نموذج الإجابة

مملكة البحرين

وزارة التربية والتعليم

إدارة الامتحانات/ قسم الامتحانات

امتحان نهاية الفصل الدراسي الثاني للتعليم الثانوي للعام الدراسي ٢٠١١ - ٢٠١٢ م

اسم المقرر : **الرياضيات ٦** المسار : **توحيد المسارات**

رمز المقرر: **ريض ٣٦٦** الزمن : **ساعتان**

أجب عن جميع الأسئلة الآتية وعددها (٨)

السؤال الأول : اختر رمز الإجابة الصحيحة في كل مما يأتي ، علمًا بأنه توجد إجابة صحيحة واحدة من بين البدائل الأربع التي تلي كل فقرة . (١٠ درجات)

١) ما القيمة $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x+\sin 2x}{3x}$ ؟

A) 0 B) $\frac{1}{2}$ C) $\frac{5}{3}$ D) $\frac{2}{3}$

٢) إذا كانت $f(x)=\sec^2 x-\tan^2 x$ ، فما قيمة $f'(\frac{\pi}{4})$ ؟

A) 1 B) 0 C) -1 D) -2

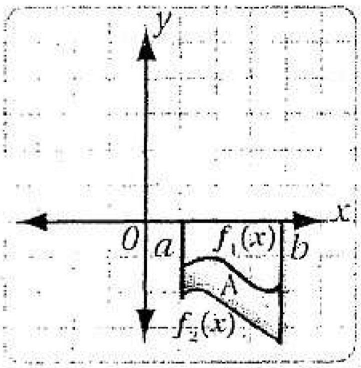
٣) إذا كانت $f(x)=x^3+3x^2+1$ ، فما قيمة / قيم x التي يكون للدالة f عندها نقطة / نقاط حرجة ؟

A) -2 فقط B) $-2,2$ C) $-2,1$ D) $-2,0$

٤) ما قيمة $\int_{\pi}^{\pi}\sin^5 x\ dx$ ؟

A) 0 B) $\frac{\pi}{6}$ C) 1 D) π

٥) يبيّن الشكل أدناه ، المنطقة A المحصورة بين الدالتين المتصلتين f_2 ، f_1 في الفترة $[a,b]$ ، إذا علمت أن مساحة سطح المنطقة A تساوي 8 وحدات مربعة ، وأن مساحة سطح المنطقة المحصورة بين f_1 والمحور x في الفترة $[a,b]$ تساوي 12 وحدة مربعة ، فما قيمة $\int_a^b[f_1(x)-f_2(x)]dx$ ؟



A) 8 B) 20

C) -8 D) -20

(١١ درجة)

السؤال الثاني :

١) إذا كان $x = \cos t$ ، $\frac{dt}{dz} = 5$ ، فأوجد $\frac{dx}{dz}$ عندما $t = \frac{3\pi}{2}$

٥

$$\frac{dx}{dz} = \frac{dx}{dt} \cdot \frac{dt}{dz} \quad ①$$

$$= (-\sin t)(5)$$

① ½

$$\left.\frac{dx}{dz}\right|_{t=\frac{3\pi}{2}} = \left(-\sin \frac{3\pi}{2}\right)(5) \quad ½$$

①

$$= -(-1)(5) = 5 \quad ①$$

٢) أوجد معادلة المماس لمنحنى $4x^2 + 2xy = y^2 + 1$ عند (1 , 3) الواقعة على المنحنى .

½ ½ ½ ½ ½

$$8x + 2x\frac{dy}{dx} + 2y = 2y\frac{dy}{dx} + 0$$

٦

$$\frac{dy}{dx}(2x - 2y) = -8x - 2y$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-8x - 2y}{2x - 2y} \quad ½$$

$$m = \frac{-8 - 6}{2 - 6} = \frac{-14}{-4} = \frac{7}{2} \quad ①$$

∴ معادلة المماس هي :

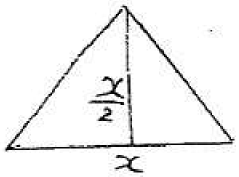
$$y - 3 = \frac{7}{2}(x - 1) \quad ②$$

(١٠ درجات)

السؤال الثالث :

١) صفيحة معدنية مثلثة الشكل ، ارتفاعها يساوي نصف طول قاعدتها ، تتمدد بالحرارة بحيث تزداد مساحتها بمعدل $0.05\ cm^2/sec$. أوجد معدل التغيُّر في طول قاعدتها عندما يصبح طولها $10\ cm$.

٥



بفرض أن طول القاعدة $= x\ cm$ ½

$\therefore$ الارتفاع $= \frac{x}{2}\ cm$ ½

مساحة المثلث $A = \frac{1}{2}(x)(\frac{x}{2}) = \frac{1}{4}x^2$ ½ ½

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2}x\frac{dx}{dt} \quad 1$$

$$0.05 = \frac{1}{2}(10)\frac{dx}{dt} \quad 1 \implies \frac{dx}{dt} = 0.001\ cm/sec \quad 1$$

٢) إذا كان $y = \sin ax$ ، حيث $a > 0$ ، وكان $\frac{d^2y}{dx^2} = -16y$ ، فما قيمة الثابت a ؟

٥

$$\frac{dy}{dx} = a\cos ax \quad 1$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -a^2\sin ax \quad 1$$

$$-16y = -a^2\sin ax \quad ½$$

$$16\sin ax = a^2\sin ax \quad ½$$

$$\implies a^2 = 16 \quad 1$$

$$\implies a = 4 \quad 1$$

(١٦ درجة)

السؤال الرابع :

١) يراد ثني سلك طوله 120 cm على شكل مستطيل ، أوجد أبعاد هذا المستطيل بحيث تكون مساحة سطحه أكبر ما يمكن .

9

بفرض أن طول المستطيل $= x \text{ cm}$

وأن عرض المستطيل $= y \text{ cm}$ (½)

$\Rightarrow 2x + 2y = 120$ (1) $\Rightarrow x + y = 60$ (½)

$\Rightarrow y = 60 - x$ (½)

مساحة سطح المستطيل

$A = x \cdot y = x(60 - x)$ (1)

$= 60x - x^2$ (1)

$A' = 60 - 2x = 0$ (1) (1) $\Rightarrow 2x = 60 \Rightarrow x = 30$ (1)

$\Rightarrow y = 30$ (1)

$A'' = -2 < 0$ (1)

∴ مساحة سطح المستطيل أكبر ما يمكن عندما $x = 30$, $y = 30$

٢) يتحرك جسيم على خط مستقيم ابتداءً من نقطة ثابتة O ، بحيث كانت سرعته v (m/sec) بعد t (sec) تعطى بالعلاقة $v = 3t^2 + 2t$. أوجد كلاً من بُعد الجسيم عن O ، وتسارعه (عجلته) عندما $t = 5$ sec .

7

$s = \int v\, dt = \int (3t^2 + 2t)\, dt$ (1)

$= t^3 + t^2 + c$ (1½)

لكن $s = 0$ عندما $t = 0$ $\Rightarrow$ $c = 0$ (1)

$\therefore s = t^3 + t^2$ (½)

$s(5) = 5^3 + 5^2 = 125 + 25 = 150 \text{ m}$ (½)

$a = \frac{dv}{dt} = 6t + 2$ (1) (1)

$a(5) = 6(5) + 2 = 32 \text{ m/sec}^2$ (½) (½)

(١٨ درجة)

السؤال الخامس :

إذا كانت $f(x) = 1 + 3x^2 - x^3$،

١) أوجد فترات التزايد وفترات التناقص للدالة f (إن وجدت).

٢) أوجد القيم العظمى والقيم الصغرى المحلية للدالة f (إن وجدت).

٣) أوجد فترات التقعُّر إلى أعلى وفترات التقعُّر إلى أسفل ونقاط الانقلاب للدالة f (إن وجدت).

٤) مثّل الدالة f بيانيًا بصورة تقريبية في المستوى الإحداثي أدناه.

$f'(x) = 6x - 3x^2 = 0$ ½ ½

$3x(2 - x) = 0$ ①

$\Rightarrow x = 0$ ½ or $x = 2$ ½ ∴ $(0,1)$ ① ، $(2,5)$ ① نقاط حرجة

① إشارة f' $-\infty$ $- - - - -$ 0 $+ + +$ 2 $- - - - -$ ∞

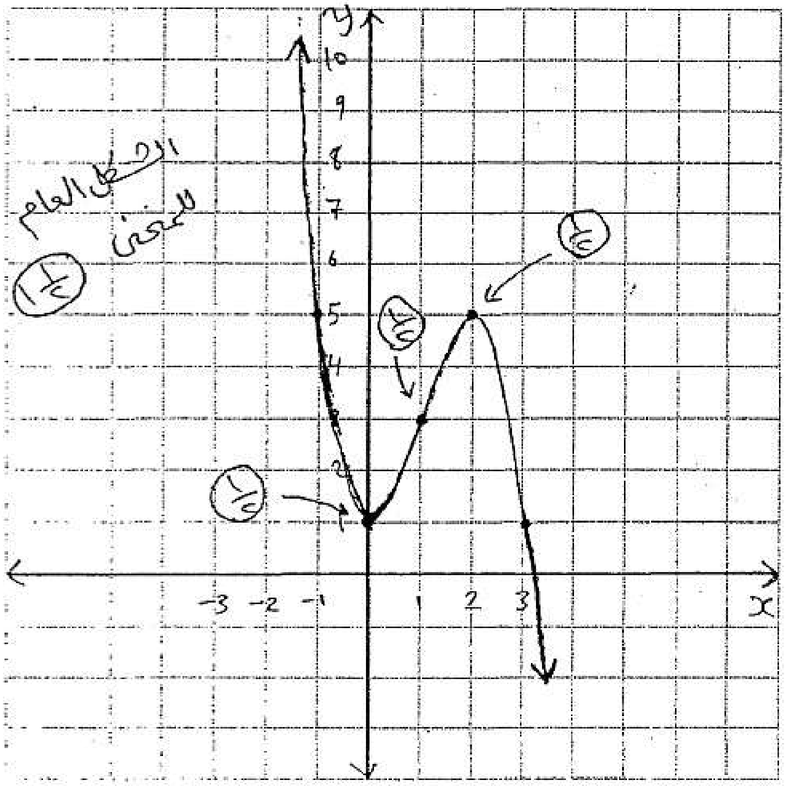
∴ ١) f متزايدة في $[0,2]$ ① ، ومتناقصة في $(-\infty, 0]$ ، $[2, \infty)$ ①

٢) للدالة f قيمة صغرى محلية عند $x=0$ قيمتها ١ ①

وللدالة f قيمة عظمى محلية عند $x=2$ قيمتها 5 ①

$f''(x) = 6 - 6x = 0$ ½ $\Rightarrow x = 1$ ½

إشارة f'' ① $-\infty$ $+ + + +$ 1 $- - - -$ ∞



٣) f مقعرة إلى أعلى في $(-\infty, 1)$ ①

f مقعرة إلى أسفل في $(1, \infty)$ ①

$(1, 3)$ نقطة انقلاب ①

نقاط مساعدة لتمثيل الدالة

x	-1	-1	3
y	21	5	1

(١٢ درجة)

السؤال السادس :

أوجد كلا مما يأتي :

A) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^2 x \; dx - \int_{\frac{\pi}{4}}^{0} \cos^2 x \; dx \quad = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^2 x \, dx + \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 x \, dx$ ①

5

$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\sin^2 x + \cos^2 x) dx$ ①

$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} 1 \, dx$ ① $= x \Big]_0^{\frac{\pi}{4}}$ ① $= \frac{\pi}{4} - 0$ ① $= \frac{\pi}{4}$

B) $\int (x^2 + 2x + 1)(x^3 + 3x^2 + 3x + 5)^4 \, dx$

$= \frac{1}{3}$ ($\frac{1}{2}$) $\int (3x^2 + 6x + 3)$ ① $(x^3 + 3x^2 + 3x + 5)^4 \, dx$

٣

$= \frac{1}{3} \times \frac{(x^3 + 3x^2 + 3x + 5)^5}{5}$ ① $+ C$ ($\frac{1}{2}$)

C) $\int \frac{1 + \cos x}{\sin^2 x} \; dx \quad = \int \left(\frac{1}{\sin^2 x} \right.$ ($\frac{1}{2}$) $+ \left. \frac{\cos x}{\sin^2 x} \right)$ ($\frac{1}{2}$) dx

٤

$= \int (\csc^2 x$ ($\frac{1}{2}$) $+ \cot x \csc x$ ($\frac{1}{2}$) $) \, dx$

$= -\cot x$ ① $- \csc x$ ① $+ C$

(١٣ درجة)

السؤال السابع :

١) إذا كانت $f(x)=3x|x|, x \in [-3,1]$ ، فاحسب $\int_{-3}^{1} f(x)\,dx$

٤

$$f(x)=\begin{cases} 3x(-x) = -3x^2 , & -3 \le x \le 0 \quad \tfrac{1}{2} \\ 3x(x) = 3x^2 , & 0 < x \le 1 \quad \tfrac{1}{2} \end{cases}$$

وبما أن f متصلة في مجالها ، فإن

$$\int_{-3}^{1} f(x)\,dx = \int_{-3}^{0} -3x^2\,dx + \int_{0}^{1} 3x^2\,dx \quad (1)$$

$$= -x^3\Big]_{-3}^{0} + x^3\Big]_{0}^{1} \quad (1)$$

$$= -(0+27) + (1-0) = -26 \quad (1)$$

٢) أوجد مساحة سطح المنطقة المحصورة بين منحنى $y=x^2$ ، والمستقيم $y=x+2$.

٩

$$x^2 = x+2 \;(1) \Rightarrow x^2 - x - 2 = 0 \quad \tfrac{1}{2}$$

$$\Rightarrow (x-2)(x+1)=0 \;\tfrac{1}{2} \Rightarrow x = 2 \text{ or } -1 \quad (1)$$

$$x+2 \ge x^2 \quad \forall x \in [-1,2] \quad (1) \longrightarrow$$ أو الملاحظة

$$\Rightarrow A = \int_{-1}^{2} (x+2-x^2)\,dx \quad (2)$$

$$= \frac{x^2}{2} + 2x - \frac{x^3}{3}\Big]_{-1}^{2} \quad (1)$$

$$= \left(2+4-\frac{8}{3}\right) - \left(\frac{1}{2} - 2 + \frac{1}{3}\right) \quad (1)$$

$$= \frac{27}{6} = 4.5$$ وحدة مربعة (1)

[illegible]

السؤال الثامن : احسب قيمة $\int_0^{\sqrt{3}} \frac{dx}{x^2+3}$ (١٠ درجات)

$$f(x) = \frac{1}{x^2+3}$$

بفرض أن $x = g(\theta) = \sqrt{3}\tan\theta$ ①

$$\Rightarrow dx = \sqrt{3}\sec^2\theta \, d\theta \quad ①$$

① وعندما $x=0$ ، فإن $\tan\theta = 0 \Leftarrow \theta = 0$

① وعندما $x=\sqrt{3}$ فإن $\tan\theta = 1 \Leftarrow \theta = \frac{\pi}{4}$

ويكون $x \in [0, \sqrt{3}]$ ، $\forall \theta \in [0, \frac{\pi}{4}]$

$$\int_0^{\sqrt{3}} f(x)\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sqrt{3}\sec^2\theta}{3\tan^2\theta + 3}\,d\theta \quad ②$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sqrt{3}\sec^2\theta}{3(\tan^2\theta+1)}\,d\theta \quad ①$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sqrt{3}\sec^2\theta}{3\sec^2\theta}\,d\theta \quad ①$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{3}\int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta \quad \left(\tfrac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{3}}{3}\,\theta\Big]_0^{\frac{\pi}{4}} \quad \left(\tfrac{1}{2}\right)$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{3}\left(\frac{\pi}{4} - 0\right) = \frac{\sqrt{3}\,\pi}{12} \quad ①$$

﴿ انتهت الإجابة ﴾

تراعى الحلول الأخرى إن وجدت