أعداد مختلفة ، أي مما يأتي لا يؤثر في الوسيط؟

a) مضاعفة كل عدد
b) زيادة كل عدد بمقدار 10
c) زيادة القيمة الصغرى فقط
d) زيادة القيمة الكبرى فقط

تدريب[2]: الوسط لدرجات طلبة صف فيه c طالبًا هو 80، والوسط لدرجات صف فيه d طالبًا هو 85. وعندما تم حساب الوسط للصفين معًا كان 82. فما النسبة $\frac{c}{d}$ ؟

الدرس الثالث : الاحتمال المشروط

اليوم:.....

التاريخ:.....

الحصة:.....

مفهوم أساسي

اضف إلى مطويتك

الاحتمال المشروط

إذا كان A, B حدثين غير مستقلين، فإن الاحتمال المشروط لوقوع الحدث B، إذا عُلِم أن الحدث A قد وقع يعرَّف على النحو:

$$P(B \mid A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}, \; P(A) \neq 0$$

مثال[1]: ألقت عبير حجر نرد مرةً واحدةً. ما احتمال ظهور العدد **3** ، علمًا بأن العدد الظاهر فردي ؟

تمرين[1]: يحتوي كيس على **52** بطاقة مُقسمة إلى أربع مجموعات لكل منها لون من الألوان الآتية: الأحمر والأخضر والأزرق والأصفر، ورقمت بطاقات كل لون بالأرقام من **1** إلى **13**. إذا سحبت نوال بطاقة، فما احتمال أن تكون تحمل البطاقة رقم **13** علمًا بأن ما سحبته كان رقم **11** أو **12** أو **13** ؟

مثال²: يوضح الجدول المُجاور أداء الطلاب في امتحان القيادة الأول، علمًا بأن البعض أخذ حصصًا تحضيرًا للامتحان والبعض الآخر لم يأخذ.

	أخذ حصصًا	لم يأخذ حصصًا
ناجح	64	48
راسب	18	32

a) ما احتمال أن ينجح راشد، علمًا بأنه أخذ حصصًا ؟
b) ما احتمال أن يرسب سامي، علمًا بأنه لم يأخذ حصصًا ؟
c) ما احتمال ألّا يأخذ عبداللطيف حصصًا، علمًا بأنه ناجح؟

تمرين²: يُبين الجدول المُجاور أعداد الطلبة الذين حضروا مباراة كرة القدم والذين تغيبوا عنها من السنوات الجامعية الأولى والثانية والثالثة والرابعة. إذا اختير أحد الطلبة عشوائيًا، فأوجد احتمال أن يكون الطالب قد حضر المباراة، علمًا بأنه من السنة الثالثة.

	أولى	ثانية	ثالثة	رابعة
الحضور	48	90	224	254
الغياب	182	141	36	8

تدريب[1]: إذا كان A ، B حدثين في فضاء العينة لتجربة عشوائية ما، بحيثُ كان $\boldsymbol{P(A \cup B) = 0.4}$ ، $\boldsymbol{P(B) = 0.5}$، $\boldsymbol{P(A) = 0.2}$ فما قيمة $\boldsymbol{P(A|B)}$ ؟

تدريب[2]: إذا كان $\boldsymbol{60\%}$ من موظفي شركة ما من الذكور ، والباقي من الإناث ، وكان $\boldsymbol{8\%}$ من الذكور يستعملون نظارات طبية، $\boldsymbol{15\%}$ من الإناث يستعملون نظارات طبية، وإذا اختير موظف عشوائيًا من الشركة ، فما احتمال أن تكون أنثى ولا تستعمل النظارات الطبية ؟

الدرس الرابع : الاحتمال والتوزيعات الاحتمالية

اليوم:.....

التاريخ:.....

الحصة:.....

مثال[1]: تبيع شركة

تمرين[1]: حصل **7** طلاب في اختبار الرياضيات على التقدير **A** ، و **9** طلاب على التقدير **B** ، و **11** على التقدير **C** و **3** على التقدير **D** ، و **2** على التقدير **F**.

a) أوجد احتمال أن يحصل طالب تم اختياره عشوائيًا على التقدير **C**.
b) أوجد احتمال أن يكون طالب تم اختياره عشوائيًا قد حصل على تقدير **B** على الأقل.

مفهوم أساسي

اضف إلى مطويتك

احتمال النجاح والفشل

التعبير اللفظي إذا كان عدد مرات النجاح لوقوع حدث S من المرات، وعدد مرات الفشل في وقوع الحدث نفسه f من المرات، فإن احتمال النجاح يكتب على النحو $P(S)$، كما يكتب احتمال الفشل على النحو $P(F)$. ويعطى كل من احتمال النجاح واحتمال الفشل بالعلاقتين الآتيتين:

بالرموز
$$P(S)=\frac{s}{s+f} \quad , \quad P(F)=\frac{f}{s+f}$$

مثال²: رشّحت وزارة التربية والتعليم **12** طالبًا، و**16** طالبة للتنافس على **6** جوائز نظرًا لتفوقهم الدراسي. إذا تمت مُقابلة المرشحين في اليوم الأول بشكل عشوائي، فما احتمال أن يفوز **3** طلاب و **3** طالبات بالجوائز؟

تمرين²: رشّح **3** طلاب من الصفوف الإعدادية، و **11** طالبًا من الصفوف الثانوية في إحدى المدارس الإعدادية الثانوية، واختير أربعة منهم لتمثيل المدرسة في إحدى المُسابقات. إذا اختير المُترشحون الأربعة بطريقة عشوائية، فما احتمال أن يفوز طالبان من الصفوف الإعدادية وطالبان من الصفوف الثانوية ؟

مثال[3]: لدى صالح **6** أصدقاء تبدأ أسماؤهم بالأحرف A, B, C, D, E, F ويتوقع من كل منهم اتصالًا هاتفيًا للاتفاق على موعد رحلة ينوون القيام بها. ما احتمال أن يتصل A أولًا ثُم B ثانيًا، ويتصل كل من D, E, F أخيرًا.

تمرين[3]: اشترك صلاح، وعبدالله، وسليم في سباق $400m$ مع خمسة رياضيين آخرين. ما احتمال أن ينهي هؤلاء الثلاثة السباق في المراكز الثلاثة الأولى؟

مثال[4]: سحبت بيان **5** كرات معًا من حقيبة. إذا علمت أن الحقيبة تحتوي على **7** كرات حمراء، و**7** كرات سوداء، و **7** كرات زرقاء، و **7** كرات بيضاء، فما احتمال أن تكون اثنتان من الكرات المسحوبة من لون واحد، والكرات الثلاث الأخرى من لون آخر ؟

تمرين[4]: إذا أضيف للكيس **7** كرات خضراء، فما احتمال أن تسحب بيان **4** كرات من لون و **3** كرات من لون آخر؟

مفهوم أساسي — خصائص التوزيعات الاحتمالية

أضف إلى مطويتك

- احتمال كل قيمة من قيم المتغير العشوائي X أكبر من أو تساوي صفرًا، وأقل من أو تساوي 1.
- مجموع احتمالات قيم المتغير العشوائي X جميعها يساوي 1.

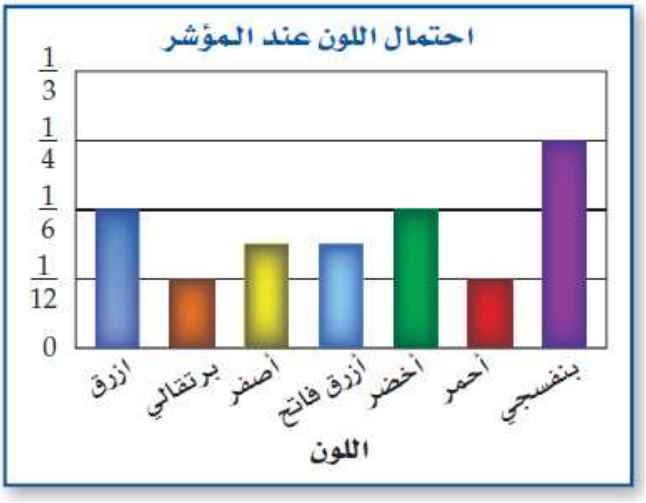
مثال[5]: يبين الجدول المُجاور التوزيع الاحتمالي لعدد المرات التي يطلب فيها الزبون البيتزا في الشهر الواحد.

a) بيّن أن التوزيع الاحتمالي صحيح.
b) ما احتمال أن يطلب أحد الزبائن البيتزا أقل من

تمرين[5]: يبين الجدول المُجاور التوزيع الاحتمالي لعدد السيارات التي تمتلكها الأسر في إحدى الدول العربية.

a) بيّن أن التوزيع صحيح.
b) ما احتمال أن يكون لدى الأسرة سيارتان على الأكثر؟

مثال[6]: يوضح القرص ذو المؤشر الدوّار توزيعًا احتماليًا، حيثُ يمكن أن يتوقف المؤشر على أي من المناطق الملونة.



a) استعمل تمثيل الأعمدة، لتحدّد اللون الأكبر إمكانية لوقوف المؤشر عنده.
b) أوجد $P(\text{أزرق أو أخضر})$
c) أوجد احتمال عدم وقف المؤشر على اللونين الأحمر و الأزرق الفاتح.

$$E(x) = n.p(x)$$

القيمة المتوقعة $E(x)$ هو الوسط الموزون للقيم في التوزيع الاحتمالي

مثال6:

a) أوجد القيمة المتوقعة عند رمي حجر النرد مرة واحدة.
b) إذا ألقي حجر نرد **4** مرات مُتتالية، فأوجد العدد المُتوقع لمرات الحصول على العدد **5**.

تدريب: يُمثّل التوزيع أدناه قائمة بعدد الخسارات واحتمال كل منها في الجولة الأولى من مباريات كرة السلة. أوجد القيمة المُتوقعة لعدد الخسارات في السنة.

عدد الخسارات في السنة									
عدد الخسارات	0	1	2	3	4	5	6	7	8
الاحتمال	$\frac{1}{32}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{3}{32}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{5}{16}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{32}$	$\frac{1}{32}$

الدرس الخامس : التوزيع الطبيعي

اليوم:.....

التاريخ:.....

الحصة:.....

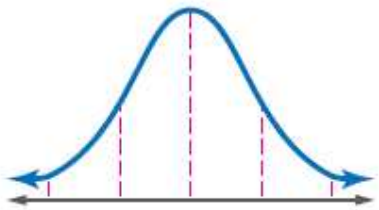
مفهوم أساسي

أضف إلى مطويتك

خصائص التوزيع الطبيعي

- تكون القيمة العظمى عند الوسط، ويتساوى فيه الوسط والوسيط والمنوال.
- يمكن أن يمتد منحنى التوزيع من سالب ما لا نهاية إلى موجب ما لا نهاية دون أن يمس المحور x.
- يستعمل وسط المجتمع μ ،والانحراف المعياري للمجتمع σ لتحديد الاحتمالات. وتكون الاحتمالات تراكمية يمكن التعبير عنها بالمتباينات.
- المساحات تحت المنحنى تُعبّر عن الاحتمالات، والمساحة تحت المنحنى تساوي 1.

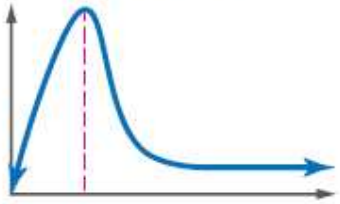
توزيع طبيعي



شكل جرس ومتماثل

التواء موجب

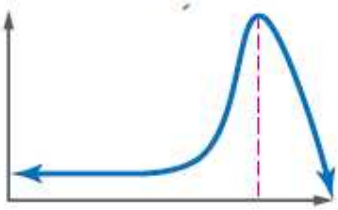
(ملتوٍ إلى اليمين)



التوزيع مكثّف في اليسار والذيل إلى اليمين

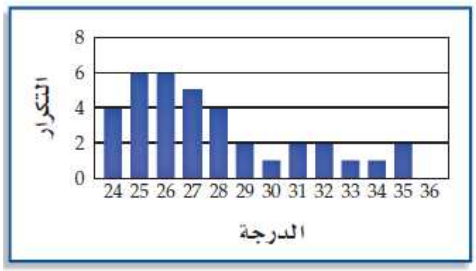
التواء سالب

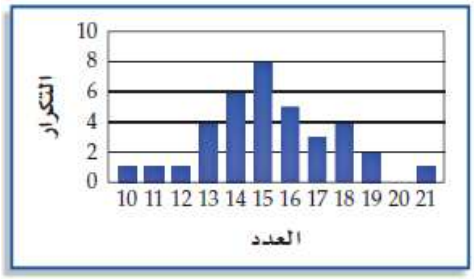
(ملتوٍ إلى اليسار)



التوزيع مكثّف في اليمين والذيل إلى اليسار

مثال1: حدّد إذا كانت البيانات في الجدول المُجاور تظهر التواءً موجبًا، أو التواءً سالبًا أو موزعة توزيعًا طبيعيًا.





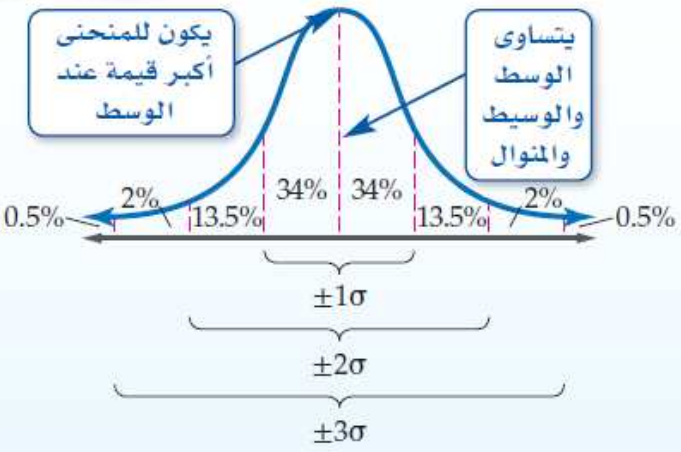
مفهوم أساسي

القانون التجريبي

أضف إلى مطويتك

يتصف التوزيع الطبيعي الذي وسطه μ وانحرافه المعياري σ بالخصائص الآتية:

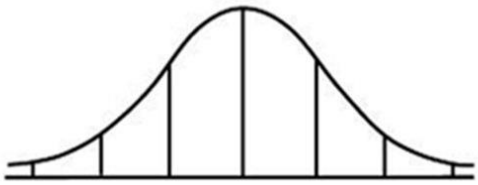
- يقع 68% تقريبًا من البيانات ضمن الفترة $[\mu \pm \sigma]$.
- يقع 95% تقريبًا من البيانات ضمن الفترة $[\mu \pm 2\sigma]$.
- يقع 99% تقريبًا من البيانات ضمن الفترة $[\mu \pm 3\sigma]$.



مثال[2]: الوسط لتوزيع طبيعي

مثال3: توزّع أطوال $\mathbf{1800}$ يافع توزيعًا طبيعيًا بوسط $\mathbf{66}\boldsymbol{in}$ وانحراف معياري يساوي $\mathbf{2}\boldsymbol{in}$

- كم عدد اليافعين اللذين تتراوح أطوالهم بين $\mathbf{62}\boldsymbol{in}$ و $\mathbf{70}\boldsymbol{in}$ ؟



- ما احتمال اختيار أحد اليافعين عشوائيًا، بحيثُ يزيد طوله عن $\mathbf{68}\boldsymbol{in}$ ؟

تمرين3: تتوزّع الأوساط لدرجات طلاب مدرسة تمّ اعتماد النقاط في تمثيل الدرجات فيها توزيعًا طبيعيًا، بوسط مقداره $\mathbf{2.6}$ وانحراف معياري $\mathbf{0.6}$. إذا علمت أن عدد طلاب المدرسة $\mathbf{1200}$ طالب، فأوجد:

A- ما العدد التقريبي للطلاب اللذين يقع وسط درجاتهم بين $\mathbf{2.0}$ ، $\mathbf{3.2}$ نقطة ؟
B- ما احتمال أن يتّم اختيار طالب بصورة عشوائية، ووسطه يقل بين $\mathbf{3.8}$ نقطة ؟

الدرس السادس : التوزيعات ذات الحدين

اليوم:.....

التاريخ:.....

الحصة:.....

مفهوم أساسي

اضف إلى مطويتك

تجارب ذات الحدين

- لكل تجربة ناتجان، نجاح أو فشل.
- يوجد عدد محدد من المحاولات، n.
- احتمال النجاح ثابت في كل محاولة.
- المحاولات مستقلة .
- المتغير العشوائي هو عدد مرات النجاح في n من المحاولات.

مثال[1]: اشترى يونس **5** بطاقات ألعاب، واحتمال الفوز بجائزة لكل بطاقة يُساوي **10%** ، احسب احتمال أن تكسب بطاقتان على الأقل جائزة.

تمرين[1]: احتمال أن يحرز لاعب كرة القدم هدفًا من ضربة حرة $\frac{2}{5}$. إذا ضرب **5** ضربات حرة، فأوجد:

A- P(عدم احراز أي هدف)

B- P(إحراز أهداف من جميع الضربات)

C- P(إحراز **3** أهداف على الأقل)

D- P(إحراز هدفين على الأكثر)

مفهوم أساسي — تقريب توزيع ذي الحدين من خلال التوزيع الطبيعي

اضف إلى مطويتك

في توزيع ذي الحدين عندما n تُمثّل عدد المحاولات، واحتمال النجاح s، واحتمال الفشل f، بحيث يكون $n\,s \geq 5, n\,f \geq 5$، يمكن تقريب توزيع ذي الحدين إلى توزيع طبيعي بوسط $\mu = n\,s$، وبانحراف معياري $\sigma = \sqrt{n\,s\,f}$

مثال²: أشارت دراسة سابقة إلى أن **64%** من الخريجين يرون أن سنوات الجامعة كانت ممتعة. وقد نفّذ سمير دراسة مسحية على **300** من الخريجين عشوائيًا. ما احتمال أن يوافق **200** خريج على الأقل منهم على ما جاء في الدراسات السابقة ؟

تمرين²: أشارت دراسة سابقة إلى أن **32%** من أولياء الأمور المستطلعة آراؤهم يرون أنه يجب تقليل عدد أيام الإجازة الصيفية للطلبة في نهاية العام الدراسي. غير أن حنان ترى أن النسبة أقل من ذلك، ولذلك قامت بإجراء دراسة مسحية شملت **250** من أولياء الأمور اختارتهم بطريقة عشوائية ممن استهدفتهم الدراسة السابقة. ما احتمال ألّا يرى أكثر من **66** من أولياء الأمور وجوب تقليل عدد أيام الإجازة الصيفية ؟

GOOD LUCK