مملكة البحرين

وزارة التربية والتعليم

مدرسة أحمد العمران الثانوية للبنين

قسم الرياضيات

ملخص قوانين مقرر ريض 364

الفصل الأول : المتطابقات والمعادلات المثلثية

قاعدة فيثاغورث

نظرية فيثاغورث

لإيجاد أي ضلع مجهول في مثلث قائم الزاوية

$$(AB)^2+(BC)^2=(AC)^2$$

الدوال المثلثية الأساسية

$$\sin\theta=\frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}}$$

$$\cos\theta=\frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}}$$

$$\tan\theta=\frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}}=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}$$

مقلوبات الدوال الأساسية

$$\csc\theta=\frac{1}{\sin\theta}$$

$$\sec\theta=\frac{1}{\cos\theta}$$

$$\cot\theta=\frac{1}{\tan\theta}=\frac{\cos\theta}{\sin\theta}$$

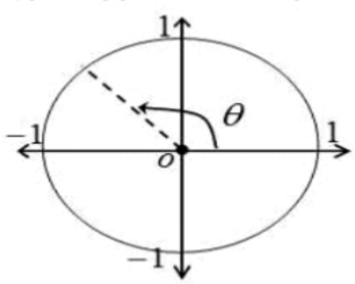
تذكر

قاعدة إشارات الدوال المثلثية

* كيفية إيجاد زاوية الإسناد و اشارات الدوال المثلثية :

الربع الثاني	الربع الأول
$\theta'=180^\circ-\theta$ $\theta'=\pi-\theta$	$\theta'=\theta$
+ sin , csc	+ الكل
الربع الثالث	**الربع الرابع**
$\theta'=\theta-180^\circ$ $\theta'=\theta-\pi$	$\theta'=360^\circ-\theta$ $\theta'=2\pi-\theta$
+ tan , cot	+ cos, sec

الدوال المثلثية للزوايا الربعية



$$\sin\theta=y,\cos\theta=x,\tan\theta=\frac{y}{x}$$

التحويل من القياس بالدرجات إلى الراديان و العكس

درجات ⇐ راديان

بالضرب في $\dfrac{\pi}{180^\circ}$

راديان ⇐ درجات

بالضرب في $\dfrac{180^\circ}{\pi}$

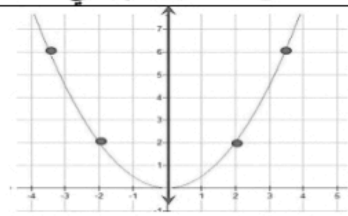
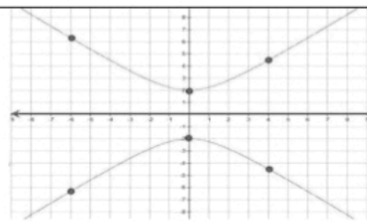
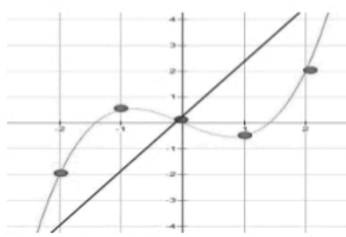
المتطابقات الرئيسية	$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$ ومنه نستنتج : $1-\sin^2\theta=\cos^2\theta$ $1-\cos^2\theta=\sin^2\theta$	$1+\tan^2\theta=\sec^2\theta$ ومنه نستنتج : $\tan^2\theta=\sec^2\theta-1$ $\sec^2\theta-\tan^2\theta=1$	$1+\cot^2=\csc^2\theta$ ومنه نستنتج : $\cot^2\theta=\csc^2\theta-1$ $\csc^2\theta-\cot^2\theta=1$
الدوال المثلثية للزاويتين المتتامتين	$\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\cos\theta$	$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\sin\theta$	$\tan\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\cot\theta$
الدوال الزوجية والفردية	$\sin(-\theta)=-\sin\theta$	$\cos(-\theta)=\cos\theta$	$\tan(-\theta)=-\tan\theta$
متطابقات المجموع و الفرق	$\sin(x\pm y)=\sin x\cos y\pm\cos x\sin y$ $\cos(x\pm y)=\cos x\cos y\mp\sin x\sin y$ $\tan(x\pm y)=\frac{\tan x\pm\tan y}{1\mp\tan x.\tan y}$		
متطابقات ضعف الزاوية	$\sin2\theta=2\sin\theta\cos\theta$ ومنه نستنتج : $\sin4\theta=2\sin2\theta\cos2\theta$ $\sin\theta=2\sin\frac{1}{2}\theta\cos\frac{1}{2}\theta$	$\cos2\theta=\cos^2\theta-\sin^2\theta$ $=2\cos^2\theta-1$ $=1-2\sin^2\theta$ ومنه نستنتج : $\cos4\theta=$ $\cos\theta=$	$\tan2\theta=\frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}$ ومنه نستنتج : $\tan4\theta=$ $\tan\theta=$
متطابقات نصف الزاوية	$\sin\frac{\theta}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{2}}$ ومنه نستنتج : $\sin\theta=$	$\cos\frac{\theta}{2}=\pm\sqrt{\frac{1+\cos\theta}{2}}$ ومنه نستنتج : $\cos\theta=$	$\tan\frac{\theta}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}}$ ومنه نستنتج : $\tan\theta=$

الفصل الثاني : تحليل الدوال

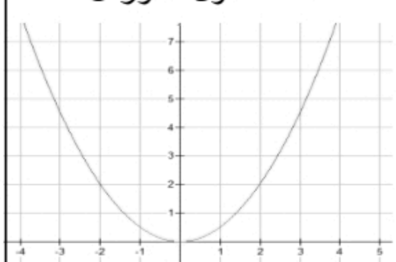
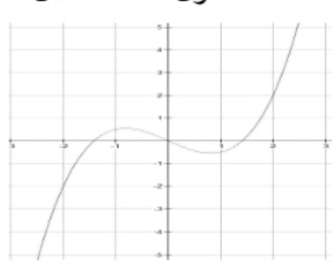
إيجاد مقطعي المحورين

	بيانياً	جبرياً
مقطع X (أصفار أو جذور الدالة)	التقاطع مع محور X	نعوض عن $y=0$ ونوجد قيم x
مقطع Y	التقاطع مع محور Y	نعوض عن $x=0$

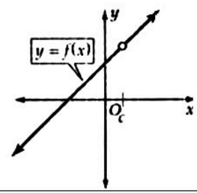
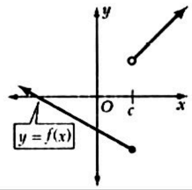
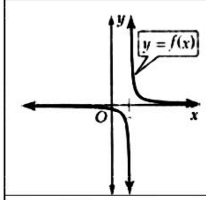
إختبارات التماثل بين الدوال والعلاقات

التماثل	عددياً	من التمثيل البياني	جبرياً
حول محور Y	لكل نقطة (x, y) على المنحنى فإن النقطة $(-x, y)$ واقعة أيضاً عليه		تعويض $x-$ مكان x يعطي معادلة مكافئة
حول محور X	لكل نقطة (x, y) على المنحنى فإن النقطة $(x, -y)$ واقعة أيضاً عليه		تعويض $y-$ مكان y يعطي معادلة مكافئة
حول نقطة الأصل	لكل نقطة (x, y) على المنحنى فإن النقطة $(-x, -y)$ واقعة أيضاً عليه		تعويض $x-$ مكان x و $y-$ مكان y يعطي معادلة مكافئة

تحديد الدوال الزوجية والفردية

	الدالة الزوجية	الدالة الفردية
بيانياً	متماثلة حول محور Y 	متماثلة حول نقطة الأصل 
جبرياً	$f(-x)=f(x)$	$f(-x)=-f(x)$

أنواع الانفصال

النوع	أولاً : الإنفصال النقطي	ثانياً : الإنفصال القفزي	ثالثاً : الإنفصال اللانهائي
مثال			
	النهاية موجودة عند النقطة لكن إما الدالة غير معرفة عند x=c أو : $\lim_{x\to c} f(x) \neq f(c)$	النهايتين من اليمين و اليسار موجودتين لكن غير متساويتين	النهاية غير موجودة عند النقطة $\lim_{x\to c} f(x) = \pm\infty$
هل هي قابلة للإزالة	نعم	لا	لا

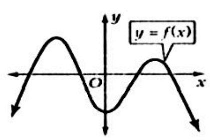
اختبار الاتصال

تكون الدالة $f(x)$ متصلة عند $x=c$ إذا تحقق كل مما يلي :

أولاً : الدالة معرفة عند $x=c$ أي $f(c)\in\Re$

ثانياً : للدالة نهاية عند $x=c$ أي $\lim_{x\to c^+} f(x) = \lim_{x\to c^-} f(x) \in \Re$

ثالثاً : $\lim_{x\to c} f(x) = f(c)$



تقريب أصفار الدالة

يكون $x=c$ صفر للدالة $f(x)$ إذا كانت $f(c)=0$

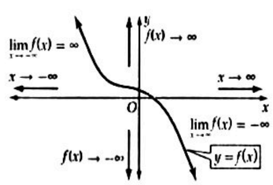
لمعرفة الأعداد الصحيحة المتتالية التي ينحصر بينها الأصفار الحقيقية للدالة في فترة ما :

نعوض عن الاعداد الصحيحة بالدالة واذا تغيرت قيمة الدالة من موجب لسالب أو العكس فيكون هناك صفر حقيقي بين هذين العددين الصحيحين

سلوك طرفي التمثيل البياني

هو وصف قيم الدالة عندما تزاد قيم x أو تنقص بلا حدود

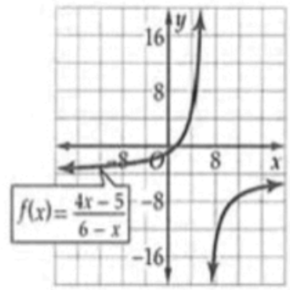
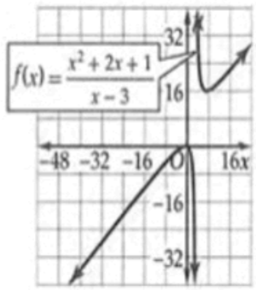
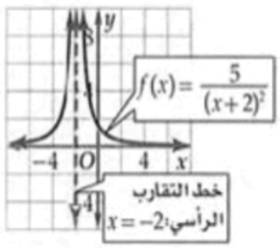
أي عندما تقترب من $\infty, -\infty$



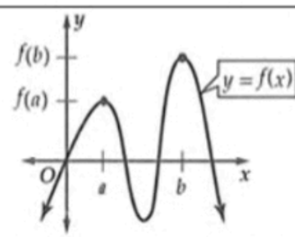
إيجا

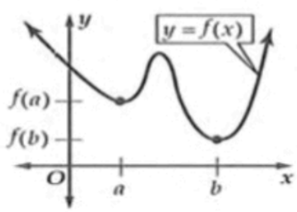
	درجة البسط = درجة المقام	درجة البسط > درجة المقام	درجة البسط < درجة المقام

إيجاد خطوط التقارب الرأسية والأفقية

	درجة البسط = درجة المقام	درجة البسط > درجة المقام	درجة البسط < درجة المقام
مثال عليها			
خطوط التقارب الرأسية	$x = c$: حيث c أحد أصفار المقام		
	$\lim\limits_{x\to c^-} f(x)=\pm\infty$ أو $\lim\limits_{x\to c^+} f(x)=\pm\infty$		
خطوط التقارب الأفقية	يوجد خط أفقي معادلته $y=\dfrac{\text{معامل أكبر اس بالبسط}}{\text{معامل أكبر اس بالمقام}}$	لا يوجد خطوط تقارب أفقية	يوجد خط تقارب أفقي معادلته $y=0$
	$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=c$ أو $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=c$		

إيجاد القيم القصوى بيانياً





$f(b)$ عظمى مطلقة	$f(a)$ عظمى محلية	$f(b)$ صغرى مطلقة	$f(a)$ صغرى محلية

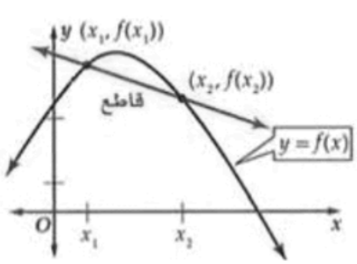
متوسط معدل التغير

متوسط معدل التغير (m) للدالة $f(x)$ في الفترة $[x_1, x_2]$

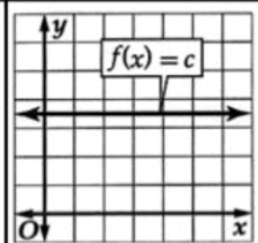
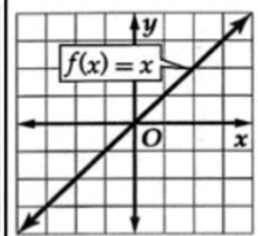
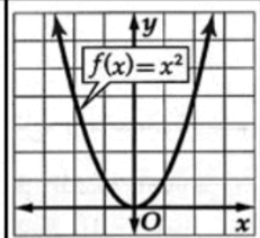
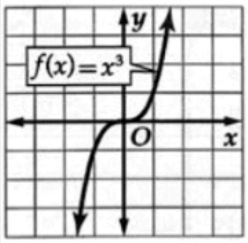
$$\boxed{m=\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}}$$

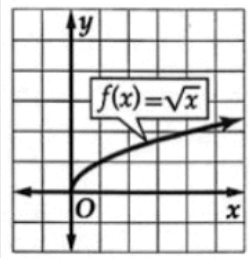
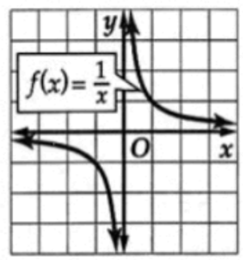
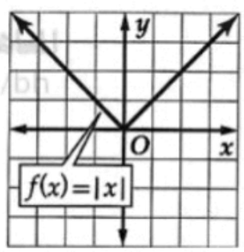
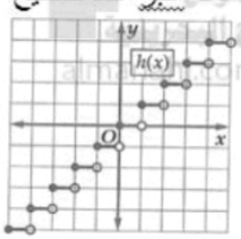
موجب $\Rightarrow$ الدالة تزايدية

سالب $\Rightarrow$ الدالة تناقصية



الدوال الأم

النوع	(1) الدالة الثابتة	(2) الدالة الخطية	(3) الدالة التربيعية	(4) الدالة التكعيبية
تمثيلها البياني				

النوع	(5) دالة الجذر التربيعي	(6) دالة المقلوب	(7) دالة القيمة المطلقة	(8) الدالة الدرجية
تمثيلها البياني				دالة اكبر عدد صحيح 

التحويلات الهندسية للدوال

جميع ما يلي هو تحويل للدوال الأم $f(x)$

التحويل	التغير في التمثيل البياني للدالة	
التمدد	$g(x)=f(ax)$ أو $g(x)=a.f(x)$ $a>1$ توسع رأسي (تضييق أفقي)	$0<a<1$ تضييق رأسي (توسع أفقي)
الإنعكاس صـ 92	$g(x)=-f(x)$: إنعكاس حول محور x	$g(x)=f(-x)$: إنعكاس حول محور y
الانسحاب (الإزاحة)	إزاحة أفقية $f(x\pm h)$ + : إزاحة لليسار ، − : إزاحة لليمين	إزاحة رأسية $f(x)\pm k$ + : إزاحة للأعلى ، − : إزاحة للأسفل

صيغة الرأس

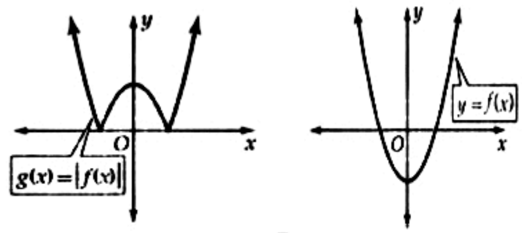
لكتابة الدالة التربيعية $f(x)=ax^2+bx+c$ بصيغة الرأس وذلك لتحديد التحويلات الهندسية عليها فيكون على الشكل التالي :

$f(x)=a(x-h)^2+k$ حيث رأس المنحنى هو (h,k) ، $h=x=\dfrac{-b}{2a}$ و $k=y=f(h)$

تحويلات القيمة المطلقة

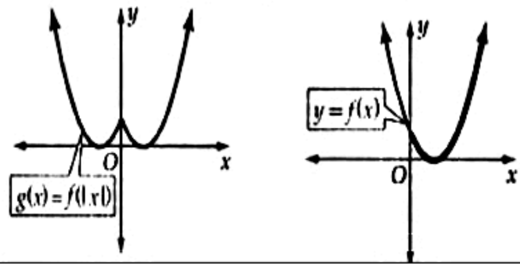
أولاً : $g(x) = |f(x)|$

نستبدل الجزء الموجود أسفل المحور X بعمل انعكاس له على محور X



ثانياً : $h(x) = f(|x|)$

نستبدل الجزء الموجود يسار المحور Y بعمل انعكاس للجزء الأيمن على محور Y



العمليات على الدوال

العملية	الجمع $(f+g)(x)$	الطرح $(f-g)(x)$	الضرب $(f.g)(x)$	القسمة $(\frac{f}{g})(x)$
الناتج	$f(x)+g(x)$	$f(x)-g(x)$	$f(x).g(x)$	$\frac{f(x)}{g(x)}$
المجال	تقاطع مجال الدالتين f , g			تقاطع مجال الدالتين f, g ماعدا أصفار المقام g

تركيب دالتين

f, g دالتين فإن دالة التركيب $f \circ g$ هي : $(f \circ g)(x) = f(g(x))$

مجال دالة التركيب :

قيم x في مجال g بشرط أن تكون صورها $g(x)$ موجودة بمجال f

وبشكل آخر (مجال g $\cap$ مجال الدالة الناتجة من التركيب)

إستراتيجية إيجاد الدالة العكسية

للدالة $f(x)$ فلإيجاد الدالة العكسية $f^{-1}(x)$ نتبع ما يلي :

1) حدد من التمثيل البياني للدالة $f(x)$ وإختبار الخط الأفقي هل يوجد دالة عكسية أم لا .

2) ضع y مكان $f(x)$ $\Leftarrow$ 3) بدل موقع المتغيرين x, y

4) أوجد y بدلالة x $\Leftarrow$ 5) ضع $f^{-1}(x)$ مكان y

6) ضع القيد على الدالة العكسية بحيث يكون مجال $f^{-1}(x) =$ مدى $f(x)$

العلاقة بين الدالة ودالتها العكسية :

تكون f, g دالة و معكوسها إذا كان : $[f \circ g](x) = x = [g \circ f](x)$

الفصل الثالث : النهايات والإشتقاق

إستراتيجية إيجاد نهاية الدالة جبرياً

إستراتيجية إيجاد نهاية الدالة $f(x)$ عندما $x \to c$ (أي $\lim_{x \to c} f(x)$)

نقوم بالتعويض المباشر للدالة عند هذه النقطة فإذا كان **الناتج**

عدد حقيقي وليكن **L** فإن :	كمية غير معرفة $\frac{\text{عدد حقيقي غير الصفر}}{0}$	كمية غير معينة $\frac{0}{0}$
$\lim_{x \to c} f(x) = L$	$\lim_{x \to c} f(x) = \infty$ أو $-\infty$	نلجأ لتحليل الدالة أو الضرب بالمرافق إذا كانت تحتوي جذور
الدالة لها نهاية عندما $x \to c$	الدالة ليس لها نهاية عندما $x \to c$	لايمكن الحكم على وجود نهاية من عدمه

حساب النهايات عند اللانهاية جبرياً

بعض قواعد النهايات

دوال القوى (n : طبيعي)		دوال كثيرات الحدود	دوال المقلوب	الحدودية النسبية
	$\lim_{x \to \infty} x^n = \infty$	نأخذ النهاية فقط للحد الذي يحتوي على أكبر قوة	n : طبيعي $\lim_{x \to \pm\infty} \frac{1}{x^n} = 0$	نقسم الحد الذي يحتوي على أكبر قوة على الحد الذي يحتوي أكبرقوة بالمقام وبعد التبسيط نعوض عن $\pm\infty$
n : زوجي	$\lim_{x \to -\infty} x^n = \infty$			
n : فردي	$\lim_{x \to -\infty} x^n = -\infty$			

تذكر : نهاية الحدودية النسبية $h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ عند اللانهاية

درجة البسط = درجة المقام	درجة البسط > درجة المقام	درجة البسط < درجة المقام
$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \frac{\text{معامل أكبر اس بالبسط}}{\text{معامل أكبر اس بالمقام}}$	$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \infty$ أو $-\infty$	$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = 0$

المشتقة بإستخدام التعريف

المشتقة بإستخدام التعريف	ملاحظة
للدالة $y = f(x)$ فإن مشتقتها $f'(x)$ بإستخدام التعريف هي : $f'(x) = \lim_{x \to h} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$	يرمز للمشتقة أيضاً بـ $y', \frac{dy}{dx}, \frac{df}{dx}$

قواعد الإشتقاق

أولاً	مشتقتها	الدالة
دوال القوة	$f'(x)=n.x^{n-1}$	$f(x)=x^n$
	$f'(x)=c.n.x^{n-1}$	$f(x)=cx^n$
	$f'(x)=0$	$f(x)=c$

تذكر أن
$\frac{1}{x^m}=x^{-m}$
$\sqrt[m]{x^n}=x^{\frac{n}{m}}$

ثانياً	مشتقتها	الدالة
ضرب دالتين	$h'(x)=f(x).g'(x)+g(x).f'(x)$ مشتقة الأولى × الثانية + مشتقة الثانية × الأولى	$h(x)=f(x).g(x)$
قسمة دالتين	$h'(x)=\frac{g(x).f'(x)-f(x).g'(x)}{[g(x)]^2}$ (مشتقة المقام × البسط) - (مشتقة البسط × المقام) / المقام تربيع	$h(x)=\frac{f(x)}{g(x)}$

بعض تطبيقات الإشتقاق

◄ أولاً : ميل المماس للمنحنى

للدالة $y=f(x)$ فإن **معادلة ميل المنحنى m** هو مشتقة الدالة $\boxed{m=f'(x)}$

ويكون ميل المماس عند $x=a$ **هو** $m=f'(a)$

ملاحظة : معدل التغير اللحظي لدالة هو أيضاً مشتقة هذه الدالة

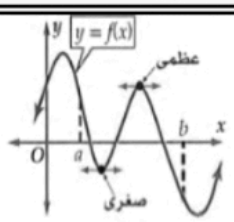
◄ ثانياً : السرعة المتجهة

إذا كانت $f(t)$: المسافة التي يقطعها جسم حيث t : الزمن

تذكر مما سبق (متوسط السرعة المتجهة)	السرعة المتجهة اللحظية
متوسط السرعة المتجهة في الفترة الزمنية من a إلى b هو : $v_{avg}=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$	**السرعة المتجهة اللحظية** $v(t)$ هي مشتقة المسافة : $v(t)=f'(t)$

◄ ثالثاً : النقاط الحرجة

النقطة الحرجة	إستخدام المشتقة لإيجاد القيم القصوى
تكون النقطة $(x_1, f(x_1))$ نقطة حرجة إذا حققت أحد الشرطين $f'(x_1)=0$ أو $f'(x_1)$ **غير معرف**	لأي دالة $f(x)$ متصلة في الفترة $[a,b]$ فإن لها قيمة عظمى أو صغرى اما عند : **الطرفين أو النقاط الحرجة** **ملاحظة :** إذا كانت النقطة الحرجة خارج الفترة فلا يتم احتسابها من النقط العظمى أو الصغرى



قانون التكامل المحدد باستعمال النهايات (مجموع ريمان الأيمن)

يستخدم لإيجاد مساحة المنطقة المحصورة بين دالة والمحور **X** في الفترة $[a,b]$

$$\int_a^b f(x).dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x$$

Δx : طول الفترة الجزئية $\Delta x = \frac{b-a}{n}$		الأطراف اليمنى $x_i = a + i\Delta x$
a : الحد الأدنى	b : الحد الأعلى	

صيغ المجموع $\sum$

$(2)\ \sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$	$(1)\ \sum_{i=1}^{n} c = cn$
$(3)\ \sum_{i=1}^{n} i^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$	$(3)\ \sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

قواعد التكامل

قواعد التكامل غير المحدد (إيجاد الدوال الأصلية)

تكاملها $F(x)$	الدالة $f(x)$
$\frac{x^{n+1}}{n+1} + c$	$\int x^n.dx$
$\frac{k\,x^{n+1}}{n+1} + c$	$\int k\,x^n.dx$
$kx + c$	$\int k.dx$

c , k : ثابت (عدد حقيقي)

ملاحظة : n : عدد نسبي $n \neq 1$

التكامل المحدد

تعرف أيضاً بـ **النظرية الأساسية في التفاضل والتكامل**

$$\int_a^b f(x).dx = F(x)\Big|_b^a$$

$$= F(b) - F(a)$$

حيث : $F(x)$: دالة أصلية للدالة $f(x)$

العلاقة بين التفاضل والتكامل

ميل المماس $m = f'(x)$ ← بالتكامل ← الدالة $f(x)$ ؛ الدالة $f(x)$ ← بالإشتقاق ← ميل المماس

المسافة (الإزاحة) $s(t)$ ← بالإشتقاق ← السرعة المتجهة اللحظية $v(t) = s'(t)$ ← بالتكامل ← المسافة (الإزاحة) $s(t)$

ملاحظات فيزيائية

1) في بداية الحركة يكون الزمن = صفر

2) إذا رجع الجسم لنقطة البداية فإن الإزاحة = صفر

3) عند أقصى ارتفاع تكون السرعة = صفر