نموذج اجابة

مملكة البحرين
وزارة التربية والتعليم
إدارة الامتحانات / قسم الامتحانات

امتحان نهاية الفصل الدراسي الثاني للتعليم الثانوي للعام الدراسي 2013 / 2014 م

اسم المقـــرر: الرياضيات 6
المسار: توحيد المسارات
رمز المقرر: ريض 366
الزمن: ساعتان

الدرجة النهائية
___
100

السؤال الأول
أجب عن جميع أسئلة هذا الامتحان وعددها 7

___
10

اختر رمز الإجابة الصحيحة في كلٍ مما يأتي .علمًا بأنه لا توجد سوى إجابة صحيحة واحدة لكل فقرة :

1) إذا كان ثابت التكامل $C=-5$ ، فإن $\int\left(\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}\right)dx$ يساوي :

A $x-5$
B $x-4$
C $x+5$
D $x+6$

___
2

2) إذا كانت الدالة $f(x)=\frac{\sec x\,\cos x}{2}+x$ ، فإن $f'(x)$ تساوي :

A -1
B 0
C $\frac{1}{2}$
D 1

___
2

3) إذا كان $\int_a^2 2|u|\,du=3$ ، حيث $a\geq 0$ ، فما قيمة a ؟

A 0
B 1
C 2
D 3

___
2

4) ما قياس الزاوية التي يصنعها المماس لمنحنى $f(x)=\frac{1}{2x^2}$ مع الاتجاه الموجب للمحور x عند النقطة $(1,\frac{1}{2})$ الواقعة على المنحنى ؟

A $\frac{\pi}{4}$
B $\frac{\pi}{2}$
C $\frac{3\pi}{4}$
D π

___
2

5) ما قيمة $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\csc x\,\cot x\,dx$ ؟

A $-\sqrt{2}$
B 0
C $\sqrt{2}$
D $2\sqrt{2}$

___
2

مملكة البحرين - وزارة التربية

يتبع

14

السؤال الثاني

1) إذا كانت $y=\sin 4x+\cot x$ ، $z=\sqrt[3]{y}$ ، فأوجد $\frac{dz}{dx}$ عند $x=\frac{\pi}{4}$.

الحل: بالطريقة المباشرة:

$\because z=\sqrt[3]{y}$, $y=\sin 4x+\cot x$,

$\therefore z=\sqrt[3]{\sin 4x+\cot x}=(\sin 4x+\cot x)^{\frac{1}{3}}$ (2)

$\frac{dz}{dx}=\frac{1}{3}(\sin 4x+\cot x)^{-\frac{2}{3}}(4\cos 4x-\csc^2 x)$ (3)

$\left.\frac{dz}{dx}\right|_{x=\frac{\pi}{4}}=\frac{1}{3}(\sin 4(\frac{\pi}{4})+\cot\frac{\pi}{4})^{-\frac{2}{3}}(4\cos 4(\frac{\pi}{4})-\csc^2\frac{\pi}{4})$ (1)

$=\frac{1}{3}(\sin\pi+\cot\frac{\pi}{4})^{-\frac{2}{3}}(4\cos\pi-\csc^2\frac{\pi}{4})$ (1)

$=\frac{1}{3}(0+1)^{-\frac{2}{3}}(-4-2)$ ($\frac{1}{2}$)

$=\frac{1}{3}(-6)=-2$ ($\frac{1}{2}$)

8

الحل باستعمال قاعدة التسلسل:

$\because z=\sqrt[3]{y}\Rightarrow\frac{dz}{dy}=\frac{1}{3}(y)^{-\frac{2}{3}}$, $\rightarrow(1)$ (2)

$\because y=\sin 4x+\cot x$,

$\therefore\frac{dy}{dx}=4\cos 4x-\csc^2 x\rightarrow(2)$ (1) (1)

من (1) ، (2) نجد أن:

$\frac{dz}{dx}=\frac{dz}{dy}\cdot\frac{dy}{dx}$ (1)

$=\frac{1}{3}(y)^{-\frac{2}{3}}(4\cos 4x-\csc^2 x)$ ($\frac{1}{2}$) ($\frac{1}{2}$)

$=\frac{1}{3}(\sin 4x+\cot x)^{-\frac{2}{3}}(4\cos 4x-\csc^2 x)$

$\left.\frac{dz}{dx}\right|_{\frac{\pi}{4}}=\frac{1}{3}(\sin\pi+\cot\frac{\pi}{4})^{-\frac{2}{3}}(4\cos\pi-\csc^2\frac{\pi}{4})$ (1)

$=\frac{1}{3}(0+1)^{-\frac{2}{3}}(-4-2)=\frac{1}{3}(-6)=-2$ (1)

6

2) تتحرك نقطة على المنحنى $yx=8$ ، حيث $y>0$. إذا كان مُعدل تغيّر إحداثيها x بالنسبة للزمن عند لحظة يساوي $\frac{1}{4}$ cm/sec ، ومُعدل تغيّر إحداثيها y بالنسبة للزمن عند نفس اللحظة يساوي $-\frac{1}{2}$ cm/sec ، فأوجد موضع النقطة على المنحنى عند تلك اللحظة .

الحل:

$\because\frac{dx}{dt}=\frac{1}{4}$, $\frac{dy}{dt}=-\frac{1}{2}$ ($\frac{1}{2}$) ($\frac{1}{2}$)

$\because yx=8\Longrightarrow y=\frac{8}{x}\rightarrow(1)$

$\therefore\frac{dy}{dt}x+\frac{dx}{dt}y=0$ ($\frac{1}{2}$) ($\frac{1}{2}$) ($\frac{1}{2}$) ($\frac{1}{2}$) ($\frac{1}{2}$)

($\frac{1}{2}$) $(-\frac{1}{2})x+(\frac{1}{4})y=0\longrightarrow(2)$

بالتعويض عن (1) في (2) نجد أن:

$\frac{-x}{2}+\frac{8}{4x}=0$

$\frac{2}{x}=\frac{x}{2}\Rightarrow x^2=4\Rightarrow x=\pm 2$, ($\frac{1}{2}$) ($\frac{1}{2}$)

بما أن $y>0$ ،

إذن $x=2$ ($\frac{1}{2}$)

$\therefore y=\frac{8}{2}=4$ ($\frac{1}{2}$)

أي أن موضع النقطة على المنحنى $(2,4)$

يتبع

16

السؤال الثالث

1) أطلق بالون لمراقبة الطقس ليرتفع رأسيًا ، وكانت العلاقة بين المسافة s بالأمتار التي يرتفعها البالون ، والزمن t بالثواني هي $s = 1 + \frac{t}{2} + \frac{t^2}{6}$. أوجد سرعة البالون ، وتسارعه بعد قطع 4 m من لحظة انطلاقه.

7

الحل

$$\because v = \frac{ds}{dt} = 0 + \frac{1}{2} + \frac{2t}{6} = \frac{1}{2} + \frac{t}{3}$$

لإيجاد الزمن t نعوض في s حيث $s = 4m$ نجد أن:

$$4 = 1 + \frac{t}{2} + \frac{t^2}{6} \Rightarrow \frac{3t + t^2}{6} = 4 - 1 = 3$$

$$\therefore t^2 + 3t = 18 \Rightarrow t^2 + 3t - 18 = 0$$

$$(t+6)(t-3) = 0 \Rightarrow t = -6 \text{ (مرفوض) } \text{ or } t = 3$$

$$\therefore v\Big|_{t=3sec} = \frac{1}{2} + \frac{3}{3} = \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2}\ m/sec$$

$$\therefore a = \frac{dv}{dt} = 0 + \frac{1}{3} = \frac{1}{3}\ m/sec^2$$

9

2) يراد صنع علبة معدنية بدون غطاء على شكل أسطوانة دائرية قائمة سعتها $8000\,\pi\ cm^3$. أوجد أبعاد العلبة ؛ لتكون كمية المعدن المستعمل أقل ما يمكن .

(علمًا بأن حجم الأسطوانة هو $V = \pi r^2 h$)

الحل

$$\because V = \pi r^2 h = 8000\pi \longrightarrow (1)$$

$$A = 2\pi r h + \pi r^2 \longrightarrow (2)$$

بحل المعادلة (1) وبالتعويض في معادلة (2) فينتج أن:

$$h = \frac{8000\pi}{\pi r^2} = \frac{8000}{r^2} \longrightarrow (3)$$

$$\therefore A(r) = (2\pi r)\left(\frac{8000}{r^2}\right) + \pi r^2$$

$$= \frac{16000\pi}{r} + \pi r^2 \quad , \quad r > 0$$

المساحة السطحية للأسطوانة $A(r)$ أكبر ما يمكن عندما :

$$A'(r) = 0 \Rightarrow A'(r) = \frac{-16000\pi}{r^2} + 2\pi r = 0$$

$$\Rightarrow \frac{16000\pi}{r^2} = 2\pi r \Rightarrow 2\pi r^3 = 16000\pi$$

$$\therefore r^3 = 8000 \Rightarrow r = 20\ cm$$

بالتعويض عن قيمة r في المعادلة (3) ينتج أن:

$$h = \frac{8000\pi}{\pi(400)} = 20\ cm \quad , \quad A''(r) = \frac{32000\pi}{r^3} + 2\pi$$

$$A''(20) = \frac{32000\pi}{8000} + 2\pi = 4\pi + 2\pi = 6\pi > 0$$

12

4

السؤال الرابع

1) أوجد $\int \frac{1}{x^2}\sqrt{1-\frac{1}{x}}\,dx$.

الحل

$$\therefore \int \frac{1}{x^2}\left(1-\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{2}} dx$$

$$= \frac{2}{3}\left(1-\frac{1}{x}\right)^{\frac{3}{2}} + c$$

$$= \frac{2}{3}\sqrt{\left(1-\frac{1}{x}\right)^3} + c$$

8

2) إذا كان ميل المماس لمنحنى $y=f(x)$ عند أي نقطة $(x\ ,\ y)$ واقعة عليه يُعطى بالعلاقة $m=3x^2+\frac{8}{x^3}-3$ ، فأوجد معادلة هذا المنحنى علمًا بأنه يمر بالنقطة $(2\ ,-5)$.

الحل

$$\frac{dy}{dx} = m = 3x^2 + \frac{8}{x^3} - 3$$

$$\therefore y = \int \left(3x^2 + \frac{8}{x^3} - 3\right) dx = \int \left(3x^2 + 8x^{-3} - 3\right) dx$$

$$y = x^3 + \frac{8}{-2}\left(x^{-2}\right) - 3x + c = x^3 - \frac{4}{x^2} - 3x + c \rightarrow (*)$$

بالتعويض عن النقطة $(2\ ,-5)$ بالمعادلة $(*)$ نجد أن:

$$-5 = (2)^3 - \frac{4}{(2)^2} - 3(2) + c$$

$$-5 = 8 - 1 - 6 + c \implies c = -5 - 1 = -6$$

$\therefore$ معادلة المنحنى الذي يمر بالنقطة $(2\ ,-5)$ هي:

$$y = x^3 - \frac{4}{x^2} - 3x - 6$$

16

السؤال الخامس

6

1) احسب من دون استعمال الآلة الحاسبة قيمة $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cot w - \csc w}{\sin w}\, dw$.

الحل

$$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cot w - \csc w}{\sin w}\, dw$$

$$= \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \csc w(\cot w - \csc w)\, dw \quad (1)$$

$$= \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} (\cot w \csc w - \csc^2 w)\, dw \quad (\tfrac{1}{2})\ (\tfrac{1}{2})$$

$$= \left[-\csc w + \cot w\right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \quad (1)\ (1)$$

$$= \left[-\csc\tfrac{\pi}{2} + \cot\tfrac{\pi}{2}\right) - \left(-\csc\tfrac{\pi}{6} + \cot\tfrac{\pi}{6}\right)\right] \quad (\tfrac{1}{2})$$

$$= \left[(-1+0) - (-2+\sqrt{3})\right] \quad (1)$$

$$= 1 - \sqrt{3} \quad (\tfrac{1}{2})$$

حل آخر:

$$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\cot w}{\sin w} - \frac{\csc w}{\sin w}\right) dw \quad (\tfrac{1}{2})$$

$$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\cos w}{\sin^2 w} - \frac{1}{\sin^2 w}\right) dw \quad (\tfrac{1}{2})\ (\tfrac{1}{2})$$

$$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} (\cos w \sin^{-2} w - \csc^2 w)\, dw \quad (\tfrac{1}{2})$$

$$= \left[-\sin^{-1} w + \cot w\right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} = \left[\cot w - \frac{1}{\sin w}\right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \quad (1)\ (1)$$

$$= \left[\left(\cot\tfrac{\pi}{2} - \frac{1}{\sin\frac{\pi}{2}}\right) - \left(\cot\tfrac{\pi}{6} - \frac{1}{\sin\frac{\pi}{6}}\right)\right] \quad (\tfrac{1}{2})$$

$$(1) = \left[(0-1) - (\sqrt{3}-2)\right] = 1 - \sqrt{3} \quad (\tfrac{1}{2})$$

10

2) أوجد مساحة سطح المنطقة المحصورة بين المحور x ، ومنحنى $f(x) = 4x^3 - 36x$.

الحل

نوجد نقاط تقاطع منحنى $f(x)$ مع المحور x .

$$4x^3 - 36x = 0 \quad (1)$$

$$(1)\quad 4x(x^2 - 9) = 0 \Rightarrow 4x = 0 \Rightarrow x = 0$$

$$x^2 - 9 = 0 \Rightarrow x = \pm 3$$

∴ قيم x هي: $x = 3$ $(\tfrac{1}{2})$ ، أو $x = -3$ $(\tfrac{1}{2})$ ، أو $x = 0$ $(\tfrac{1}{2})$

∴ نقاط التقاطع هي $(0,0)$ ، $(3,0)$ ، $(-3,0)$.

بما أن الدالة متصلة في الفترة $[0,3]$ ، إذن الدالة f قابلة للتكامل على الفترتين $[-3,0]$ ، $[0,3]$ ، $f(x) \le 0 \ \forall x \in [-3,3]$ (1)

$$\therefore A = \left|\int_{-3}^{0} (4x^3 - 36x)\, dx\right| + \left|\int_{0}^{3} (4x^3 - 36x)\, dx\right| \quad (1)$$

$$= \left|\left[x^4 - 18x^2\right]_{-3}^{0}\right| + \left|\left[x^4 - 18x^2\right]_{0}^{3}\right| \quad (1)\ (1)$$

$$= \left|\left[0 - (-3)^4 - 18(-3)^2\right]\right| + \left|\left[(3)^4 - 18(3)^2 - 0\right]\right| \quad (\tfrac{1}{2})\ (\tfrac{1}{2})\ (\tfrac{1}{2})$$

$$= \left|0 - (81 - 162)\right| + \left|\left[81 - 162 - 0\right]\right| \quad (\tfrac{1}{2})$$

$$= |81| + |-81| = 81 + 81 = 162$$ وحدة مربعة

14

السؤال السادس

احسب من دون استعمال الآلة الحاسبة قيمة $\int_0^8 \frac{x^2}{x^2+64}\,dx$.

الحل

$$\because\ f(x) = \frac{x^2}{x^2+64}$$

∴ دالة التعويض هي :

$$x = g(\theta) = \sqrt{\frac{a}{b}}\tan\theta \quad 1$$

$$= \sqrt{\frac{64}{1}}\tan\theta = 8\tan\theta \quad \tfrac{1}{2}$$

$$g'(\theta) = 8\sec^2\theta \quad 1$$

ولإيجاد حدود التكامل لـ $g(\theta)$ نتبع ما يأتي :

$$x = 0 \Rightarrow 8\tan\theta = 0 \Rightarrow \tan\theta = 0 \Rightarrow \theta = 0 \quad \tfrac{1}{2}\ \tfrac{1}{2}$$

$$x = 8 \Rightarrow 8\tan\theta = 8 \Rightarrow \tan\theta = 1 \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{4} \quad \tfrac{1}{2}\ \tfrac{1}{2}$$

ومن الواضح أنه $\forall\ \theta \in [0, \frac{\pi}{4}]$ تكون $x \in [0, 8]$.

∴ شروط نظرية التعويض متوفرة

$$\therefore \int_0^8 f(x)\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} f(g(\theta))\,g'(\theta)\,d\theta \quad 1$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{64\tan^2\theta}{64\tan^2\theta + 64}(8\sec^2\theta)\,d\theta \quad 1$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cancel{64}\tan^2\theta}{\cancel{64}(\tan^2\theta + 1)}(8\sec^2\theta)\,d\theta \quad \tfrac{1}{2}$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\tan^2\theta}{\cancel{\sec^2\theta}}(8\cancel{\sec^2\theta})\,d\theta \quad 1$$

$$= 8\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^2\theta\,d\theta = 8\int_0^{\frac{\pi}{4}} (\sec^2\theta - 1)\,d\theta \quad \tfrac{1}{2}\ 1$$

$$= 8\left[\tan\theta - \theta\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = 8\left[\left(\tan\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4}\right) - (\tan 0 - 0)\right] \quad 1\ 1\ \tfrac{1}{2}\ \tfrac{1}{2}$$

$$= 8\left[\left(1 - \frac{\pi}{4}\right) - 0\right] = 8\left(1 - \frac{\pi}{4}\right) = 8 - 2\pi \quad \tfrac{1}{2}\ \tfrac{1}{2}\ \tfrac{1}{2}$$

يتبع

18

السؤال السابع

إذا كانت الدالة $f(x)=x^3-3x^2+2$:

1) حدّد كل مما يأتي موضحًا خطوات الحل :

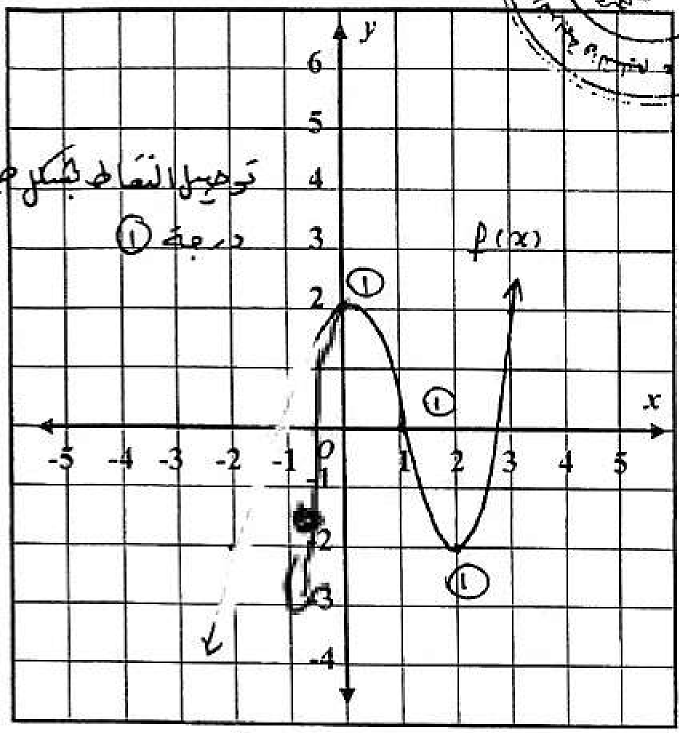
a) فترات التزايد والتناقص .

b) النقاط العظمى والصغرى المحلية (إن وجدت) .

c) نقط الانقلاب (إن وجدت) .

d) الفترة التي يكون فيها منحنى الدالة مقعرًا إلى أعلى، والفترة التي يكون فيها مقعرًا إلى أسفل .

2) مثّل منحنى الدالة بيانيًّا بصورة تقريبية .



توصيل النقاط بشكل صحيح درجة (1)

الحل

a) بما أن الدالة f كثيرة حدود، إذن فهي متصلة وقابلة للاشتقاق، $(\frac{1}{2})$ $(\frac{1}{2})$

$f'(x)=3x^2-6x+0$ $(\frac{1}{2})$, $f'(x)=0$ (1)

$\therefore 3x^2-6x=0 \Rightarrow 3x(x-2)=0 \Rightarrow x=0 \ , \ x=2$ (1) $(\frac{1}{2})$ $(\frac{1}{2})$

$\because f(0)=2 \ , \ f(2)=8-12+2=-2$

إذن $(2,-2)$ ، $(0,2)$ نقطتا مرشحتان، ومن دراسة $f'(x)$ حول كل من $x=2$ ، $x=0$

كما في الجدول أدناه نجد أن الدالة تزايدية في الفترة $(-\infty,0] \cup [2,\infty)$ أو $\mathbb{R}\setminus(0,2)$ (1)

والدالة متناقصة في الفترة $[0,2]$. (1)

b) القيمة العظمى المحلية هي 2 عندما $x=0$ (1) ، والقيمة الصغرى المحلية هي ( ) عندما $x=2$ (1)

c) لتحديد نقاط الانقلاب نوجد المشتقة الثانية للدالة :

$f''(x)=6x-6$ (1) , $f''(x)=0$ (1) $\Rightarrow 6x-6=0 \Rightarrow x=1$ $(\frac{1}{2})$

إذن نقطة الانقلاب هي $(1,0)$ (1)

d) منحنى الدالة مقعر إلى أسفل في الفترة $(-\infty,1)$ (1) ، ومقعر إلى أعلى $(1,\infty)$ (1) .

ولتمثيل منحنى الدالة بيانيًّا علينا إيجاد نقاط مساعدة كما في الجدول المجاور

x	-1	0	1	2	3
y	-2	2	0	-2	2

قيم x	$-\infty$	0		1		2	∞
إشارة $f'(x)$	+		−		−		+
اطراد $f(x)$	↗		↘		↘		↗

﴿انتهت الأسئلة﴾

نرجو للجميع النجاح والتوفيق

رئيسة اللجنة الفنية