درس (١): إيجاد الثوابت في موضوع الاتصال

٢٠١٧/٢/٨

مثال (١): أوجد قيمة L إذا كانت الدالة $f(x)$ متصلة عند $x=2$ حيث:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{5x-1}-\sqrt{2x+5}}{x-2} &, x\neq 2\\ L &, x=2\end{cases}$$

$\because$ الدالة متصلة عند $x=2$

$$\therefore f(2)=\lim_{x\to 2}f(x)\Rightarrow L=\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{5x-1}-\sqrt{2x+5}}{x-2}$$

(لاحظ أنّ الجذرين يكوّنان صفرًا لذلك سنضرب في المرافق للتخلّص من الجذور)

$$\therefore L=\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{5x-1}-\sqrt{2x+5}}{x-2}\cdot\frac{\sqrt{5x-1}+\sqrt{2x+5}}{\sqrt{5x-1}+\sqrt{2x+5}}$$

$$\Rightarrow L=\lim_{x\to 2}\frac{(5x-1)-(2x+5)}{(x-2)(\sqrt{5x-1}+\sqrt{2x+5})}=\lim_{x\to 2}\frac{3x-6}{(x-2)(\sqrt{5x-1}+\sqrt{2x+5})}$$

نحن نعلم بأنّ $(x-2)$ لا بد أن نراه في البسط لعمليّة الاختصار لذلك نبحث عن عمليّة جبريّة جيّدة للتوصل إليه، ودائمًا نبدأ بالعامل المشترك الأكبر...

$$\therefore L=\lim_{x\to 2}\frac{3\cancel{(x-2)}}{\cancel{(x-2)}(\sqrt{5x-1}+\sqrt{2x+5})}=\lim_{x\to 2}\frac{3}{(\sqrt{5x-1}+\sqrt{2x+5})}=\frac{3}{3+3}=\frac{1}{2}$$

مثال (٢): إذا كانت الدالة $h(x)$ متصلة في $\Re$ فأوجد قيمة الثابتين a، b الحقيقيّة، حيث:

$$h(x)=\begin{cases}\dfrac{|x-2|}{x-2} &, x<2\\ ax+b &, 2\leq x\leq 5\\ \dfrac{x^3-5x^2+x-5}{x-5} &, x>5\end{cases}$$

الحل:

وجود المطلق في الدالة، يجعلنا نعيد تعريفه: $|x-2|=\begin{cases}x-2 &, x\geq 2\\ -(x-2) &, x<2\end{cases}$

$$\therefore h(x)=\begin{cases}\dfrac{-(x-2)}{x-2} &, x<2\\ ax+b &, 2\leq x\leq 5\\ \dfrac{x^3-5x^2+x-5}{x-5} &, x>5\end{cases}$$

نلاحظ أنّ النقاط التي يتغيّر عندها تعريف الدالة هي $x=2$، $x=5$

$\because$ الدالة متصلة في $\Re$

$\therefore$ الدالة متصلة عند $x=2$، $x=5$، أي أنّ:

$$h(2)=\lim_{x\to 2^-}h(x)\Rightarrow 2a+b=\lim_{x\to 2^-}\frac{-(x-2)}{x-2}=-1$$

$$\therefore 2a+b=-1 \quad \text{..........} \ (١)$$

$$h(5)=\lim_{x\to 5^+}h(x)\Rightarrow 5a+b=\lim_{x\to 5^+}\frac{x^3-5x^2+x-5}{x-5}=\lim_{x\to 5^+}\frac{x^2(x-5)+(x-5)}{x-5}$$

$$5a+b=\lim_{x\to 5^+}\frac{\cancel{(x-5)}(x^2+1)}{\cancel{x-5}}=\lim_{x\to 5^+}(x^2+1)=26$$

$$\therefore 5a+b=26 \quad \text{..........} \ (٢)$$

بطرح (١) من (٢):

$$a=9\Leftarrow 3a=27$$

بالتعويض في (١):

$$b=-19\Leftarrow 2(9)+b=-1$$

ملاحظة:

في مثل هذه المسائل هناك متساويات كثيرة، $f(a)=\lim_{x\to a}f(x)=\lim_{x\to a^-}f(x)=\lim_{x\to a^+}f(x)$ مثنى مثنى، فعلينا أن نختار منها المناسب للحل، فإذا رجعنا لمثال (٢) وجدنا أنّ دالة الغاية اليسرى عند $x=2$ هي نفسها دالة التعويض عند $x=2$، لذلك فهي ستمثّل شيئًا واحدًا لذلك لن نستطيع الاستفادة منه في الحل، وبشكل عام علينا أن نختار دالّتين مختلفتين للحصول على القيمة المجهولة.

تدريب: حل تمرين (٣) ص ١٥ في ملزمة الاتصال.

درس (٩): التطبيقات الهندسية

٢٠١٧/٣/١٩

لمدلول الهندسي للمستقة الأولى: المشتقة الأولى تمثّل ميل المماس للمنحنى عند النقطة (x_0, y_0) معيّنة، أي أنّ: $m=\frac{dy}{dx}\Big|_{(x_0,y_0)}$

مثال (١): أوجد ميل المماس للمنحنى: $xy^3=2, x=2$

نشتق المعادلة بالنسبة لـ x: $x.3y^2\frac{dy}{dx}+y^3=0 \Rightarrow 3xy^2\frac{dy}{dx}+y^3=0$

ولكن عندما $x=2$ فإنّه بالرجوع للعلاقة الأساسية: $2y^3=2 \Rightarrow y^3=1 \Rightarrow y=1$

$$\therefore 3(2)(1)^2\frac{dy}{dx}+(1)^3=0 \Rightarrow \frac{dy}{dx}=-\frac{1}{6}$$

مثال (٢): تمرين ١٩ ص ٥٥.

باشتقاق المنحنى بالنسبة لـ x: $\frac{dy}{dx}=3ax^2+2bx$ ، وميل المستقيم $m=-\frac{3}{1}=-3$

وطالما كان المستقيم يمس المنحنى عند النقطة $(1,-2)$ فإنّ لهما الميل نفسه:

$$m=\frac{dy}{dx}\Big|_{(1,-2)}=3a(1)^2+2b(1)\Rightarrow 3a+2b=-3 \text{........(١)}$$

وحيث أنّ نقطة التماس هي $(1,-2)$ إذن تحقق معادلة المنحنى أيضًا:

$$-2=a(1)^3+b(1)^2\Rightarrow a+b=-2 \text{........(٢)}$$

نحل المعادلين (١) و(٢) وذلك بضرب (٢) في العدد 2 ثم الطرح: $a=1$

وبالتعويض عن قيمة a في (٢) ينتج: $1+b=-2\Rightarrow b=-3$

ولإيجاد معادلة العمودي نحتاج إلى ميله: $m_1=\frac{1}{3}$ والنقطة هي نفسها $(1,-2)$

إذن معادلة العمودي: $y+2=\frac{1}{3}(x-1)\Rightarrow 3y+6=x-1\Rightarrow x-3y-7=0$

مثال (٣): انظر الكتاب مثال (٤): ص٤٨.

مثال (٤): انظر الكتاب: مثال (٥): ص ٤٩.

درس (٢): تركيب دالتين

٢٠١٧/٢/٢٢

تدريب (١): إذا كانت $f(x)=4x^2-2$ ، $g(x)=\sqrt{x}$ فأوجد ما يأتي:

$g(r)=$ .... $f(1)=$ ....

$f(x+h)=$ ....

$f(g(x))=$ ....

الدالة $f(g(x))$ تسمّى بـــ : **دالة الدالة** ; أو : **الدالة المركّبة** ; ويرمز لها بالرمز ($\circ$):

أي أنّ: $\boxed{(f_1\circ f_2)(x)=f_1(f_2(x))}$

تدريب (٢):

(١) *بالرجوع لتدريب (١)* أوجد: $(g\circ f)(x)$.

$(g\circ f)(x)=$ .... = ...

(٢) قارن بين $(g\circ f)(x)$ ، $(f\circ g)(x)$ ماذا تستنتج؟

....

(٣) *بالاستعانة بالفرع (١)* أوجد قيمة $(g\circ f)(0)$.

$(g\circ f)(0)=$ ....

(٤) اذكر مجال $g(x)$ ، $g(f(x))$ وقارن بينهما.

مجال $g(x)$: ....

مجال $g(f(x))$: ....

من التدريب (٢) نستنتج التالي:

شرط تركيب دالتين

....

تدريب (٣): أوجد $(f\circ g)'(4)$

درس (٤): الاشتقاق الضمني

٢٠١٧/٣/١

نقول أنّ الدالة **دالة صريحة** (Explicit function) حيث يمكن كتابتها بالصورة $y=f(x)$ مثل: $y=x^2-3$ ، أمّا إذا كانت خليطًا من x وy فإنها تدعى **بالدالة الضمنية** (Implicit function)، وتكون صورتها $f(x,y)=0$ مثل: $x^2+y-1=0$ ، $x^2y-x^{\frac{1}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=0$. واشتقاق هذه الدوال (الضمنية) يسمى **بالاشتقاق الضمني** (Implicit differentiation)؛ و يمكن أن نجمله بكل بساطة فيما يلي:

إذا اشتققنا المعادلة بالنسبة لـــ x وكان المتغير A موجودًا في المعادلة، فإنّنا نوجد مشتقّته وكأنه دالة في x ثمّ نتبع المشتقة $\frac{dA}{dx}$ في كل مرّة.

مثال (١): أوجد $\frac{dy}{dx}$ في المعادلة: $x^2+y^2=10$ ثم أوجد قيمتها عند $(1,3)$

نظرًا لوجود المقام في المشتقة (dx) فإنّنا سوف نشتق المعادلة بالنسبة لـــ x :

$$2x+2y\frac{dy}{dx}=0\Rightarrow\frac{dy}{dx}=\frac{-2x}{2y}=-\frac{x}{y}$$

$$\therefore\left.\frac{dy}{dx}\right|_{(1,3)}=-\frac{1}{3}$$

مثال (٢): إذا كان $xy^2+x+y=13$ فأوجد y'

باشتقاق المعادلة بالنسبة لـــ x : (لاحظ أنّ x و y^2 دالتان مضروبتان في بعضهما)

$$x(2yy')+y^2(1)+1+y'=0$$

$$y'(2xy+1)=-1-y^2$$ تؤخذ كعامل مشترك

$$\therefore y'=\frac{-1-y^2}{2xy+1}$$

ملاحظة:

يمكن تلخيص ما نقوم به في هذا النوع من الاشتقاق كما يلي: (أ) تنفيذ قواعد الاشتقاق (ب) أخذ المشتقة المطلوب كعامل مشترك وإبعاد الباقي للطرف الثاني (حـــ) قسمة الطرف الثاني على القوس المضروب في المشتقة. وتوجد نظرية مساعدة (للتأكد فقط) هي:

$$f(x,y)=0\Rightarrow\frac{dy}{dx}=-\frac{\text{اشتق المعادلة باعتبار } x \text{ متغير و } y \text{ ثابت}}{\text{اشتق المعادلة باعتبار } y \text{ متغير و } x \text{ ثابت}}$$

درس (٣): قواعد الاشتقاق

٢٠١٧/٢/٢٦

نظرية (١): مشتقّة دالّة القوّة:

إذا كانت $f(x)=x^n$ فإنّ $f'(x)=nx^{n-1}$ حيث $n\in\Re$

نتيجة (١): مشتقّة الدالّة المحايدة: إذا كانت $f(x)=x$ فإنّ $f'(x)=1$

نتيجة (٢): مشتقّة الدالّة الثابتة: إذا كانت $f(x)=c$ فإنّ $f'(x)=0$ حيث $c\in\Re$

نتيجة (٣): مشتقّة حاصل ضرب دالّة القوّة في عدد ثابت: إذا كانت $f(x)=cx^n$ فإنّ $f'(x)=cnx^{n-1}$ حيث $n,c\in\Re$

ويمكن تعميم النتيجة (٣) لتكون النظرية التالية:

نظرية (٢): مشتقّة حاصل ضرب دالّة في عدد ثابت:

إذا كانت $f(x)=cg(x)$ فإنّ $f'(x)=cg'(x)$ حيث $c\in\Re$

نظرية (٣): مشتقّة جمع (أو طرح) مجموعة محدودة من الدوالّ:

إذا كان $f(x)=f_1(x)\pm f_2(x)\pm f_3(x)\pm\ldots\pm f_n(x)$ فإنّ:

$$f'(x)=f_1'(x)\pm f_2'(x)\pm f_3'(x)\pm\ldots\pm f_n'(x)$$

نظرية (٤): مشتقّة حاصل ضرب دالتين:

إذا كان $h=f.g$ فإنّ: $h=f'g+fg'$

نظرية (٥): مشتقّة خارج قسمة دالتين:

إذا كان $h=\frac{f}{g}$ فإنّ: $h'=\frac{g.f'-fg'}{g^2}$

ملاحظة هامّة: يشترط في النظريّات السابقة أن تكون الدوال الأساسيّة حقيقيّة قابلة للاشتقاق عند x التي تنتمي إلى مجال الدوالّ.

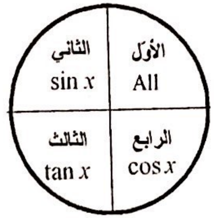
درس (٥): ملخص سريع في حساب المثلثات

٢٠١٧/٣/٩

العلاقات الأساسية للدوال المثلثية (الدائرية):

$\csc x = \dfrac{1}{\sin x}$ ، $\sec x = \dfrac{1}{\cos x}$ ، $\cot x = \dfrac{1}{\tan x} = \dfrac{\cos x}{\sin x}$ ، $\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$

الزوايا المنتسبة لزاوية حادة وإشارات الدوال المثلثية:



في الربع الثاني: $\sin(\pi - x) = \sin x$

في الربع الثالث: $\tan(\pi + x) = \tan x$

في الربع الرابع: $\cos(2\pi - x) = \cos x$

(ويلحق بها الزوايا السالبة)

قيم الدوال المثلثية للزوايا الخاصة والربعية:

الدالة المثلثية	الزوايا الربعية				الزوايا الخاصة		
	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$
$\cos x$	1	0	-1	0	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$
$\sin x$	0	1	0	-1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$

العلاقات الأساسية للدوال المثلثية:

(1) $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$

(2) $1 - \sin^2 x = \cos^2 x$

(3) $1 - \cos^2 x = \sin^2 x$

(4) $1 + \tan^2 x = \sec^2 x$

(5) $1 + \cot^2 x = \csc^2 x$

العلاقات بين الزاويتين المتتامتين:

$\sin x = \cos(\frac{\pi}{2} - x)$, $\cos x = \sin(\frac{\pi}{2} - x)$, $\tan x = \cot(\frac{\pi}{2} - x)$

$\csc x = \sec(\frac{\pi}{2} - x)$, $\sec x = \csc(\frac{\pi}{2} - x)$, $\cot x = \tan(\frac{\pi}{2} - x)$

صيغ ضعف الزاوية:

(i) $\sin 2x = 2\sin x \cos x$

(ii) $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\sin^2 x$

(iii) $\tan 2x = \dfrac{2\tan x}{1 - \tan^2 x}$ (بشرط $\tan x \neq \pm 1$)

القياس الستيني والدائري

في التفاضل والتكامل نتعامل مع المتغير x كعدد حقيقي في الدوال الدائرية (المثلثية) لذلك فإنّ قياسات الزوايا دائمًا تكون قياسات دائرية، وممنوع ألبتة استخدام الزوايا الستينية، حيث أنّ كثيرًا من المسائل تكون x موجودة بداخل الدالة المثلثية وخارجها، لذلك فإنّ التعامل معها لا بدّ وأن يكون كعدد حقيقي (بالراديان).

وللتحويل من الستين للدائري نستخدم القاعدة: $x_{rad} = \dfrac{\theta^\circ \times \pi}{180^\circ}$

كلما تدور ستحصل على زواية أخرى!

عندما ندور أكثر من دورة واحدة على دائرة الوحدة فإنّنا نحصل على نفس النقطة المثلثية للزاوية التي تحددها، فالزوايا ستكون زاوية أساسية بإضافة (أو إنقاص) دورات، أي أنّ: $\sin x = \sin(x \pm 2\pi n), n \in Z$ وبالمثل تكون الدوال المثلثية الأخرى.

خاصيّة مهمة في الدوال المثلثية

$\cos(-x) = \cos x$ ، $\tan(-x) = -\tan x$ ، $\sin(-x) = -\sin x$

$\sec(-x) = \sec x$ ، $\cot(-x) = -\cot x$ ، $\csc(-x) = -\csc x$

أخطاء مطبعية شائعة خطيرة

(١) تكتب الدوال المثلثية دون الزاوية مثل: .... cot+ .

(٢) الأسس في الدوال المثلثية توضع على الزاوية بدلاً من آخر حرف منها، فمثلاً يكتب: $\sin x^3$ ويقصد منها خطئًا: $\sin^3 x$ أو بشكل آخر $(\sin x)^3$.

(٣) يتم اختصار الزاوية بالأعداد التي خارج الدالة المثلثية، مثل: $\frac{1}{\cancel{2}}\tan \cancel{2}x^2$.

درس (٧): المشتقات العليا

٢٠١٧/٣/١٢

<u>المشتقات العليا</u> هي ببساطة إعادة تكرار عملية الاشتقاق، فإذا كانت $y = f(x)$ فإننا لو اشتققنا مرة واحد ستكون: $\frac{dy}{dx} = f'(x)$، ولو قمنا باشتقاقها مرة ثانية فإننا سنحصل على المشتقة الثانية وهي: $\frac{d^2y}{dx^2} = f''(x)$، وهكذا.. فإن المشتقة النونية هي:

$$\frac{d^n y}{dx^n} = f^{(n)}(x)$$

مثال (١): تمرين (1C) ص ٣٩:

أوجد المشتقة الثانية والثالثة: $f(x) = \frac{x^2+1}{x}$

الحل:

نلاحظ أن الدالة وإن كان يمكن إيجاد المشتقة بقاعدة القسمة إلا أنه من الأسهل القيام بتجزيء الكسر كالآتي:

$$f(x) = \frac{x^2+1}{x} = \frac{x^2}{x} + \frac{1}{x} = x + x^{-1}$$

المشتقة الأولى: $f'(x) = 1 - x^{-2}$

المشتقة الثانية: $f''(x) = 2x^{-3}$

المشتقة الثالثة: $f'''(x) = -6x^{-4}$

مثال (٢): تمرين (٥) ص ٣٩:

إذا كان: $y = x\tan x$ **فأثبت أن:** $\frac{d^2y}{dx^2} = 2(1+y)\sec^2 x$

الحل

باشتقاق المعادلة بالنسبة لـــ x: $\frac{dy}{dx} = x\sec^2 x + \tan x$

باشتقاق المعادلة بالنسبة لـــ x مرة ثانية:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = x.2\sec x(\sec x\tan x) + \sec^2 x(1) + \sec^2 x$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 2x\sec^2 x\tan x + \sec^2 x + \sec^2 x$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 2x\sec^2 x\tan x + 2\sec^2 x = 2\sec^2 x(x\tan x + 1)$$

$$\therefore \frac{d^2y}{dx^2} = 2\sec^2 x(y+1) = 2(1+y)\sec^2 x \#$$

درس (٦): اشتقاق الدوال المثلثية

٢٠١٧/٣/٧

نظرية (١): $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$

نتيجة (١): $\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x} = 1$

نظرية (٢): $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x} = 0$

ويمكن باستخدام النظريتين (١)، (٢) استنتاج النظرية الآتية:

نظرية (٣): $\frac{d}{dx}(\sin x) = \cos x$

نتيجة (٢): $\frac{d}{dx}(\sin g(x)) = \cos g(x)g'(x)$

نتيجة (٣): $\frac{d}{dx}(\cos x) = -\sin x$

نتيجة (٤): $\frac{d}{dx}(\cos g(x)) = -\sin g(x)g'(x)$

نتيجة (٥): $\frac{d}{dx}(\tan x) = \sec^2 x$

نتيجة (٦): $\frac{d}{dx}(\tan g(x)) = \sec^2 g(x)g'(x)$

انظر براهين النتائج والنظرية (٣) في الكتاب المدرسي

*** <u>ملاحظة:</u>** النتيجة (٥) يشترط فيها $x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z$ وبالمثل النتيجة (٦) على $g(x)$ لكي تكون الدالة معرفة.

انظر الأمثلة (١)-(١٠) الواردة في الكتاب في الصفحات: ٢٤-٣٤

درس (٨): مقدمة لدرس التطبيقات الهندسية

٢٠١٧/٣/١٦

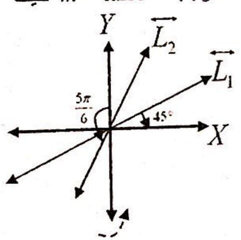
ميل المستقيم: هو ظلّ الزاوية الموجبة التي يصنعها مع محور السينات الموجب، ويرمز له بالرمز m.

مدلول m:

قيمة m	$m>0$	$m<0$	$m=0$	$m \notin \Re$
المدلول الهندسي	يميل المستقيم عن الأفقي بزاوية حادّة	يميل المستقيم عن الأفقي بزاوية منفرجة	المستقيم مواز لمحور السينات	المستقيم مواز لمحور الصادات
اطراد الدالة الخطيّة	تزايديّة	تناقصيّة	ثابتة	ليست دالّة في x

إيجاد قيمة الميل:

أوّلاً: بمعلوميّة الزاوية التي يصنعها مع محور السينات الموجب: $m=\tan\theta$ حيث $0\le\theta<\pi$



مثال (١): أوجد ميل المستقيم $\overleftrightarrow{L_1}$ الذي يصنع زاوية قياسها $45°$ مع محور السينات الموجب.

$m=\tan 45°=1$

مثال (٢): أوجد ميل المستقيم $\overleftrightarrow{L_2}$ الذي يصنع زاوية قياسها $\frac{5\pi}{6}$ مع محور الصادات الموجب.

نحدّد الزاوية التي يصنعها المستقيم $\overleftrightarrow{L_2}$ مع محور السينات الموجب:

$\theta=\frac{\pi}{2}+\left(\pi-\frac{5\pi}{6}\right)=\frac{2\pi}{3}$ (من الشكل نوجد الزاوية بين المستقيم $\overleftrightarrow{L_2}$ ومحور الصادات السالب ثم نضيف $\frac{\pi}{2}$)

$$\therefore m=\tan\frac{2\pi}{3}=\tan\left(\pi-\frac{\pi}{3}\right)=-\tan\frac{\pi}{3}=-\sqrt{3}$$

ثانيا: بمعلوميّة نقطتين واقعتين عليه (x_1,y_1) ، (x_2,y_2) : $m=\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$ حيث $x_1\ne x_2$

ثالثًا: بمعلوميّة معادلته $ax+by+c=0$: $m=\frac{-a}{b}=-\frac{\text{x معامل}}{\text{y معامل}}$ حيث $b\ne 0$

مثال (٣): أوجد ميل المستقيم الذي معادلته $2x-5y-1=0$ والزاوية التي يصنعها مع محور السينات الموجب

$m=-\frac{2}{-5}=\frac{2}{5}$ وقياس الزاوية التي يصنعها مع محور السينات الموجب هي:

$$m\angle\theta=\tan^{-1}\frac{2}{5}\approx 21.8$$

العلاقة بين مستقيمين:

(١) إذا كان $m_1=m_2$ فإنّ $\overleftrightarrow{L_2}\,//\,\overleftrightarrow{L_2}$ *(وإذا كان الميل غير معرّف فلا بدّ من التعامل مع الزاوية وليس هذا الشرط)*

(٢) إذا كان $m_1\times m_2=-1$ فإنّ $\overleftrightarrow{L_2}\perp\overleftrightarrow{L_2}$ *(وإذا كان ميل أحدهما صفرًا فلا بدّ من التعامل مع الزاوية وليس هذا الشرط)*

ويمكن استخدام شكل آخر للشرط: $m_1=\frac{-1}{m_2}$ أو بالتعبير اللفظي: أن يكون أحدهما سالب مقلوب الآخر.

معادلة المستقيم:

إذا كان المستقيم يمر بالنقطة (x_1,y_1) وميله m **فإنّ معادلته هي:**

$$y-y_1=m(x-x_1)$$