نموذج الإجابة

مملكة البحرين

وزارة التربية والتعليم

إدارة الامتحانات / قسم الامتحانات

امتحان الدور الثاني للتعليم الثانوي للعام الدراسي 2013 / 2014 م

اسم المقـــرر: الرياضيات 6 | المسار: توحيد المسارات

رمز المقرر: ريض 366 | الزمن: ساعتان

الدرجة النهائية $\frac{\quad}{100}$

السؤال الأول | أجب عن جميع أسئلة هذا الامتحان وعددها 7

اختر رمز الإجابة الصحيحة في كلٍ مما يأتي . علمًا بأنه لا توجد سوى إجابة صحيحة واحدة لكل فقرة:

$\frac{\quad}{10}$

1) ما معادلة المنحنى y الذي يمر بالنقطة $(1 , -2)$ ، وميل المماس له عند أيّ نقطة واقعة عليه يساوي -1 ؟

$\frac{\quad}{2}$

A $y=-x-1$ C $y=x-1$

B $y=-x+1$ D $y=x+1$

2) قذف جسم رأسيًا إلى أعلى ، وكانت العلاقة بين ارتفاعه s بالأمتار عن سطح الأرض ، والزمن t بالثواني هي $s=nt-3t^2$. إذا كان زمن وصول الجسم إلى أقصى ارتفاع هو 3 sec ، فما قيمة n؟

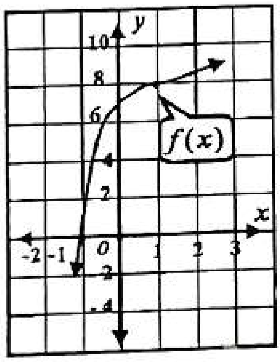
$\frac{\quad}{2}$

A 6   C 18

B 9   D 27

3) يوجد لمنحنى $f(x)=x^3-3x^2+3x+7$ المُمثّل بالشكل المجاور :

$\frac{\quad}{2}$



A نقطة عظمى محلية عند $x=1$ C نقطة انقلاب عند $x=-1$

B نقطة صغرى محلية عند $x=1$ D نقطة انقلاب عند $x=1$

4) ما قيمة $\int_{-2}^{-1} 2|m|\,dm$ ؟

$\frac{\quad}{2}$

A 3   C -1

B 1   D -3

5) إذا كانت $f(x)=\cot x$ ، فإن المشتقة الثانية $f''(x)$ تساوي :

$\frac{\quad}{2}$

A $2\csc x\ \cot x$ C $-2\csc x\ \cot x$

B $2\csc^2 x\ \cot x$ D $-2\csc^2 x\ \cot x$

يتبع

15

السؤال الثاني

7

1) إذا كانت $y=\frac{x}{3}$ ، $z=\tan^3 y$ ، فأوجد $\frac{dz}{dx}$ عند $x=\pi$.

الحل

باستخدام قاعدة السلسلة:

$$\frac{dz}{dy} = 3\tan^2 y\,(\sec^2 y) \quad (1)\ (1)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{3} \quad (1),$$

$$\because \frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy}\cdot\frac{dy}{dx} = (3\tan^2 y\sec^2 y)\left(\frac{1}{3}\right) \quad (1)$$

$$= \tan^2\frac{x}{3}\cdot\sec^2\frac{x}{3} \quad \left(\tfrac{1}{2}\right)$$

$$\left.\frac{dz}{dx}\right|_{x=\pi} = \tan^2\frac{\pi}{3}\cdot\sec^2\frac{\pi}{3} \quad (1)$$

$$= (\sqrt{3})^2\left(\tfrac{1}{2}\right)(2)^2\left(\tfrac{1}{2}\right) = 3(4)$$

$$= 12 \quad \left(\tfrac{1}{2}\right)$$

الحل بالطريقة المباشرة:

$$\because z=\tan^3 y,\ y=\frac{x}{3}$$

$$\therefore z = \tan^3\frac{x}{3} \quad (2)$$

$$\frac{dz}{dx} = 3\tan^2\frac{x}{3}\left(\frac{1}{3}\sec^2\frac{x}{3}\right) \quad (1)\ (1)$$

$$= \tan^2\frac{x}{3}\sec^2\frac{x}{3} \quad \left(\tfrac{1}{2}\right)$$

$$\left.\frac{dz}{dx}\right|_{x=\pi} = \left(\tan^2\frac{\pi}{3}\right)\left(\sec^2\frac{\pi}{3}\right) \quad (1)\ \left(\tfrac{1}{2}\right)\ \left(\tfrac{1}{2}\right)$$

$$= (\sqrt{3})^2(2)^2 = 3(4)$$

$$= 12 \quad \left(\tfrac{1}{2}\right)$$

8

2) مستطيل معدني ينقص طوله بمعدل 0.5 cm/sec ، ويزداد عرضه بمعدل 0.2 cm/sec ،
أوجد معدل التغير في مساحة سطحه في اللحظة التي يكون فيها الطول 10 cm ، والعرض 8 cm .

الحل

نفرض أن طول المستطيل هو x ، أي أن $x=10cm$

وعرضه y أي أن $y=8cm$.

بما أن طوله ينقص بمعدل 0.5 cm/sec ، أي أن $\frac{dx}{dt}=-0.5$ $\left(\tfrac{1}{2}\right)$

وكذلك بما أن عرضه يزداد بمعدل 0.2 cm/sec ،

إذن، $\frac{dy}{dt}=0.2$ $\left(\tfrac{1}{2}\right)$،

$$\because A = xy, \quad (1)$$

$$\therefore \frac{dA}{dt} = x\frac{dy}{dt} + y\frac{dx}{dt} = 10(0.2) + 8(-0.5) \quad \left(\tfrac{1}{2}\right)\left(\tfrac{1}{2}\right)(1)\left(\tfrac{1}{2}\right)\left(\tfrac{1}{2}\right)(1)(1)$$

$$= 2 + (-4) = -2 \quad \left(\tfrac{1}{2}\right)\left(\tfrac{1}{2}\right)$$

إذن، معدل التغير في مساحة سطحه هو $2cm^2/sec$

يتبع

16

السؤال الثالث

1) أوجد معادلة العمودي لمنحنى $x^2 - y^2 + 2x = 7$ عند النقطة $(2,-1)$ الواقعة عليه.

الحل

8

$\because m = \frac{dy}{dx} \Rightarrow 2x - 2y\frac{dy}{dx} + 2 = 0$

$\Rightarrow y\frac{dy}{dx} = x+1 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{x+1}{y}$

$m = \frac{dy}{dx}\Big|_{(2,-1)} = \frac{2+1}{-1} = \frac{3}{-1} = -3$

$\therefore$ ميل العمودي هو $-\frac{1}{m}$ ويساوي $\frac{1}{3}$

$\therefore$ معادلة العمودي هي:

$(y - y_1) = -\frac{1}{m}(x - x_1)$

$y + 1 = \frac{1}{3}(x-2) \Rightarrow 3y + 3 = x - 2$

$x - 3y - 5 = 0$

---

2) أوجد عددين موجبين مجموعهما 22، ومجموع مربعيهما أصغر ما يمكن. موضحاً خطوات الحل.

8

الحل

افرض أن العددين هما:

$x, \quad 22 - x$

ونرمز لمجموع مربعي العددين بالرمز $p(x)$

$\therefore p(x) = x^2 + (22-x)^2$

$\therefore p'(x) = 2x + 2(22-x)(-1)$

$= 2x - 2(22-x) = 2x + 2x - 44$

$= 4x - 44$

مجموع مربعي العددين $p(x)$ يكون أصغر ما يمكن عندما يكون:

$p'(x) = 0 \Rightarrow 4x - 44 = 0$

$\therefore x = \frac{44}{4} = 11 > 0$

لمجموع مربعي العددين قيمة صغرى عندما $x = 11$

$\therefore$ العددان هما 11، 11.

$p''(x) = 4 > 0$

يتبع

13

5

السؤال الرابع

1) أوجد $\int \frac{3x^2}{\sqrt[3]{3x^3-3}}\,dx$.

الحل

$$\int \frac{3x^2}{\sqrt[3]{3x^3-3}}\,dx = \int 3x^2 (3x^3-3)^{-\frac{1}{3}}\,dx$$

$$= \frac{3}{3}\int 3x^2 (3x^3-3)^{-\frac{1}{3}}\,dx$$

$$= \frac{1}{3}\int 9x^2 (3x^3-3)^{-\frac{1}{3}}\,dx$$

$$= \frac{1}{\cancel{3}}\left(\frac{\cancel{3}}{2}\right)(3x^3-3)^{\frac{2}{3}} + c$$

$$= \frac{1}{2}(3x^3-3)^{\frac{2}{3}} + c$$

8

2) يتحرك جسيم من السكون في خط مستقيم مبتدئاً من نقطة ثابتة O ، إذا كانت العلاقة بين تسارعه a بالمتر لكل ثانية مربعة ، والزمن t بالثواني هي $a = 16\cos 4t$ ، فأوجد سرعة الجسيم بعد مضي زمن قدره $\frac{\pi}{8}$ sec من لحظة بدء الحركة .

الحل

$$\because v(t) = \int a\,dt$$

$$\therefore \int a\,dt = \int 16\cos 4t\,dt$$

$$= \overset{4}{\cancel{16}}\frac{\sin 4t}{\cancel{4}} + c \quad , \quad t=0 \text{ عندما } v=0$$

$$\therefore 0 = 4\sin 0 + c \Rightarrow c = 0$$

$$\therefore v = 4\sin 4t$$

$$v_{t=\frac{\pi}{8}} = 4\sin 4\left(\frac{\pi}{8}\right) = 4\sin\frac{\pi}{2} = 4(1) = 4\,m/sec$$

يتبع

14

السؤال الخامس

6

1) إذا كان $\int_0^b \tan v \ \sec^2 v \ dv = \frac{1}{2}$ ، فأوجد قيمة b ، حيث $0 \le b < \frac{\pi}{2}$.

الحل

$$\because \int_0^b \tan v \ \sec^2 v \ dv = \frac{1}{2}$$

$$\left[\frac{\tan^2 v}{2}\right]_0^b = \frac{1}{2} \Rightarrow \cancel{\tfrac{1}{2}}\left[\tan^2 b - \tan^2 0\right] = \cancel{\tfrac{1}{2}}$$

$$\tan^2 b - 0 = 1 \Rightarrow \tan^2 b = 1 \quad , \quad 0 \le b \le \frac{\pi}{2}$$

$$\therefore \tan b = 1 \Rightarrow b = \frac{\pi}{4}$$

حل آخر:

عليه حل السؤال بتكامل:

$$\int_0^b \tan v \sec v \sec v \, dv = \frac{1}{2}$$

$$\therefore \cancel{\tfrac{1}{2}}\left[\sec^2 v\right]_0^b = \cancel{\tfrac{1}{2}} \Rightarrow \left[\sec^2 v\right]_0^b = 1 \Rightarrow \sec^2 b - 1 = 1 \Rightarrow \sec b = \sqrt{2}$$

$$\therefore b = \frac{\pi}{4}$$

8

2) أوجد مساحة سطح المنطقة المحصورة بين المحور x ، والمستقيمين $x = 6$ ، $x = 3$ ، ومنحنى الدالة $f(x) = x^2 + 1$.

الحل

$$A = \left|\int_3^6 (x^2+1)\,dx\right|$$

$$= \left|\left[\frac{x^3}{3} + x\right]_3^6\right|$$

$$= \left|\left[\frac{6^3}{3} + 6\right] - \left[\frac{3^3}{3} + 3\right]\right|$$

$$= \left|(72+6) - (9+3)\right|$$

$$= |78 - 12| = 66$$ وحدة مربعة

يتبع

14

السؤال السادس

احسب من دون استعمال الآلة الحاسبة قيمة $\int_0^4 \sqrt{16 - x^2}\, dx$.

الحل

دالة التعويض هي :

$x = g(\theta) = \sqrt{\frac{a}{b}} \sin\theta \quad \forall x \in [0, 4]$ (1)

$= \sqrt{\frac{16}{1}} \sin\theta \quad , a = 16, b = 1$ (1/2)

$= 4 \sin\theta$ (1/2) $\Rightarrow g'(\theta) = 4\cos\theta$ (1)

ولإيجاد حدود التكامل لـ $g(\theta)$ نتبع ما يأتي :

$x = 0 \Rightarrow 4\sin\theta = 0 \Rightarrow \sin\theta = 0 \Rightarrow \theta = 0$ (1/2) (1/2) (1/2)

$x = 4 \Rightarrow 4\sin\theta = 4 \Rightarrow \sin\theta = 1 \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{2}$ (1/2) (1/2) (1/2)

من الواضح أنه $\forall \theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$ تكون $x \in [0, 4]$

∴ شروط نظرية التعويض متوفرة

$\therefore \int_0^4 f(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(g(\theta))\, g'(\theta)\, d\theta$ (1)

$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{16 - 16\sin^2\theta}\,(4\cos\theta)\, d\theta$ (1/2)

$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} 4\sqrt{1 - \sin^2\theta}\,(4\cos\theta)\, d\theta$

$= 16 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos\theta)(\cos\theta)\, d\theta$ (1)

$= 16 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\theta\, d\theta$ (1/2) $= 16\left(\frac{1}{2}\right) \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + \cos 2\theta)\, d\theta$ (1)

$= 8 \left[\theta + \frac{1}{2}\sin 2\theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$ (1/2) (1) $= 8\left[\frac{\pi}{2} + \frac{1}{2}\sin\pi - 0\right]$ (1/2) (1/2) (1/2)

$= 8 \cdot \left[\frac{\pi}{2} + 0\right]$ (1/2) $= 4\pi$ (1/2)

يتبع

18

السؤال السابع

إذا كانت $f(x)=x^3+3x^2-9x$:

1) حدّد كل مما يأتي موضحًا خطوات الحل :

a) فترات التزايد والتناقص .

b) النقاط العظمى والصغرى المحلية (إن وجدت) .

c) نقط الانقلاب (إن وجدت) .

d) الفترة التي يكون فيها منحنى الدالة مقعرًا إلى أعلى، والفترة التي يكون فيها مقعرًا إلى أسفل .

2) مثّل منحنى الدالة بيانيًا بصورة تقريبية .

الحل

∵ الدالة f كثيرة حدود متصلة وقابلة للاشتقاق

$\therefore f'(x)=3x^2+6x-9$

$f'(x)=0$

$\therefore 3x^2+6x-9=0 \Rightarrow x^2+2x-3=0$

$(x+3)(x-1)=0$

$x+3=0 \Rightarrow x=-3$ ، أو

$x-1=0 \Rightarrow x=1$

$\Rightarrow f(1)=-5,\ f(-3)=27$

∴ $(-3,27)$ ، $(1,-5)$ نقطتان حرجتان

وبدراسة إشارة $f'(x)$ حول كل من $x=-3$ ، $x=1$

كما في الجدول المجاور نجد أنّ :

الدالة f متزايدة في الفترة $R\setminus(-3,1)$ أي $(-\infty,-3]\cup[1,\infty)$.

والدالة f متناقصة في الفترة $[-3,1]$.

وللدالة f نقطة صغرى محلية عند $(1,-5)$ ، ونقطة عظمى محلية عند $(-3,27)$.

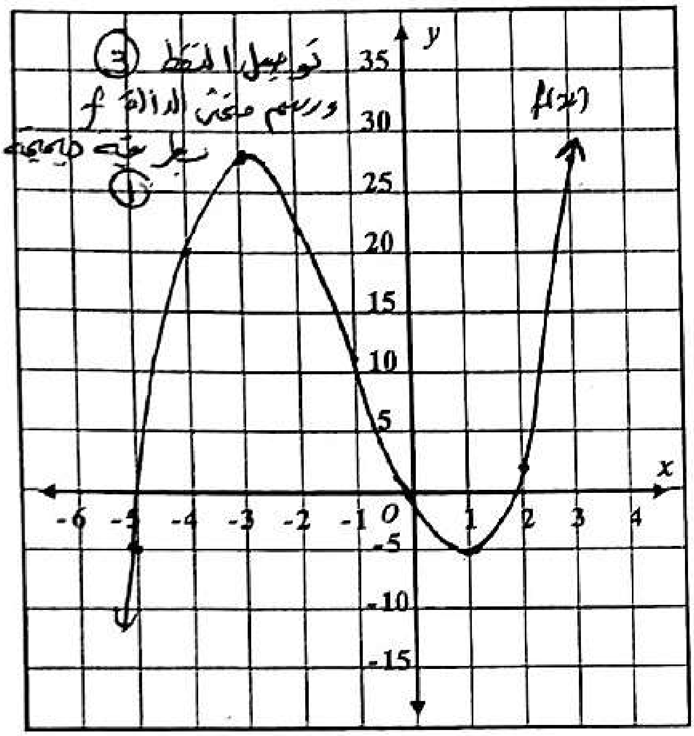
لتحديد نقاط الانقلاب نوجد المشتقة الثانية .

$f''(x)=6x+6-0=6x+6$

$f''(x)=0 \Rightarrow 6x+6=0 \Rightarrow x=\frac{-6}{6}=-1$

∴ النقطة $(-1,11)$ نقطة انقلاب

منحنى الدالة f مقعر إلى أعلى في الفترة $(-1,\infty)$ ، ومقعر إلى أسفل في الفترة $(-\infty,-1)$.



قيم x	$-\infty$ ← -3	-3 ← -1	-1 ← 1	1 ← ∞
إشارة $f'(x)$	+	−	−	+
اتجاه الدالة $f(x)$	متزايدة	متناقصة	متناقصة	متزايدة
إشارة $f''(x)$	−	−	+	+
اتجاه تقعر منحنى الدالة f	مقعر إلى أسفل		مقعر إلى أعلى	

جدول مساعد لرسم المنحنى

x	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$	-5	20	27	22	11	0	-5	2	27

{انتهت الإجابة}

تراعى الحلول الأخرى إن وجدت