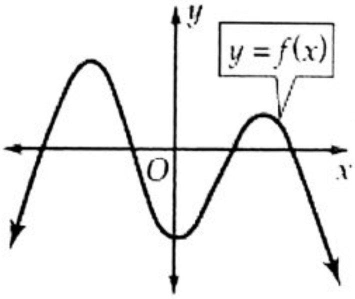
النشاط السابع و العشرون الاتصال وسلوك طرفي الدالة والنهايات

نشاط (27) : الاتصال وسلوك طرفي الدالة والنهايات - 1

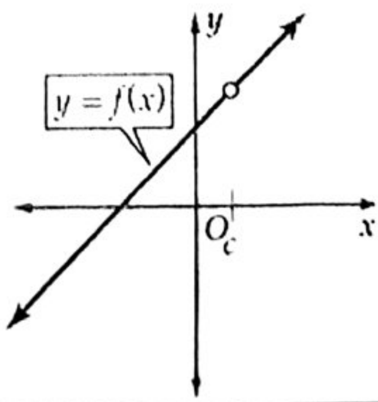
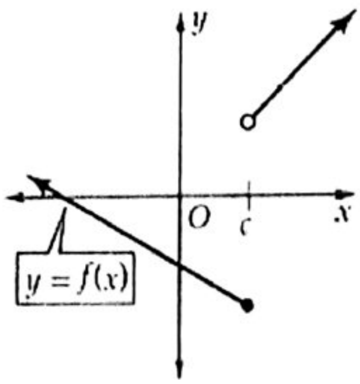
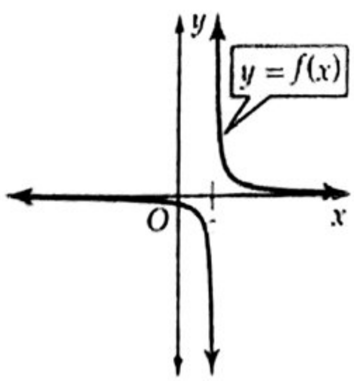
الأهداف :

1- تعريف إتصال الدالة من تمثيلها البياني ، 2- بيان أنواع الانفصال ، 3- تحديد نوع الانفصال لدالة من الرسم

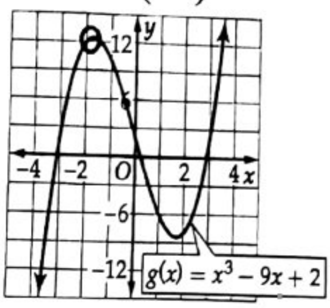
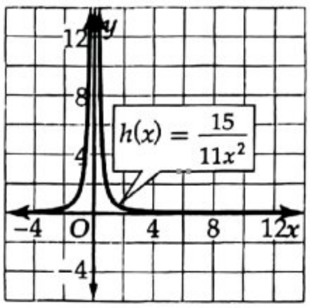
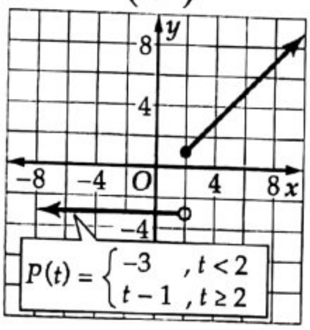
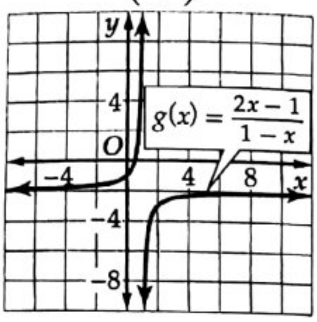
4- بيان شروط إتصال دالة عند نقطة ، 5- التحقق من إتصال دالة عند نقطة جبرياً

الاتصال	**مفهوم الاتصال من الرسم**	تكون الدالة متصلة اذا لم يكن في تمثيلها البياني أي انقطاع او قفزة	
	اختبار اتصال دالة عند نقطة جبرياً	تكون الدالة $f(x)$ متصلة عند $x = c$ إذا تحقق كل مما يلي : **أولاً :** الدالة معرفة عند $x = c$ أي $f(c) \in \Re$ **ثانياً :** للدالة نهاية عند $x = c$ أي $\lim_{x \to c^+} f(x) = \lim_{x \to c^-} f(x) \in \Re$ **ثالثاً:** $\lim_{x \to c} f(x) = f(c)$	

أنواع الانفصال

النوع	أولاً : الإنفصال النقطي أو (القابل للإزالة)	ثانياً : الإنفصال القفزي	ثالثاً : الإنفصال اللانهائي
مثال			
	النهاية موجودة عند النقطة لكن إما الدالة غير معرفة عند $x = c$ أو : $\lim_{x \to c} f(x) \neq f(c)$	النهايتين من اليمين و اليسار **موجودتين** لكن **غير متساويتين**	النهاية غير موجودة عند النقطة $\lim_{x \to c} f(x) = \pm\infty$
هل هي قابلة للإزالة	نعم	لا	لا

***تمارين (1) :** للدوال الموضح تمثيلاتها البيانية وضح نوع الإنفصال عند النقط المبينة :

(1)	(2)	(3)	(4)
			
$x = -2$	$x = 0$	$x = 2$	$x = 1$
إنفصال نقطي (قابل للإزالة)	إنفصال لانهائي	إنفصال قفزي	إنفصال لانهائي
$g(-2)$ غير معرف $\lim_{x\to-2^+} g(x) = 12$ $\lim_{x\to-2^-} g(x) = 12$ **وبالتالي :** $\lim_{x\to-2} g(x) = 12$	$h(0)$ غير معرف $\lim_{x\to0^+} h(x) = \infty$ $\lim_{x\to0^-} h(x) = \infty$ **وبالتالي :** $\lim_{x\to0} h(x) = \infty$ غير موجودة	$p(2) = 1$ $\lim_{x\to2^+} p(x) = 1$ $\lim_{x\to2^-} p(x) = -3$ $\neq$ **وبالتالي :** $\lim_{x\to2} p(x)$ غير موجودة	$g(1)$ غير معرف $\lim_{x\to1^+} g(x) = -\infty$ $\lim_{x\to1^-} g(x) = \infty$ **وبالتالي :** $\lim_{x\to1} g(x)$ غير موجودة

***تمارين (2) :** إبحث في إتصال الدالة $f(x)$ عند النقط المبينة بإستعمال إختبار الإتصال :

(1) $f(x) = x^2 + 5x - 2 \ , \ x = 1$

الحل

1) $f(1) = (1)^2 + 5(1) - 2 = 4$

2) $\lim_{x\to1} f(x) = (1)^2 + 5(1) - 2 = 4$

3) $\lim_{x\to1} f(x) = f(1)$

من 1، 2، 3 الدالة متصلة عند $x = 1$

(2) $f(x) = \frac{2x+10}{x-1} \ , \ x = -2$

الحل

1) $f(-2) = \frac{2(-2)+10}{-2-1} = \frac{6}{-3} = -2$

2) $\lim_{x\to1} f(x) = \frac{2(-2)+10}{-2-1} = -2$

3) $\lim_{x\to-2} f(x) = f(-2)$

من 1، 2، 3 الدالة متصلة عندما $x = -2$

(3) $f(x) = \begin{cases} x^2 - 5 & , x > 3 \\ \sqrt{6x-2} & , x \leq 3 \end{cases} \ , \ x = 3$

الحل ،

1) $f(3) = \sqrt{6(3)-2} = \sqrt{16} = 4$

2) $\lim_{x\to3^+} f(x) = \lim_{x\to3^+} (x^2-5) = 9-5 = 4$

$\lim_{x\to3^-} f(x) = \lim_{x\to3^-} (\sqrt{6x-2} = \sqrt{6(3)-2} = 4$

$\therefore \lim_{x\to3} f(x) = 4$

3) $\lim_{x\to3} f(x) = f(3)$

من 1، 2، 3 الدالة متصلة عندما $x = 3$

نشاط (28) : الاتصال وسلوك طرفي الدالة والنهايات - 2

الأهداف :
1- استرجاع المعلومات المتعلقة باختبار الاتصال عند نقطة جبرياً ، 2- تحديد نوع الإنفصال لدالة عند نقطة جبرياً

***تمارين :**
إبحث في إتصال الدالة $f(x)$ عند النقط المبينة بإستعمال إختبار الإتصال وإذا كانت عكس ذلك بين نوع نقط الانفصال :

$$(1)\ f(x)=\frac{x^2-16}{4-x}\ ,\ x=4$$

الحل:

1) $f(4)=\dfrac{(4)^2-16}{4-4}=\dfrac{0}{0}$ غير معرفة

∴ الدالة غير معرفة عندما $x=4$

2) $\lim\limits_{x\to4} f(x)=\lim\limits_{x\to4}\dfrac{x^2-16}{x-4}$

$=\lim\limits_{x\to4}\dfrac{\cancel{(x-4)}(x+4)}{\cancel{x-4}}=4+4=8$

الدالة ليست متصلة عندما $x=4$

نوع الانفصال : نقطي

لأنه النهاية موجودة عندما $x\to4$ لكنه $f(4)$ غير معرفة

$$(2)\ f(x)=\frac{x^2-x-6}{x+2}\ ,\ x=-2$$

الحل:

1) $f(-2)=\dfrac{(-2)^2-(-2)-6}{-2+2}=\dfrac{0}{0}$

الدالة غير معرفة عندما $x=-2$

2) $\lim\limits_{x\to-2} f(x)=\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{\cancel{(x+2)}(x-3)}{\cancel{x+2}}$

$=-2-3=-5$

∴ الدالة ليست متصلة عندما $x=-2$

نوع الانفصال : نقطي

لأنه النهاية موجودة عندما $x\to-2$ لكنه $f(-2)$ غير معرف

$$(3)\ f(x)=\begin{cases}x+5 & ,x\le2\\ 4-2x & ,x>2\end{cases}\ ,\ x=2$$

الحل

1) $f(2)=2+5=7$

2) $\lim\limits_{x\to2^+} f(x)=\lim\limits_{x\to2^+}(4-2x)=4-2(2)=0$

$\lim\limits_{x\to2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to2^-}(x+5)=2+5=7 \Rightarrow \lim\limits_{x\to2} f(x)$ غير موجودة

∴ الدالة ليست متصلة عندما $x=2$

نوع الانفصال : قفزي لأنه النهاية اليمنى $\neq$ النهاية اليسرى

(4) $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x-4} & , x < 4 \\ 2-x & , x \geq 4 \end{cases} \quad , x = 4$

الحل:

1) $f(4) = 2-4 = -2$

2) $\lim_{x \to 4^+} f(x) = \lim_{x \to 4^+} (2-x) = 2-4 = -2$

$\lim_{x \to 4^-} f(x) = \lim_{x \to 4^-} \frac{1}{x-4} = \frac{1}{0}$ غير معرف $= \infty$ أو $-\infty$

∴ النهاية غير موجودة

∴ الدالة ليست متصلة عندما $x = 4$

نوع الانفصال: لانهائي

(5) $f(x) = \frac{1}{x^2}, x = 0$

الحل:

1) $f(0) = \frac{1}{0}$ غير معرف

2) $\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} \frac{1}{x^2} = \frac{1}{0} = \infty$

غير معرف ⟸ النهاية غير موجودة

∴ الدالة ليست متصلة عندما $x = 0$

نوع الانفصال: لانهائي

(6) $f(x) = \frac{x-4}{x^2-5x+4}$

A) $x = 1$

الحل:

1) $f(1) = \frac{1-4}{1-5+4} = \frac{-3}{0}$ غير معرف

2) $\lim_{x \to 1} f(x) = \lim_{x \to 1} \frac{x-4}{x^2-5x+4}$

$= \frac{1-4}{1-5+4} = \frac{-3}{0} = \infty$ أو $-\infty$

غير معرف

∴ النهاية غير موجودة

∴ الدالة ليست متصلة عندما $x = 1$

نوع الانفصال: لانهائي.

B) $x = 4$

الحل:

1) $f(4) = \frac{4-4}{16-20+4} = \frac{0}{0}$

∴ الدالة ليست معرفة عندما $x = 4$

2) $\lim_{x \to 4} f(x) = \lim_{x \to 4} \frac{x-4}{x^2-5x+4}$

$= \lim_{x \to 4} \frac{\cancel{x-4}}{(\cancel{x-4})(x-1)}$

$= \frac{1}{4-1} = \frac{1}{3}$

∴ الدالة ليست متصلة عندما $x = 4$

نوع الانفصال: نقطي

لأنه النهاية موجودة عندما 4 لكن $f(4)$ غير معرف

نشاط (29) : الإتصال وسلوك طرفي الدالة

الأهداف :

1- تقريب أصفار الدالة عددياً بإستخدام نظرية القيمة المتوسطة ، 2- وصف سلوك طرفي الدالة من تمثيلها البياني .

◄ تقريب أصفار الدالة بإستخدام نظرية القيمة المتوسطة :

نظرية القيمة المتوسطة : أنظر الكتاب صـ 71 .

تمارين (1) :

حدد الأعداد الصحيحة المتتالية التي تنحصر بينها الأصفار الحقيقية للدالة $f(x)$ في الفترة المعطاة :

$(1) f(x) = x^3 - x^2 - 3 \quad , [-2,4]$

الحل :

x	-2	-1	0	~~1~~	~~2~~	3	4
$f(x)$	-15	-5	-3	-3	1	15	45

يوجد صفر للدالة في الفترة (1,2)

$(2) f(x) = x^3 + 5x^2 - 4 \quad , [-6,2]$

الحل :

x	-6	~~-5~~	~~-4~~	-3	-2	~~-1~~	~~0~~	~~1~~	2
$f(x)$	-40	-4	12	14	8	~~0~~	-4	2	24

صفر للدالة $x = -1$

يوجد صفر للدالة في الفترة (-5,-4) ، (0,1)

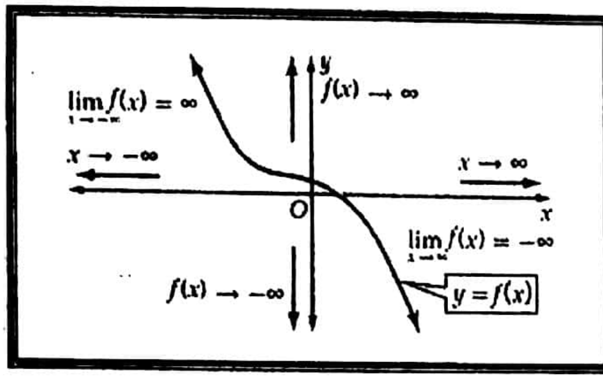
$(3) f(x) = \dfrac{x^3 + 4}{x - 5} \quad , [-2,2]$

الحل :

x	~~-2~~	~~-1~~	0	1	2		
$f(x)$	0.5714	-0.5	-0.8	-1.25	-4		

يوجد صفر للدالة في الفترة (-2,-1)

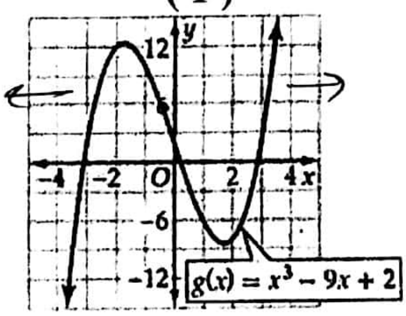
ملاحظة	عدم تغير إشارات قيم الدالة لا تعني بالضرورة عدم وجود أصفار ويكون التمثيل البياني الطريقة الأفضل للتحقق .	انظر مثال (4) صـ 71

سلوك طرفي التمثيل البياني	هو وصف قيم الدالة عندما تزاد قيم x أو تنقص بلا حدود أي عندما تقترب من $-\infty, \infty$	

تمارين (2) :

استعمل التمثيل البياني لوصف سلوك طرفي الدوال التالية :

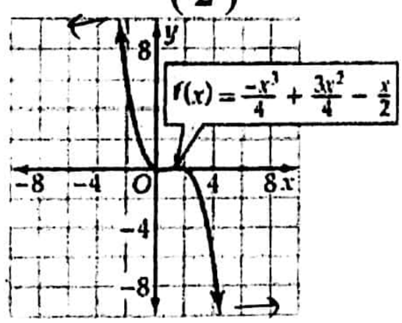
(1)



$\lim_{x\to\infty} g(x) = \infty$

$\lim_{x\to-\infty} g(x) = -\infty$

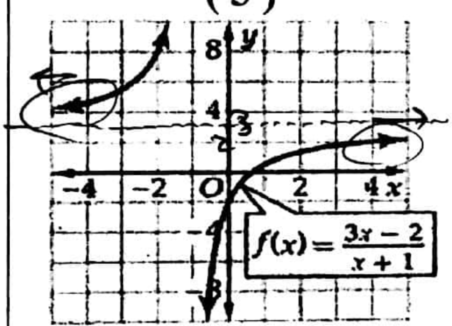
(2)



$\lim_{x\to\infty} f(x) = -\infty$

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \infty$

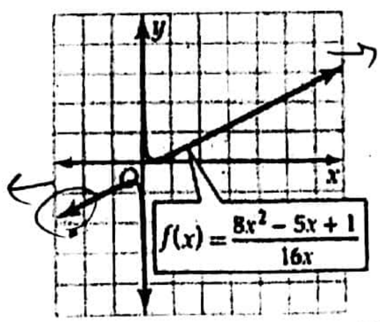
(3)



$\lim_{x\to\infty} f(x) = 3$

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = 3$

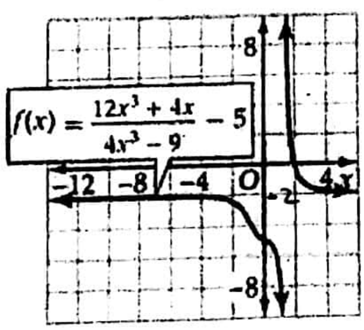
(4)



$\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$

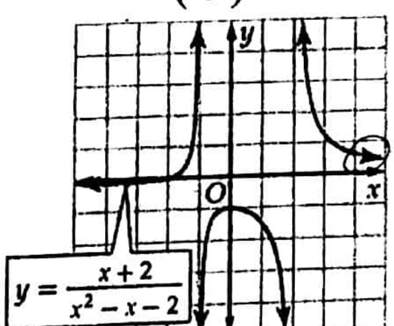
(5)



$\lim_{x\to\infty} f(x) = -2$

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -2$

(6)



$\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$

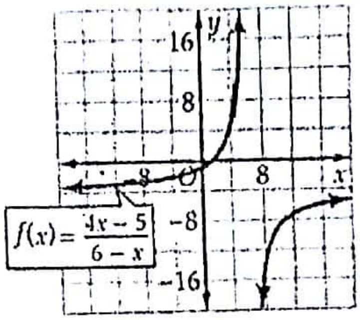
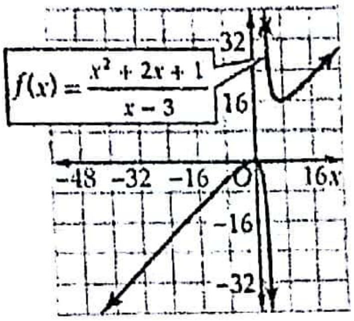
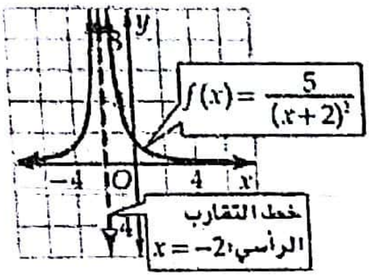
$\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$

نشاط (30) : إيجاد خطوط التقارب الأفقية والرأسية

الأهداف :

1- إيجاد المجال لدوال كسرية ، 2- إيجاد خطوط التقارب الأفقية والرأسية ان وجدت.

◄ إيجاد خطوط التقارب الرأسية والأفقية :

	درجة البسط = درجة المقام	درجة البسط > درجة المقام	درجة البسط < درجة المقام
مثال عليها			
خطوط التقارب الرأسية	$x=c$: حيث c أحد أصفار المقام $\lim_{x\to c^+} f(x)=\pm\infty$ أو $\lim_{x\to c^-} f(x)=\pm\infty$		**ملاحظة :** اذا وجد اختصار بالبسط والمقام نستبعد صفر الدالة هذا من خطوط التقارب الراسية
خطوط التقارب الأفقية	يوجد خط أفقي معادلته $y=\frac{\text{معامل أكبر اس بالبسط}}{\text{معامل أكبر اس بالمقام}}$	لا يوجد خطوط تقارب أفقية	يوجد خط تقارب أفقي معادلته $y=0$
	$\lim_{x\to\infty} f(x)=c$ أو $\lim_{x\to-\infty} f(x)=c$		

تمارين :

للدوال التالية أوجد المجال وخطوط التقارب الأفقية والراسية (إن وجدت) :

$$(1)\ f(x)=\frac{2x+2}{5x-1}$$

الحل:

المقام = صفر $\Rightarrow 5x-1=0$

$5x=1 \Rightarrow x=\frac{1}{5} \rightarrow$ خط تقارب رأسي

المجال: $R\backslash\{\frac{1}{5}\}$

∵ درجة البسط = درجة المقام

خط التقارب هو $y=\frac{2}{5}$

$$(2)\ f(x)=\frac{5x^2-x^3+1}{2x^3-8x}$$

الحل

$2x^3-8x=0$

$\Rightarrow 2x(x^2-4)=0$

$x=0$

$x^2=4 \Rightarrow x=\pm2$

خطوط التقارب الرأسية $x=0, x=2, x=-2$

المجال: $R\backslash\{0,\pm2\}$

خط التقارب هو: $y=-\frac{1}{2}$

$$(3)\ f(x)=\frac{x^2+2}{3x+6}$$

الحل:

$3x+6 \Rightarrow 3x=-6$

$x=-2$ خط التقارب الرأسي

المجال: $\mathbb{R}\setminus\{-2\}$

∵ درجة البسط > درجة المقام

لا يوجد خطوط تقارب أفقية

$$(4)\ f(x)=\frac{(5-x)(2+3x)}{x-1}$$

الحل:

$x-1=0 \Rightarrow x=1$

خط تقارب رأسي

المجال: $\mathbb{R}\setminus\{1\}$

درجة البسط > درجة المقام

لا يوجد خطوط تقارب أفقية

$$(5)\ f(x)=\frac{2x-1}{x^2+4}$$

الحل:

$x^2+4=0$

$x^2=-4$ ليس لها حل

لا توجد خطوط تقارب رأسية

المجال: $\mathbb{R}$

درجة البسط < درجة المقام

خطوط التقارب الأفقية

$y=0$

$$(6)\ f(x)=\frac{x-6}{x^2+8x+15}$$

الحل:

$x^2+8x+15=0$

$(x+5)(x+3)=0$

$x=-5 \qquad x=-3$

خطوط التقارب الرأسية

المجال: $\mathbb{R}\setminus\{-5,-3\}$

∵ درجة البسط < درجة المقام

خط التقارب الأفقي

$y=0$