مملكة البحرين

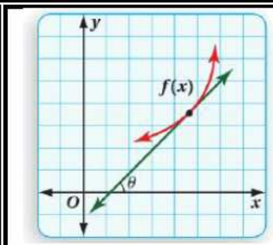
وزارة التربية و التعليم

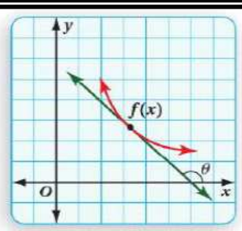
مدرسة أحمد العمران الثانوية للبنين

ملخص قوانين ما بعد المنتصف في ريض 366

تطبيقات المشتقة الأولى

◄ أولاً : إطراد الدالة





لأي دالة $f(x)$ متصلة في فترة ما فإنها تكون

تزايدية	تناقصية	ثابتة
$\Updownarrow$	$\Updownarrow$	$\Updownarrow$
$f'(x)>0$	$f'(x)<0$	$f'(x)=0$

◄ ثانياً : النقط الحرجة

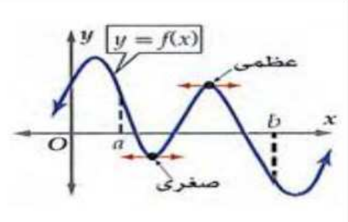
$(x_1, f(x_1))$ نقطة حرجة إذا حققت أحد الشرطين

$f'(x_1)=0$

أو

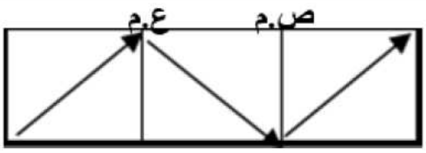
$f'(x_1)$ غير معرف

النقط العظمى والصغرى المحلية



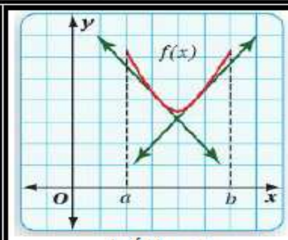
اختبار المشتقة الأولى : عندما يتغيّر اطراد الدالة **من**

تزايديّة لتناقصيّة	تناقصيّة لتزايديّة
النقطة عظمى محلية	النقطة صغرى محلية

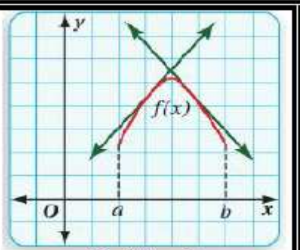


تطبيقات المشتقة الثانية

◄ أولاً : تقعر المنحنيات



مقعر للأعلى



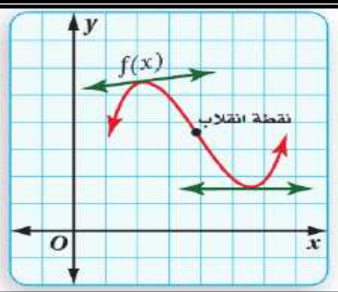
مقعر للأسفل

لأي دالة $f(x)$ متصلة في فترة ما فإنه يكون

مقعر للأعلى	مقعر للأسفل
$\Updownarrow$	$\Updownarrow$
$f''(x)>0$	$f''(x)<0$

◄ ثانياً : نقط الانقلاب

$(x_1, f(x_1))$ نقطة انقلاب إذا كان $f''(x_1)=0$



اختبار المشتقة الثانية : لبيان نوع النقط الحرجة

$(x_1, f(x_1))$ نقطة حرجة للدالة $\Leftarrow f'(x_1)=0$

$f''(x_1)>0$	$f''(x_1)<0$
صغرى محلية	عظمى محلية

ملاحظة :

إذا كانت $f''(x)=0$ أو **غير معرفة** فلا يمكن إستخدام هذه النظرية لبيان نوع النقط الحرجة و عندها نستخدم : **إختبار المشتقة الأولى** على جانبي x_1

تطبيقات القيم العظمى والصغرى

تطبيقات القيم العظمى والصغرى	الاستفادة من المشتقة الأولى للدالة لإيجاد أكبر قيمة أو أصغر قيمة لها
إستراتيجية حل المسائل في تطبيقات القيم العظمى والصغرى	
في حالة وجود الدالة التي سنقوم بإيجاد أكبر (أو أصغر) قيمة لها **جاهزة** نتبع الخطوة ثالثاً	
أولاً : نقرأ المسألة بشكل جيد ثم نقوم بترميز المجاهيل	**ثانياً : نقوم بكتابة الدالة ولتكن $f(x)$ التي سنقوم بإيجاد أكبر (أو أصغر) قيمة لها **بمتغير واحد** بإستخدام الشروط المعطاة في المسألة
ثالثاً : نشتق ونضع $f'(x)=0$ وذلك لإيجاد النقط الحرجة	**رابعاً : نستخدم **إختبار المشتقة الثانية** (أنظر صـ 41) أو **الأولى** (أنظر صـ 43) وذلك للتحقق أنه عند النقط الحرجة التي أوجدناها تكون قيمة عظمى أو صغرى

قواعد التكامل الأساسية

قواعد التكامل غير المحدد (إيجاد الدوال الأصلية)

تكاملها $F(x)$	الدالة $f(x)$
$\dfrac{x^{n+1}}{n+1}+c$	$\int x^n.dx$
$\dfrac{k\,x^{n+1}}{n+1}+c$	$\int k\,x^n.dx$
$kx+c$	$\int k.dx$

c , k : ثابت (عدد حقيقي)

ملاحظة :
n : عدد نسبي
$n \neq 1$

تكامل الدالة الأسية

التكامل	تذكر (إشتقاق دالة أسية)
$\int [f(x)]^n.f'(x).dx=\dfrac{1}{n+1}[f(x)]^{n+1}+c$	$\dfrac{d}{dx}[f(x)]^n=n[f(x)]^{n-1}.f'(x)$

تكاملات الدوال المثلثية

	الإشتقاق	التكامل
1	$\frac{d}{dx}(\sin x) = \cos x$	$\int \cos x.dx = \sin x + c$
2	$\frac{d}{dx}(\cos x) = -\sin x$	$\int \sin x.dx = -\cos x + c$
3	$\frac{d}{dx}(\tan x) = \sec^2 x$	$\int \sec^2 x.dx = \tan x + c$
4	$\frac{d}{dx}(\cot x) = -\csc^2 x$	$\int \csc^2 x.dx = -\cot x + c$
5	$\frac{d}{dx}(\sec x) = \sec x.\tan x$	$\int \sec x.\tan x.dx = \sec x + c$
6	$\frac{d}{dx}(\csc x) = -\csc x.\cot x$	$\int \csc x.\cot x.dx = -\csc x + c$

ملاحظات هامة

أولاً

اذا كانت الزاوية عبارة عن مضاعفات x فإننا نكامل مع القسمة على مشتقة الزاوية

2) $\int \sin(ax).dx = -\frac{1}{a}\cos(ax) + c$	1) $\int \cos(ax).dx = \frac{1}{a}\sin(ax) + c$
4) $\int \csc^2(ax).dx = -\frac{1}{a}\cot(ax) + c$	3) $\int \sec^2(ax).dx = \frac{1}{a}\tan(ax) + c$
5) $\int \csc(ax).\cot(ax).dx = -\frac{1}{a}\csc(ax) + c$	5) $\int \sec(ax).\tan(ax)dx = \frac{1}{a}\sec(ax) + c$

ثانياً

تكامل دالة مثلثية مضروبة في مشتقة الزاوية

التكامل	تذكر (في الإشتقاق)
$\int \cos[g(x)].g'(x).dx = \sin[g(x)] + c$	$\frac{d}{dx}[\sin g(x)] = \cos[g(x)].g'(x)$

ثالثاً

لإيجاد تكامل	$\int \sin^2 x.dx$	نستخدم التعويض	$\sin^2 x = \frac{1}{2}(1-\cos 2x)$
	$\int \cos^2 x.dx$		$\cos^2 x = \frac{1}{2}(1+\cos 2x)$

رابعاً

لإيجاد تكامل	$\int \tan^2 x.dx$	نستخدم التعويض	$\tan^2 x = \sec^2 x - 1$
	$\int \cot^2 x.dx$		$\cot^2 x = \csc^2 x - 1$

التطبيقات الهندسية والفيزيائية للتكامل

معادلة منحنى الدالة	بالإشتقاق ← / بالتكامل →	ميل المماس	إيجاد معادلة منحنى الدالة بمعلومية ميل مماسه
$y=\int f'(x).dx=\int \frac{dy}{dx}.dx$		$m=f'(x)$	

العلاقة بين الإزاحة والسرعة والتسارع

إذا كان جسم يتحرك بإزاحة s عن نقطة ثابتة بعد زمن قدره t

المسافة (الإزاحة)	بالإشتقاق / بالتكامل	السرعة	بالإشتقاق / بالتكامل	التسارع (العجلة)
$s(t)=\int v.dt=\int \frac{ds}{dt}.dt$		$v(t)=\int a.dt=\int \frac{dv}{dt}.dt$		a

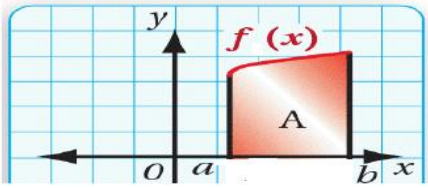
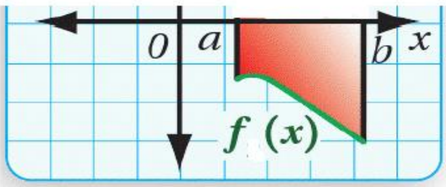
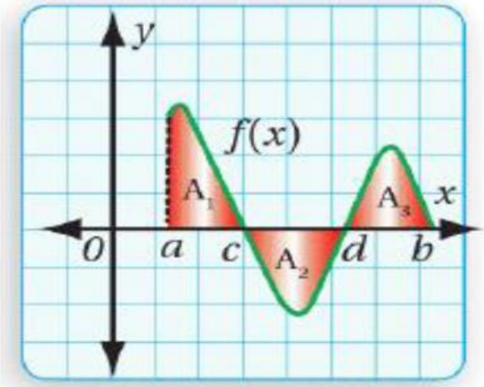
تذكر أنه عندما يتحرك جسم من السكون وذلك من نقطة ثابتة ولتكن o **فإن** $s=0$ ، $v=0$ عندما $t=0$ ما لم يذكر خلاف ذلك .	**ملاحظة**

التكامل المحدد

خواص التكامل المحدد		التكامل المحدد
1	$\int_a^b kf(x).dx=k\int_a^b f(x).dx$ **حيث :** $k\in\Re$	تعرف أيضاً بـ **النظرية الأساسية في التفاضل والتكامل** $\int_a^b f(x).dx=F(x)\Big\|_b^a$ $=F(b)-F(a)$ **حيث :** $F(x)$ **:** دالة أصلية للدالة $f(x)$
2	$\int_a^b (f\pm g)(x).dx=\int_a^b f(x).dx+\int_a^b g(x).dx$	
3	$\int_a^b (f)(x).dx=\int_a^c f(x).dx+\int_b^c g(x).dx$ **حيث :** $c\in[a,b]$	
4	$\int_a^b f(x).dx=-\int_b^a f(x).dx$	
5	$\int_a^a f(x).dx=0$	

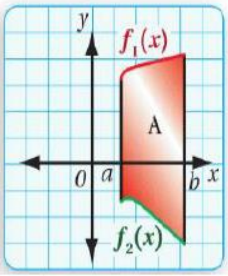
التطبيقات الهندسية للتكامل المحدد

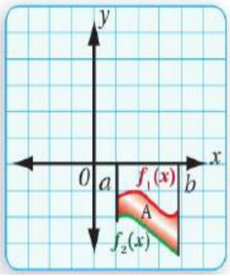
مساحة سطح المنطقة المحصورة بين منحنى الدالة $f(x)$ ومحور السينات في الفترة $[a,b]$

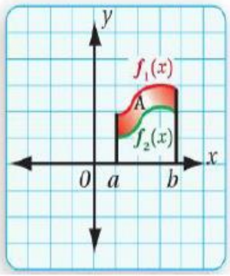
أولاً : لا يوجد نقاط تقاطع بين الدالة ومحور السينات في هذه الفترة	ثانياً : يوجد نقاط تقاطع بين الدالة ومحور السينات في هذه الفترة
 	
$A=\left\lvert\int_a^b f(x).dx\right\rvert$	$A=\left\lvert\int_a^c f(x).dx\right\rvert+\left\lvert\int_c^d f(x).dx\right\rvert+\left\lvert\int_d^b f(x).dx\right\rvert$

مساحة سطح المنطقة المحصورة بين منحنيي الدالتين $f_1(x), f_2(x)$ في الفترة $[a,b]$

$$A=\left\lvert\int_a^b [f_1(x)-f_2(x)].dx\right\rvert$$







التكامل بالتعويض

التكامل بالتعويض : يستخدم لتحويل دوال الغير معروف تكاملها الى صيغ قياسية معروفة **وهي كما بالجدول**

نظرية التعويض

أنظر الكتاب صـ 141

$$\int_c^d f(x).dx = \int_{\theta_1}^{\theta_2} f(g(\theta)).g'(\theta).d\theta$$

$$\forall x\in[c,d],\ \theta\in[\theta_1,\theta_2]$$

التعبير الرياضي	التعويض المثلثي
$\sqrt{a-bx^2}$ أو $a-bx^2$	$x=\sqrt{\frac{a}{b}}\sin\theta$
$\sqrt{a+bx^2}$ أو $a+bx^2$	$x=\sqrt{\frac{a}{b}}\tan\theta$
$\sqrt{bx^2-a}$ أو bx^2-a	$x=\sqrt{\frac{a}{b}}\sec\theta$