**الإجابة النموذجية**

مملكة البحرين
وزارة التربية والتعليم
إدارة الامتحانات / قسم الامتحانات

**امتحان نهاية الفصل الدراسي الثاني للتعليم الثانوي للعام الدراسي 2012 / 2013م**

اسم المقـرر: **الرياضيات 6** المسار: **توحيد المسارات**

رمز المقرر : **ريض 366** الزمن : **ساعتان**

---

**السؤال الأول –** **أجب عن جميع أسئلة هذا الامتحان وعددها 7** الدرجة النهائية 100

اختر رمز الإجابة الصحيحة في كلٍ مما يأتي .علمًا بأنه لا توجد سوى إجابة صحيحة واحدة لكل فقرة : 10

**1)** لأيّ من الدوال الآتية تكون $\lim_{x\to 0} f(x)=0$ ؟ 2

A $f(x)=\frac{\sin x}{x}$ C $f(x)=\frac{\tan x}{x}$

B $f(x)=\frac{x}{\sin x}$ D $f(x)=\frac{1-\cos x}{x}$

**2)** إذا كانت للدالة $y=ax^2+x$ نقطة عظمى محلية عند $x=1$ ، فما قيمة $a$ ؟ 2

A $-\frac{1}{2}$ C $\frac{1}{2}$

B $0$ D $1$

**3)** إذا كانت الدالة $\sqrt{x}+\sqrt{y}=2$ ، فإن $\frac{dy}{dx}$ تساوي : 2

A $-\sqrt{\frac{x}{y}}$ C $\sqrt{\frac{x}{y}}$

B $-\sqrt{\frac{y}{x}}$ D $\sqrt{\frac{y}{x}}$

**4)** إذا كان $\int_2^3 \frac{dy}{dx}\,dx=\frac{5}{2}$ ، فما قيمة $\int_3^2 \frac{dy}{dx}\,dx$ ؟ 2

A $-\frac{5}{2}$ C $\frac{2}{5}$

B $-\frac{2}{5}$ D $\frac{5}{2}$

**5)** ما قيمة $\int_0^1 3\sqrt{x}\,dx$ ؟ 2

A $-3$ C $2$

B $-2$ D $3$

يتبع

13

السؤال الثاني –

7

1) إذا كانت $y=\cos 2x-\sec 4x$ ، $z=y^4$ ، فأوجد $\frac{dz}{dx}$ عند $x=\frac{\pi}{4}$ .

الحل باستعمال قاعدة التسلسل

$\because y=\cos 2x-\sec 4x$

$\therefore \frac{dy}{dx}=-2\sin 2x-4\sec 4x\tan 4x$ (2)

$\because z=y^4$

$\therefore \frac{dz}{dy}=4y^3$ (1)

$\frac{dz}{dx}=\frac{dz}{dy}\cdot\frac{dy}{dx}$ (1)

$\frac{dz}{dx}=4y^3\cdot(-2\sin 2x-4\sec 4x\tan 4x)$ ($\frac{1}{2}$)

($\frac{1}{2}$)

$\frac{dz}{dx}=4(\cos 2x-\sec 4x)^3\cdot(-2\sin 2x-4\sec 4x\tan 4x)$

$\frac{dz}{dx}_{x=\frac{\pi}{4}}=4\left(\cos\frac{\pi}{2}-\sec\pi\right)^3\left(-2\sin\frac{\pi}{2}-4\sec\pi\tan\pi\right)$ ($\frac{1}{2}$)

($\frac{1}{2}$)

($\frac{1}{2}$) $=4(0-(-1))^3(-2(1)-4((1)(0))=4(-2)=-8$ ($\frac{1}{2}$)

الحل بالطريقة المباشرة

$\because z=y^4\ ,\ y=\cos 2x-\sec 4x$

(1)

$z=(\cos 2x-\sec 4x)^4$

$\frac{dz}{dx}=4(\cos 2x-\sec 4x)^3\cdot(-2\sin 2x-4\sec 4x\tan 4x)$ (3)

$\frac{dz}{dx}_{x=\frac{\pi}{4}}=4\left(\cos\frac{\pi}{2}-\sec\pi\right)^3\cdot\left(-2\sin\frac{\pi}{2}-4\sec\pi\tan\pi\right)$ (1)

($\frac{1}{2}$) $=4(0-(-1))^3(-2(1)-4(0))$ ($\frac{1}{2}$)

($\frac{1}{2}$) $=4(-2)=-8$ ($\frac{1}{2}$)

---

6

2) إذا علمت أن المشتقة الثالثة للدالة $L(x)=n(2x-3)^4$ ، حيث $n\in R$ تساوي 24 عند $x=2$ ، فأوجد قيمة $n$ .

الحل

$L(x)=n(2x-3)^4$

(1) ($\frac{1}{2}$)

$\Rightarrow L'(x)=8n(2x-3)^3$

(1) ($\frac{1}{2}$)

$\Rightarrow L''(x)=48n(2x-3)^2$

(1) ($\frac{1}{2}$)

$\Rightarrow L'''(x)=192n(2x-3)$

($\frac{1}{2}$)

$\Rightarrow L'''(2)=192n(2(2)-3)$

$\Rightarrow$ ($\frac{1}{2}$) $192n(2(2)-3)=24$

$\Rightarrow 192n(1)=24 \Rightarrow n=\frac{24}{192}=\frac{1}{8}$ ($\frac{1}{2}$)

يتبع

12

السؤال الثالث –

1) أوجد معادلة العمودي على المماس لمنحنى الدالة $y=\sqrt[3]{x^2}$ عند النقطة $(-1,1)$ . 6

الحل

بما أن :

$$y=\sqrt[3]{x^2}=x^{\frac{2}{3}}$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}=\frac{2}{3\sqrt[3]{x}} \quad (1)$$

$$(1)\ m=\left(\frac{dy}{dx}\right)_{(-1,1)}=\frac{2}{3\sqrt[3]{-1}}=-\frac{2}{3}\ (1)$$

إذن ، معادلة العمودي لمنحنى الدالة عند النقطة $(-1,1)$ هي :

$$y-y_1=\frac{-1}{m}(x-x_1)\ (1)$$

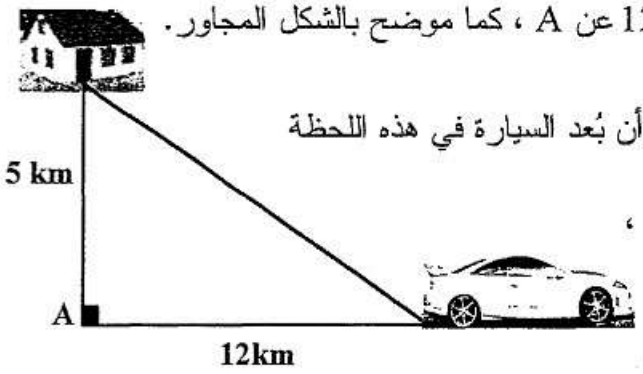
$$(\tfrac{1}{2})\ (1)\ \tfrac{3}{2}\ (\tfrac{1}{2})$$

$$y-1=\frac{3}{2}(x-(-1)) \Rightarrow 2y-2=3x+3 \Rightarrow 2y-3x-5=0$$

---

2) طريقان متعامدان يلتقيان في نقطة A ، تسير سيارة على الطريق الأول مبتعدة عن A وبسرعة 6

منتظمة 52 km / h ، أوجد معدل ابتعاد السيارة عن منزل يقع على الطريق الآخر ويبعد عن A بمقدار 5 km وذلك عندما تكون السيارة على بُعد 12 km عن A ، كما موضح بالشكل المجاور.




الحل

افرض أن بُعد السيارة عن A في لحظة ما يساوي $x$ ، وأن بُعد السيارة في هذه اللحظة عن المنزل يساوي $y$ كما موضح بالشكل المجاور . إذن ،

$$y^2=x^2+(5)^2\ (1)$$

$$y^2-x^2=25 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (*)$$

المطلوب هو $\frac{dy}{dt}$ عندما يكون $x=12\text{ km}$ ، حيث $\frac{dx}{dt}=52\text{ km/h}$ ، وباشتقاق طرفي المعادلة (*) بالنسبة للزمن نجد أن :

$$(\tfrac{1}{2})\ (\tfrac{1}{2})\ (\tfrac{1}{2})\ (\tfrac{1}{2})\ (\tfrac{1}{2})$$

$$2y\frac{dy}{dt}-2x\frac{dx}{dt}=0 \Rightarrow 2y\frac{dy}{dt}=2x\frac{dx}{dt} \Rightarrow \frac{dy}{dt}=\left(\frac{x}{y}\right)\frac{dx}{dt}$$

يمكن إيجاد قيمة $y$ بالتعويض عن قيمة $x=12\text{ km}$ في المعادلة (*) : $(\tfrac{1}{2})$

$$y^2=(12)^2+(5)^2=144+25=169\ (\tfrac{1}{2}) \Rightarrow y=13\text{km}\ (\tfrac{1}{2})$$

إذن ، $(\tfrac{1}{2})\ \frac{dy}{dt}=\left(\frac{12}{13}\right)(52)=48\text{ km/h}\ (\tfrac{1}{2})$

يتبع

18

**السؤال الرابع –**

إذا كانت الدالة $f(x)=x^2(x-3)+3$ :

**1)** حدّد كل مما يأتي موضحًا خطوات الحل :

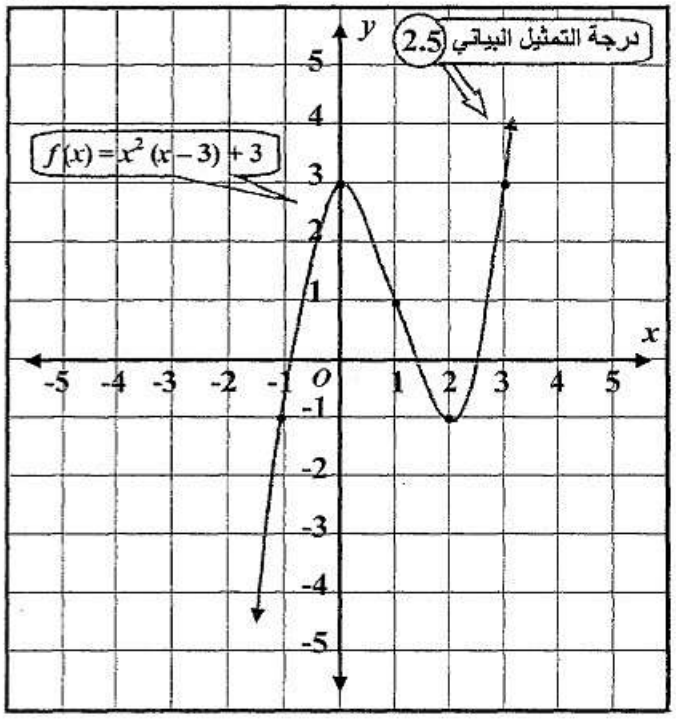
**a)** فترات التزايد والتناقص .

**b)** القيم العظمى والصغرى المحلية (إن وجدت) .

**c)** نقط الانقلاب (إن وجدت) .

**d)** الفترة التي يكون فيها منحنى الدالة مقعرًا إلى أعلى، والفترة التي يكون فيها مقعرًا إلى أسفل .

**2)** مثّل منحنى الدالة بيانيًّا بصورة تقريبية .




**الحل**

**a)** بما أن ، الدالة $f(x)=x^2(x-3)+3$ كثيرة حدود . إذن ، فهي متصلة وقابلة للاشتقاق ،

$f(x)=x^2(x-3)+3=x^3-3x^2+3$ $\frac{1}{2}$

$\frac{1}{2}$ $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{2}$

$\Rightarrow f'(x)=3x^2-6x+0$

1 $f'(x)=0 \Rightarrow 3x^2-6x=0$ $\frac{1}{2}$

$\frac{1}{2}$ $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{2}$

$\Rightarrow 3x(x-2)=0 \Rightarrow 3x=0 \Rightarrow x=0$ ,

or $x-2=0 \Rightarrow x=2$ $\frac{1}{2}$

بما أن ، $f(0)=3$ , $f(2)=-1$

إذن ، $(0,3)$ , $(2,-1)$ نقطتان حرجتان ، 1

ومن دراسة $f'(x)$ حول كل من $x=0$ , $x=2$

| قيم $x$ | $-\infty$ 0 | 0 1 | 1 2 | 2 $\infty$ |
|---|---|---|---|---|
| إشارة $f'(x)$ | + | − | − | + |
| اطراد $f(x)$ | متزايدة | عظمى محلية / متناقصة | متناقصة / صغرى محلية | متزايدة |
| إشارة $f''(x)$ | − | − | + | + |
| اتجاه تقعر منحنى $f(x)$ | مقعر إلى أسفل | | مقعر إلى أعلى | |

1 1

كما في الجدول أعلاه نجد أن الدالة متزايدة في الفترة $R\setminus(0,2)$ ، و متناقصة في الفترة $[0,2]$.

**b)** القيمة العظمى المحلية هي $(3)$ عندما $x=0$ ، و القيمة الصغرى المحلية هي $(-1)$ عندما $x=2$

$\frac{1}{2}$ $\frac{1}{2}$

**c)** لتحديد نقاط الانقلاب نوجد المشتقة الثانية للدالة :

$\frac{1}{2}$ $\frac{1}{2}$ 1 $\frac{1}{2}$

$f''(x)=6x-6$ , $f''(x)=0 \Rightarrow 6x-6=0 \Rightarrow x=\frac{6}{6}=1$ $\frac{1}{2}$

إذا كان الجدول كامل يكفي .

إذن ، نقطة الانقلاب هي $(1,1)$. 1

**d)** منحنى الدالة مقعرًا إلى أسفل في الفترة $(-\infty,1)$ 1 ، ومقعرًا إلى أعلى $(1,\infty)$ 1 .

ولتمثيل منحنى الدالة بيانيًا يمكن إيجاد نقاط مساعدة كما في الجدول أدناه .

| $x$ | -1 | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | -1 | 3 | 1 | -1 | 3 |

يتبع

**السؤال الخامس –** 15

**1)** مخروط دائري قائم محيط قاعدته مضافًا إليه ضعف ارتفاعه يساوي 66 cm . أوجد كلٍ من طول نصف قطر قاعدته ، وارتفاعه عندما يكون حجمه أكبر ما يمكن . علمًا بأن حجم المخروط هو: 8

$$\left(V=\frac{1}{3}\pi r^2 h\ ,\ \pi=\frac{22}{7}\right).$$

**الحل**

بما أن قاعدة المخروط على شكل دائرة . إذن ، محيط القاعدة هو: $\frac{1}{2}$ 1

$$\therefore C=2\pi r \Rightarrow 2\pi r+2h=66 \Rightarrow \pi r+h=33 \Rightarrow h=33-\pi r \ \tfrac{1}{2}$$

$$\because V(r)=\frac{1}{3}\pi r^2 h=\frac{1}{3}\pi r^2(33-\pi r)=11\pi r^2-\frac{1}{3}\pi^2 r^3 \ 1$$

$$\therefore \frac{dV}{dr}=22\pi r-\pi^2 r^2=0 \ \tfrac{1}{2} \Rightarrow \pi r(22-\pi r)=0 \ 1$$

$$\pi r=0 \Rightarrow r=0 \quad (\text{مرفوض}) \ \tfrac{1}{2}$$

$\pi = 3.14$ ح ش

$$\text{or } 22-\pi r=0 \Rightarrow r=\frac{22}{\pi}=7\text{ cm} \ \tfrac{1}{2},\ \pi=\frac{22}{7}$$

$$\therefore h=33-\pi r=33-\left(\frac{22}{7}\right)(7)=33-22=11\text{ cm} \ \tfrac{1}{2}$$

$$\frac{d^2V}{dr^2}=22\pi-2\pi^2 r<0 \ 1$$

إذن، حجم المخروط يكون أكبر ما يمكن (قيمة عظمى) عندما يكون طول نصف قطر قاعدته 7 cm ، وارتفاعه 11 cm ، ويكون حجم المخروط القائم عندئذ:

$$V=\frac{1}{3}\pi(7)^2(11)\approx 564.7\text{ cm}^3$$

---

**2)** يتحرك جسيم في خط مستقيم مبتدئًا من نقطة ثابتة O ، إذا كانت العلاقة بين تسارعه $a$ بالمتر لكل ثانية مربعة ، والزمن $t$ بالثواني هي $a=\sec^2 t$ ، وكانت سرعته الابتدائية 9 m \ sec ، فأوجد سرعة الجسيم بعد مضي $\frac{\pi}{4}$ sec من بدء الحركة . 7

**الحل**

$$v=\int a\,dt=\int \sec^2 t\,dt=\tan t+C \ \tfrac{1}{2}\ \tfrac{1}{2}\ 1$$

بما أن سرعة الجسيم الابتدائية هي 9 m \ sec . إذن ، $t=0$ sec: $\frac{1}{2}$

$$v=\tan t+C$$

$$\tfrac{1}{2}\ 9=\tan 0+C$$

$$\tfrac{1}{2}\ 9=0+C \Rightarrow C=9 \ \tfrac{1}{2}$$

$$\therefore v=\tan t+9 \ \tfrac{1}{2}$$

إذن، سرعة الجسيم بعد مضي $\frac{\pi}{4}$ sec من بدء الحركة :

$$v_{t=\frac{\pi}{4}}=\tan\frac{\pi}{4}+9=1+9=10 \ \tfrac{1}{2}\ \tfrac{1}{2}\ \tfrac{1}{2}$$

إذن سرعة الجسيم بعد مضي $\frac{\pi}{4}$ sec من بدء الحركة هي 10 m \ sec .

يتبع

18

**السؤال السادس –**

**1)** أوجد $\int \sqrt{4\csc^6 x - 4\csc^4 x}\, dx$ . الحل (1)

5

$$\int \sqrt{4\csc^6 x - 4\csc^4 x}\, dx = \int \sqrt{4\csc^4 x\,(\csc^2 x - 1)}\, dx \quad (1)$$

$$(1) = \int \sqrt{4\csc^4 x\,(\cot^2 x)}\, dx = \int 2\csc^2 x \cot x\, dx \Longrightarrow$$

$$(1) = -2\left(\frac{\cot^2 x}{2}\right) + C = -\cot^2 x + C \quad \left(\tfrac{1}{2}\right)\left(\tfrac{1}{2}\right)$$

حل آخر

$$\int 2\csc^2 x \cot x\, dx$$

$$= \int 2\csc x \csc x \cot x\, dx \quad (1)$$

$$= -2\left(\frac{\csc^2 x}{2}\right) + C = -\csc^2 x + C \quad \left(\tfrac{1}{2}\right)\left(\tfrac{1}{2}\right)$$

---

**2)** احسب من د ون استعمال الآلة الحاسبة قيمة $\int_0^3 |4-2x|\, dx$ .

6

الحل

$$\because\ |4-2x| = \begin{cases} 4-2x & , \ x \le 2 \ \left(\tfrac{1}{2}\right) \\ 2x-4 & , \ x > 2 \ \left(\tfrac{1}{2}\right) \end{cases}$$

$$\therefore \int_0^3 |4-2x|\, dx = \int_0^2 (4-2x)\, dx + \int_2^3 (2x-4)\, dx \quad \left(\tfrac{1}{2}\right)\left(\tfrac{1}{2}\right)\left(\tfrac{1}{2}\right)\left(\tfrac{1}{2}\right)$$

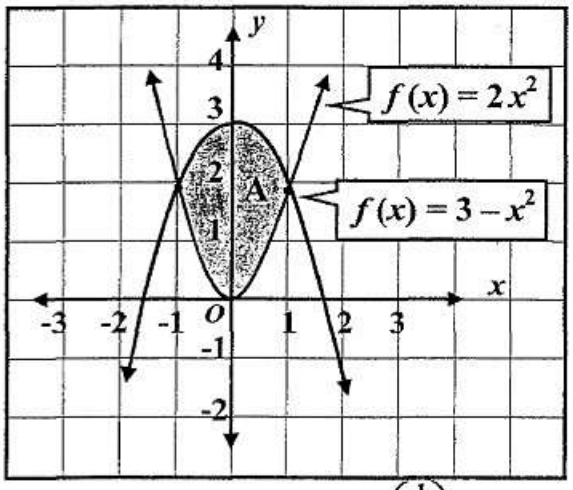
$$= \left[4x - x^2\right]_0^2 + \left[x^2 - 4x\right]_2^3 \quad \left(\tfrac{1}{2}\right)\left(\tfrac{1}{2}\right)$$

$$= (8-4) - (0-0) + (9-12) - (4-8) = 5 \quad \left(\tfrac{1}{2}\right)\left(\tfrac{1}{2}\right)$$

---

7

**3)** أعتمد الشكل المجاور؛ لإيجاد مساحة المنطقة A المحصورة بين منحنيي الدالتين .




الحل

من الشكل المجاور نلاحظ أن نقاط تقاطع المنحنيي هما :

(1) $(-1, 2)$ ، $(1, 2)$ .

$$\because\ 2x^2 \le 3 - x^2 \quad \forall\ x \in [-1, 1]$$

$$\therefore A = \left| \int_{-1}^{1} \left((2x^2) - (3 - x^2)\right) dx \right| = \left| \int_{-1}^{1} (2x^2 - 3 + x^2)\, dx \right| \quad (1)\left(\tfrac{1}{2}\right)\left(\tfrac{1}{2}\right)$$

$$= \left| \int_{-1}^{1} (3x^2 - 3)\, dx \right| = \left| \left[x^3 - 3x\right]_{-1}^{1} \right| \quad \left(\tfrac{1}{2}\right)\left(\tfrac{1}{2}\right)\left(\tfrac{1}{2}\right)\left(\tfrac{1}{2}\right)$$

$$= \left| (1^3 - 3(1)) - ((-1)^3 - 3(-1)) \right| = \left| -2 - 2 \right| = |-4| = 4 \quad \left(\tfrac{1}{2}\right)\left(\tfrac{1}{2}\right)\left(\tfrac{1}{2}\right)$$

إذن ، مساحة المنطقة المطلوبة هي 4 وحدة مربعة.

يتبع

**السؤال السابع –**

احسب من د ون استعمال الآلة الحاسبة قيمة $\int_0^{\frac{2}{3}} \sqrt{16-9x^2}\, dx$ .

**الحل**

إذن دالة التعويض هي : $\because f(x)=\sqrt{16-9x^2}$

$$x = g(\theta) = \sqrt{\frac{a}{b}}\sin\theta = \sqrt{\frac{16}{9}}\sin\theta = \frac{4}{3}\sin\theta \quad \Rightarrow g'(\theta) = \frac{4}{3}\cos\theta \quad (1)$$

نوجد حدود التكامل :

$$x=0 \quad \Rightarrow 0=\frac{4}{3}\sin\theta \quad \Rightarrow \theta = 0$$

$$x=\frac{2}{3} \quad \Rightarrow \frac{2}{3}=\frac{4}{3}\sin\theta \quad \Rightarrow \sin\theta=\frac{1}{2} \quad \Rightarrow \theta=\frac{\pi}{6}$$

$$\therefore \int_0^{\frac{2}{3}}\sqrt{16-9x^2}\, dx = \int_0^{\frac{\pi}{6}} f\left(g(\theta)\right)g'(\theta)\, d\theta \quad (1)$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{6}} \sqrt{16-(9\,(\frac{4}{3}\sin\theta)^2)}\,(\frac{4}{3}\cos\theta)\, d\theta$$

$$= \frac{4}{3}\int_0^{\frac{\pi}{6}} \sqrt{16-16\sin^2\theta}\,(\cos\theta)\,d\theta$$

$$= \frac{4}{3}\int_0^{\frac{\pi}{6}} \sqrt{16\,(1-\sin^2\theta)}\,(\cos\theta)\,d\theta$$

$$= \frac{4}{3}\int_0^{\frac{\pi}{6}} (4\cos\theta)(\cos\theta)\,d\theta = \frac{16}{3}\int_0^{\frac{\pi}{6}} (\cos\theta)^2\, d\theta$$

$$= \frac{16}{3}\int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{1}{2}(1+\cos 2\theta)\,d\theta = \frac{16}{6}\int_0^{\frac{\pi}{6}} (1+\cos 2\theta)\,d\theta$$

$$= \frac{8}{3}\left[\theta+\frac{1}{2}\sin 2\theta\right]_0^{\frac{\pi}{6}} = \frac{8}{3}\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\sqrt{3}}{4}\right)-(0-0)$$

$$= \frac{8}{3}\left(\frac{2\pi+3\sqrt{3}}{12}\right) = \frac{8\pi+12\sqrt{3}}{18} \approx 2.55$$

﴿ انتهت الإجابة ﴾

مع مراعاة الحلول الأخرى أن وجدت