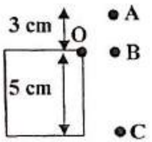
درس (١٠): تطبيقات فيزيائية

٢٠١٧/٣/٢١

درسنا في مقررات الميكانيكا بعض المفاهيم الفيزيائيّة، وسوف نتعرّض لها في هذا الدرس تذكيرًا..

(١) **النقطة الثابتة (fixed point) (O):** هي النقطة المرجعيّة التي على أساسها نحسب بعد جسم ما عنها.



(٢) **الإزاحة (Displacement) (s):** ونقصد بها بعد الجسم (الاتجاهي) عن النقطة الثابتة، أي لا بدّ من تحديد اتجاه الحركة لتحديد إشارة الإزاحة، ويرمز لها بالرمز (s) فمثلاً في الشكل المجاور إذا كانت O هي النقطة الثابتة، وافترضنا أن اتجاه الحركة للأعلى *(الأعلى أو اليمين موجب غالبًا)* فإننا نقول:

- إزاحة الجسم عند النقطة **A** تساوي 3 cm
- إزاحة الجسم عند النقطة **B** تساوي 0
- إزاحة الجسم عند النقطة **C** تساوي -5 cm

وكثيرًا ما يأتي لفظ "البعد" و "المسافة" و "الإزاحة" ونقصد منها **الإزاحة** نفسها.

(٣) **السرعة المتوسطة (Average velocity) (v_{avg}):** هي النسبة بين تغيّر الإزاحة وتغيّر الزمن في فترة زمنيّة معيّنة، أي أنّ: $V_{avg}=\dfrac{\Delta S}{\Delta t}$.

(٤) **السرعة اللحظية (Instantaneous velocity) (v):** هي السرعة المتوسّطة (وهي كميّة متجهة) لجسم خلال فترة زمنيّة صغير جدًا تؤول إلى الصفر، بمعنى أنّها معدّل تغيّر الإزاحة بالنسبة للزمن. أي أنّ: $V=\lim\limits_{\Delta t\to 0}V_{avg}=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{\Delta S}{\Delta t}=\dfrac{dS}{dt}$

(٥) **متوسط التسارع (average acceleration) (a_{avg}):** هي النسبة بين تغيّر السرعة وتغيّر الزمن في فترة زمنيّة معيّنة، أي أنّ: $a_{avg}=\dfrac{\Delta v}{\Delta t}$.

(٦) **التسارع اللحظي (Instantaneous acceleration) (a):** هي العجلة المتوسّطة (وهي كميّة متجهة) لجسم خلال فترة زمنيّة صغير جدًا تؤول إلى الصفر، بمعنى أنّها معدّل تغيّر السرعة بالنسبة للزمن. أي أنّ: $a=\lim\limits_{\Delta t\to 0}a_{avg}=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{\Delta v}{\Delta t}=\dfrac{dv}{dt}=\dfrac{d^2S}{dt^2}$

وبعد التعرّف على المفاهيم دعنا نسلّط الضوء على الألفاظ المهمّة لحل المسائل:

(١) "يعود الجسم لنقطة البداية" أي أنّ: $s=0$

(٢) "يبدأ من السكون" أي أنّ: $v=0$ وكذلك $a=0$ عندما $t=0$ *وليس شرطًا* $s=0$

(٣) "يغيّر الجسم اتجاهه" أي أنّ: $v=0$ عند لحظة تغيير الاتّجاه.

(٤) "يسير بسرعة ثابتة (منتظمة)" أي أنّ: $a=0$ (لأن مشتقة الثابت تساوي صفرًا).

(٥) "بعجلة تناقصيّة" أي أنّ $a<0$، وبـ "تزايديّة" $a>0$ والثابتة لا تفيدنا شيئًا.

مثال (١): أوجد السرعة والعجلة حيث S بالمتر والزمن t بالثانية:

$$s=2t^3-\frac{5}{t}\ ,\ t=1\ \text{sec}$$

$$v=\frac{ds}{dt}=6t^2+5t^{-2}\Rightarrow V(1)=6(1)+5(1)^{-2}=11\ \ m\backslash\sec$$

$$a=\frac{dv}{dt}=12t-10t^{-3}\Rightarrow a(1)=12(1)-10(1)^{-3}=2\ \ m\backslash\sec^2$$

مثال (٢): إذا كانت العلاقة بين المسافة s cm والزمن t sec تعطى بالعلاقة التالية: $\boxed{s=t^3-12t^2+36t}$، فأوجد: (أ) السرعة والعجلة عند أي لحظة

(ب) الإزاحة والعجلة عندما تنعدم السرعة.

الحل

$$v=\frac{ds}{dt}=3t^2-24t+36 \quad \text{(السرعة عند أي لحظة } t\text{)}$$

$$a=\frac{dv}{dt}=6t-24 \quad \text{(العجلة عند أي لحظة } t\text{)}$$

عندما تنعدم السرعة فإنّ $v=0$

$$\therefore 3t^2-24t+36=0\Rightarrow t^2-8t+12=0\Rightarrow(t-6)(t-2)=0$$

$$\therefore t=6\ \text{sec}\ \ or\ \ t=2\ \text{sec}$$

عندما $t=6$ sec

$$S(6)=(6)^3-12(6)^2+36(6)=0$$

$$a(6)=6(6)-24=12\ \ m\backslash\sec^2$$

عندما $t=2$ sec

$$S(2)=(2)^3-12(2)^2+36(2)=-16\ \ m$$

$$a(2)=6(2)-24=-12\ \ m\backslash\sec^2$$

تدريب: إذا قذف جسم رأسيًا إلى أعلى، فتحرّك وفقًا للعلاقة: $\boxed{S=112t-16t^2}$ فأوجد:

(أ) السرعة والعجلة عند أي لحظة (ب) أقصى ارتفاع يصل إليه الجسم

تمارين على التطبيقات الهندسية والفيزيائية

(١) تتحرك نقطة مادية في خط مستقيم وفقًا للعلاقة $S(t)=t^3-6t^2+9t$ حيث t الزمن بالثواني، S المسافة بالأمتار. أوجد:

(أ) اللحظة التي تعكس فيها اتّجاه حركتها. $(3,1\ sec)$

(ب) المسافة التي تقطعها النقطة عندما تكون عجلتها $12\ m\backslash sec^2$ $(4m)$

(٢) قذف جسم رأسيًا لأعلى من نقطة على سطح الأرض بحيث يكون ارتفاعه عن سطح الأرض بعد $t\ sec$ هو $S(t)=96t-16t^2$ قدم. أوجد أقصى ارتفاع يصل إليه الجسم. $(144\ feet)$

(٣) أوجد النقط الواقعة على المنحنى $x^3-6y-3x^2=18x$ والتي يكون عندها المماس للمنحنى عموديًا على المستقيم $x+9y-2=0$

$((6,0),(-4,\frac{20}{3}))$

(٤) إذا كانت الإزاحة لجسم بالمتر بعد t ثانية تعطى بالعلاقة $S=t+\frac{4}{t+1}$ فأوجد سرعة الجسم عندما تبلغ عجلته $\frac{1}{8}\ m\backslash sec^2$

$(\frac{3}{4}\ m\backslash sec)$

(٥) أسقط جسم من نقطة ثابتة على ارتفاع $100\ m$ عن سطح أرض أفقية، بحيث كانت أزاحته بعد $t\ sec$ هي $m\ (5t^2)$ ، وفي الوقت نفسه قذف جسم آخر من سطح الأرض للأعلى رأسيًا، حيث كانت إزاحته بعد $t\ sec$ هي m $(50t-5t^2)$. فأوجد سرعة الجسمين عندما يكونان على ارتفاع واحد من سطح الأرض. $(20,30\ m\backslash sec)$

(٦) إذا تحرك جسيم في خط مستقيم وفقًا للعلاقة: $S=t^3-3t^2+3t+3$ حيث الإزاحة $S\ m$، والزمن $t\ sec$ فأثبت أنّ الجسيم يتوقف مرّة واحدة دون أن يغيّر اتّجاه حركته. ثم أوجد عجلة الجسيم بعد مرور $6\ sec$ من بدء الحركة.

(٧) أوجد مساحة سطح المثلث المكوّن من محور السينات والمماس والعمودي للمنحنى $y=x^2+1$ عند النقطة $(-1,2)$.

(٨) أوجد النقطة (x,y) الواقعة على المنحنى الذي معادلته $y=x^2+7x-10$ والتي يكون المماس عندها يصنع زاوية قياسها θ مع الاتجاه الموجب لمحور الصادات حيث $\sec\theta=-3.16$.

$(-2,-20)$

(٩) أوجد النقاط الواقعة على المنحنى $y=\frac{1}{x^2+2x}$ والتي يكون المماس عندها موازيًا لمحور السينات.

$(-1,-1)$

(١٠) إذا كان ميل المماس للمنحنى $x^2-y^2+xy=-11$ عند النقطة $(a,3)$ الواقعة عليه يساوي $-\frac{1}{8}$ ، فأوجد:

(أ) قيمة a

(ب) معادلة العمودي على المماس للمنحنى عند هذه النقطة

٢٠١٧/٣/٢٨

درس (١١) : تطبيقات على المشتقة الأولى

النقطة الحرجة للدالة f : هي النقطة $(x_0, f(x_0))$ التي يكون فيها $f'(x_0)=0$ أو $f'(x_0)$ غير معرّفة حيث f متصلة في $[a,b]$ وكانت $x_0 \in (a,b)$

مثال (١): أوجد النقط الحرجة للدالة $f(x)=|x|$

الدالة دالة مطلق، ومتصلة في $\Re$، وبإعادة تعريفها يكون:

$$f(x)=\begin{cases} x & ,x\ge 0 \\ -x & ,x<0 \end{cases} \quad \text{وبذلك:} \quad f'(x)=\begin{cases} 1 & ,x>0 \\ -1 & ,x<0 \end{cases}$$

واضح أنّ: $f'(x)\neq 0$ ولكن $f'(0^+)=1$ ، $f'(0^-)=-1$ أي أنّ الدالة غير قابلة للاشتقاق عند $x=0$ وهي من المجال... إذن النقطة $(0,0)$ نقطة حرجة

مثال (٢): مثال (٣) ص ٧٥.

==

اطراد الدالّة f : إذا كانت الدالة f متصلة في $[a,b]$ وقابلة للاشتقاق (a,b) فإنّ:

(١) الدالة **تزايدية** (أي أنّ: $f(x_1)<f(x_2)$ عندما $x_1<x_2$) في الفترة $[a,b]$ إذا كان $f'(x)>0$ لكل $x\in(a,b)$

(٢) الدالة **تناقصيّة** (أي أنّ: $f(x_1)>f(x_2)$ عندما $x_1<x_2$) في الفترة $[a,b]$ إذا كان $f'(x)<0$ لكل $x\in(a,b)$

(٣) الدالة **ثابتة** (أي أنّ: $f(x_1)=f(x_2)$ لأي x_1,x_2) في الفترة $[a,b]$ إذا كان $f'(x)=0$ لكل $x\in(a,b)$

وهذا صحيح اعتمادًا على أنّ المشتقة الأولى هي ميل المماس عند نقطة تماسّه من المنحنى، فإذا كان ميل المماس موجبًا كان تزايديًا، وكذلك تكون الدالة، وسوف نقوم بإيجاد النقط الحرجة أولًا ثمّ ندرس الاطراد بدراسة إشارة $f'(x)$.

==

النقطة العظمى المحليّة f : هي النقطة $(x_0, f(x_0))$ التي يكون فيها $f(x)\le f(x_0)$ في فترة ما.

النقطة الصغرى المحليّة f : هي النقطة $(x_0, f(x_0))$ التي يكون فيها $f(x)\ge f(x_0)$ في فترة ما.

ملاحظة: (١) نقصد من عبارة "في فترة ما" أي أنّ $x\in(x_0-h, x_0+h)$ حيث $h>0$

(٢) نستطيع الاستفادة من الاطراد للتعرّف على النقط العظمى والصغرى المحليّة؛ فعندما يتغير اطراد الدالة من تزايديّة لتناقصيّة كانت النقطة الحرجة **عظمى محليّة**، وتكون **صغرى محليّة** إذا تغيّرت من تناقصيّة لتزايديّة، وتدعى عملية تحديد النقط هذه بـ "اختبار المشتقة الأولى".

مثال (٣): أوجد النقاط الحرجة (إن وجدت) مبيّنًا نوعها، ثمّ ادرس الاطراد للدالة:

$$f(x)=2x^3-3x^2-12x-5$$

الحلّ

الدالة كثيرة حدود، ومتصلة في $\Re$ وقابلة للاشتقاق $\forall x\in\Re$:

$$f'(x)=6x^2-6x-12$$

أولًا: **نوجد النقاط الحرجة:** $f'(x)=0$

إذن $6x^2-6x-12=0 \Rightarrow x^2-x-2=0$

$$(x-2)(x+1)=0 \Rightarrow x=2, x=-1$$

$$f(2)=2(2)^3-3(2)^2-12(2)-5=-25$$

$$f(-1)=2(-1)^3-3(-1)^2-12(-1)-5=2$$

إذن النقاط الحرجة هي: $(2,-25)$ ، $(-1,2)$

ثانيًا: **ندرس اطراد الدالة كما بالجدول المجاور:**

من الجدول الدالة متناقصة في الفترة $[-1,2]$ ومتزايدة في الفترتين $(-\infty,-1]$ و $[2,\infty)$

ومن الجدول "باختبار المشتقة الأولى" يتبيّن أنّ النقطة $(2,-25)$ **صغرى محليّة**، من الجدول يتبيّن أنّ النقطة $(-1,2)$ **عظمى محليّة**

قيم x	$-\infty$ -1	2	∞
إشارة $f'(x)$	+	−	+
اطراد الدالة $f(x)$	↗	↘	↗

ملاحظة:

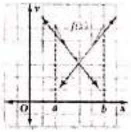
يمكن الاستفادة من خاصيّة موجودة بالدالة التربيعية، وهي أنّ إشارتها تكون عكس إشارة معامل x^2 بين الجذرين، ومطابقة لإشارة معامل x^2 في الباقي، وهي تغني عن التعويض.

تدريب: تمارين (١)، (٣)، (٤)، (٥) ص ٨٥.

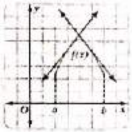
درس (١٢): تقعر المنحنيات

٢٠١٧/٣/٣٠

التقعّر Concavity

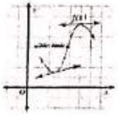


الدالة المتزايدة قد تتزايد بشكل متزايد *في فترة ما*، أو تتزايد بشكل متناقص، فإذا كان التزايد متزايدًا قلنا بأنّ الدالة **مقعّرة لأعلى** (أي أنّ منحنى الدالة واقعًا فوق مماساته)، وإذا كان متناقصًا كانت **مقعّرة لأسفل** (أي أنه واقع أسفل مماساته).



وهذا يعني أنه إذا كان $f''(x) > 0$ فإنّ الدالة مقعّرة لأعلى، وإذا كان $f''(x) < 0$ فإنّها مقعّرة لأسفل، *بشرط أن تكون متصلة في الفترة $[a,b]$ وقابلة للاشتقاق مرتين في الفترة (a,b).*

نقطة الانقلاب Point of inflection



إذا تغيّر تقعّر منحنى الدالة فإنّ النقطة التي يتغيّر عندها تدعى **بنقطة انقلاب (انعطاف)**. أي أنّه لإيجاد نقطة الانقلاب يلزم حلّ المعادلة $f''(x_0) = 0$.

اختبار المشتقة الثانية 2nd derivative test

إذا كانت النقطة الحرجة $(x_0, f(x_0))$ للدالة $f(x)$ (أي أنّ $f'(x_0) = 0$) فإنّ:

(١) إذا كان $f''(x_0) > 0$ فإنّ النقطة $(x_0, f(x_0))$ **صغرى محليّة**

(٢) إذا كان $f''(x_0) < 0$ فإنّ النقطة $(x_0, f(x_0))$ **عظمى محليّة**

ملاحظات هامّة:

١- عندما يكون **التزايد متزايدًا** فإنّ هذا يعني أنّ المشتقة الأولى متزايدة، أي أنّ مشتقة المشتقة متزايدة، وهذا ما يعني أنّ المشتقة الثانية إشارتها موجبة في فترة ما.

٢- فترات التقعر -في منحنياتنا- تكون **فترات مفتوحة**، أمّا الاطراد ففترات **مغلقة**، مع ملاحظة أنّ الأعداد الحقيقيّة $\Re$ هي **مغلقة ومفتوحة** في آن واحد!

٣- يفشل اختبار المشتقة الثانية إذا كان $f''(x_0) = 0$ ويجب الرجوع لاختبار المشتقة الأولى (التغيّر في الاطراد؛ من تزايد لتناقص أو العكس).

مثال (١): أوجد نقطة الانقلاب -إن وجدت- وادرس تقعّر المنحنيات ثمّ استخدم المشتقة الثانية لبيان نوع النقاط الحرجة للدالة: $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 5$

الحل

$f'(x) = 3x^2 - 6x - 9$ ولإيجاد النقط الحرجة نجعل $f'(x) = 0$

$$3x^2 - 6x - 9 = 0 \Rightarrow x^2 - 2x - 3 = 0 \Rightarrow (x-3)(x+1) = 0$$

$$\therefore x = 3 \;\; or \;\; x = -1$$

$\therefore$ النقطتان الحرجتان هما: $(3, f(3)), (-1, f(-1))$

$$f(-1) = (-1)^3 - 3(-1)^2 - 9(-1) + 5 = 10$$

$$f(3) = (3)^3 - 3(3)^2 - 9(3) + 5 = 22$$

$f''(x) = 6x - 6$ ولإيجاد نقط الانقلاب نجعل $f''(x) = 0$

$$6x - 6 = 0 \Rightarrow x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1$$

نقوم بعمل جدول لدراسة إشارة $f'(x) = 0$

قيم x	$-\infty$	1	∞
إشارة $f''(x)$	-		+
تقعّر $f(x)$	∩		∪

ومن الجدول يتبين أنّ:

$(1, -6)$ نقطة انقلاب (إذ يوجد تغيّر في التقعر)

ومن الجدول أيضًا:

الدالة مقعّرة لأعلى في الفترة $(1, \infty)$

الدالة مقعّرة لأسفل في الفترة $(-\infty, 1)$

وللتعرّف على نوع النقاط الحرجة:

النقطة $(3, 22)$: $f''(3) = 6(3) - 6 = 12 > 0 \Leftarrow$ صغرى محلية

النقطة $(-1, 10)$: $f''(-1) = 6(-1) - 6 = -12 < 0 \Leftarrow$ عظمى محلية

ملاحظة:

في المسائل التي تكون نقطة انقلاب بين العظمى والصغرى فإنّ الإحداثي السيني لنقطة الانقلاب يكون المتوسط بين إحداثيي النقطتين الصغرى والعظمى. وهذه الملاحظة هي للتأكد من معقولية الناتج لا أكثر.

مثال (٢): أوجد نقطة الانقلاب –إن وجدت– وادرس تقعّر المنحنيات ثمّ استخدم المشتقة الثانية لبيان نوع النقاط الحرجة للدوال الآتية:

(١) $f(x)=4x^3-x^4$

$f'(x)=12x^2-4x^3$ ولإيجاد النقاط الحرجة نجعل $f'(x)=0$

$12x^2-4x^3=0 \Rightarrow 4x^2(3-x)=0 \Rightarrow x=0, x=3$

∴ النقطتان الحرجتان هما: $(0,0)$، $(3,27)$

$f''(x)=24x-12x^2$ ولإيجاد نقاط الانقلاب نجعل $f''(x)=0$

$24x-12x^2=0 \Rightarrow 12x(2-x)=0 \Rightarrow x=0, x=2$

ندرس إشارة المشتقة الثانية لتحديد نقط الانقلاب واتجاه التقعر:

قيم x	$-\infty$ 0	2	∞
إشارة $f''(x)$	-	+	-
تقعر منحنى $f(x)$			

من الجدول يتبين أن:

نقطتا الانقلاب: $(0,0)$ ، $(2,16)$

الدالة تكون مقعرة لأعلى في الفترة $(0,2)$، ومقعرة للأسفل في الفترة $\Re-[0,2]$

والآن نحدّد نوع النقاط الحرجة (باستخدام المشتقة الثانية):

$f''(3)=24(3)-12(3)^2=-56<0 \Rightarrow (3,27) \Rightarrow$ نقطة عظمى محلية $(3,27)$

فشل اختبار المشتقة الثانية عن تحديد نوع النقطة $\Leftarrow$ $f''(0)=24(0)-12(0)^2=0$

هنا يجب الرجوع لاختبار المشتقة الأولى لتحديد نوع النقطة (جرّب ذلك وسيتبيّن أنّها ليست عظمى وليست صغرى).

قيم x	$-\infty$ 0	∞
إشارة $f''(x)$	+	+
تقعر $f(x)$		

(٢) $f(x)=x^4$

$f'(x)=4x^3$ ولإيجاد النقاط الحرجة نجعل $f'(x)=0$

$4x^3=0 \Rightarrow x=0 \Rightarrow$ نقطة حرجة $(0,0)$

$f''(x)=12x^2$ ولإيجاد نقاط الانقلاب

نجعل $f''(x)=0$: $12x^2=0 \Rightarrow x=0$

من الجدول يتبيّن أنّه لا توجد نقط انقلاب وأن الدالة مقعّرة لأعلى في $\Re$

ولتحديد نوع النقطة $(0,0)$: $f''(0)=12(0)^2=0$ (فشل للاختبار) وهنا يجب الرجوع للمشتقة الأولى وسوف نرى أنّ هناك تغيّرًا من تناقص لتزايد إذن هي **صغرى محلية**.

مثال (٢): أوجد نقطة الانقلاب –إن وجدت– وادرس تقعّر المنحنيات ثمّ استخدم المشتقة الثانية لبيان نوع النقاط الحرجة للدوال الآتية:

(١) $f(x)=4x^3-x^4$

$f'(x)=12x^2-4x^3$ ولإيجاد النقاط الحرجة نجعل $f'(x)=0$

$12x^2-4x^3=0 \Rightarrow 4x^2(3-x)=0 \Rightarrow x=0, x=3$

∴ النقطتان الحرجتان هما: $(0,0)$، $(3,27)$

$f''(x)=24x-12x^2$ ولإيجاد نقاط الانقلاب نجعل $f''(x)=0$

$24x-12x^2=0 \Rightarrow 12x(2-x)=0 \Rightarrow x=0, x=2$

ندرس إشارة المشتقة الثانية لتحديد نقط الانقلاب واتجاه التقعر:

قيم x	$-\infty$ 0	2	∞
إشارة $f''(x)$	-	+	-
تقعر منحنى $f(x)$			

من الجدول يتبين أن:

نقطتا الانقلاب: $(0,0)$ ، $(2,16)$

الدالة تكون مقعرة لأعلى في الفترة $(0,2)$، ومقعرة للأسفل في الفترة $\Re-[0,2]$

والآن نحدّد نوع النقاط الحرجة (باستخدام المشتقة الثانية):

$f''(3)=24(3)-12(3)^2=-56<0 \Rightarrow (3,27) \Rightarrow$ نقطة عظمى محلية $(3,27)$

فشل اختبار المشتقة الثانية عن تحديد نوع النقطة $\Leftarrow$ $f''(0)=24(0)-12(0)^2=0$

هنا يجب الرجوع لاختبار المشتقة الأولى لتحديد نوع النقطة (جرّب ذلك وسيتبيّن أنّها ليست عظمى وليست صغرى).

قيم x	$-\infty$ 0	∞
إشارة $f''(x)$	+	+
تقعر $f(x)$		

(٢) $f(x)=x^4$

$f'(x)=4x^3$ ولإيجاد النقاط الحرجة نجعل $f'(x)=0$

$4x^3=0 \Rightarrow x=0 \Rightarrow$ نقطة حرجة $(0,0)$

$f''(x)=12x^2$ ولإيجاد نقاط الانقلاب

نجعل $f''(x)=0$: $12x^2=0 \Rightarrow x=0$

من الجدول يتبيّن أنّه لا توجد نقط انقلاب وأن الدالة مقعّرة لأعلى في $\Re$

ولتحديد نوع النقطة $(0,0)$: $f''(0)=12(0)^2=0$ (فشل للاختبار) وهنا يجب الرجوع للمشتقة الأولى وسوف نرى أنّ هناك تغيّرًا من تناقص لتزايد إذن هي **صغرى محلية**.

درس (١٢): رسم منحنيات دوال كثيرات الحدود

٢٠١٧/٤/٤

من خلال ما تعرّفنا عليه في الدرسين الماضيين (الاطراد والتقعّر) يمكن الاستفادة منها (إضافة للنقط: العظمى والصغرى والحرجة والانقلاب) في رسم دوال كثيرات الحدود، وقد نستعين أحيانًا بنقاط التقاطع مع محور الصادات (عندما $x=0$) ومع محور السينات (عندما $y=0$) أو أي نقاط أخرى، وهذا ما سيتّضح في الأمثلة.

مثال(١): ارسم بصورة تقريبيّة منحنى الدالّة: $f(x)=x(x-3)^2+1$ مبيّنًا:

(١) فترات التزايد والتناقص

(٢) النقط العظمى والصغرى (إن وجدت)

(٣) اتّجاه تقعّر المنحنى ونقط الانقلاب (إن وجدت)

الحل

$$f(x)=x(x^2-6x+9)+1=x^3-6x^2+9x+1$$

$$\therefore f'(x)=3x^2-12x+9$$

$$f'(x)=0\Rightarrow 3(x^2-4x+3)=0$$

$$\therefore (x-3)(x-1)=0\Rightarrow x=3, x=1$$

القيم		1		3	
إشارة $f'(x)$	+		−		+
اطراد $f(x)$	↗		↘		↗

جدول (١)

من الجدول (١) يتبيّن أنّ:

الدالة متناقصة في $[1,3]$، ومتزايدة في $\Re-(1,3)$

∴ النقطة $(1,5)$ حرجة عظمى محلّية

والنقطة $(3,1)$ حرجة صغرى محلية

$$f''(x)=6x-12$$

$$\therefore f''(x)=0\Rightarrow 6x-12=0$$

$$6(x-2)=0\Rightarrow x=2$$

القيم		2	
إشارة $f''(x)$	+		−
تقعر $f(x)$	∪		∩

جدول (٢)

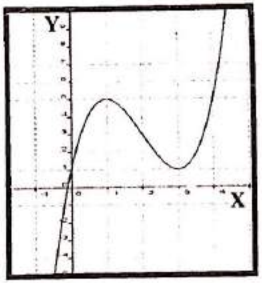
من الجدول (٢) يتبيّن أنّ:

الدالة مقعرة لأعلى $\forall x\in(-\infty,2)$،

ومقعرة لأسفل $\forall x\in(2,\infty)$

والنقطة $(2,3)$ نقطة انقلاب

ربّما نحتاج لنقطة التقاطع مع Y وهي $(0,1)$



ملاحظة هامة:

١- التعويض عند أي نقطة يكون في الدالة الأساسيّة.

٢- والرؤوس التي قد تنتج في الدالة (النقط الحرجة) يجب أن تكون ناعمة **Smooth** لأنها دوال كثيرات حدود **وقابلة للاشتقاق** عند كلّ نقطة.

٣- يمكن استخدام اختبار المشتقة الثانية لتحديد نوع النقاط الحرجة، فمثلاً:

النقطة $(1,5)$ عظمى محلية $\Leftarrow f''(1)=6(1)-12<0$

النقطة $(3,1)$ صغرى محلية $\Leftarrow f''(3)=6(3)-12>0$

مثال(٢): ارسم بصورة تقريبيّة منحنى الدالّة: $f(x)=(1-x)^3$ مبيّنًا:

(١) النقط الحرجة (إن وجدت)

(٢) فترات التزايد والتناقص

(٣) النقط العظمى والصغرى (إن وجدت)

(٤) اتّجاه تقعّر المنحنى ونقط الانقلاب (إن وجدت)

الحل

$$f'(x)=3(1-x)^2(-1)=-3(1-x)^2$$

$$f'(x)=0\Rightarrow -3(1-x)^2=0$$

∴للدالة نقطة حرجة عند $x=1$

القيم		1	
إشارة $f'(x)$	+		+
اطراد $f(x)$	↗		↗

جدول (٣)

من الجدول (٣) يتبيّن أنّ:

الدالة متزايدة في $\Re$

والنقطة $(1,0)$ حرجة فقط (لا توجد عظمى ولا صغرى)

$$f''(x)=-6(1-x)(-1)=6(1-x)$$

$$f''(x)=0\Rightarrow 6(1-x)=0\Rightarrow x=1$$

القيم		1	
إشارة $f''(x)$	+		−
تقعر $f(x)$	∪		∩

جدول (٤)

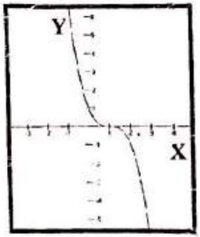
من الجدول (٤) يتبيّن أنّ:

الدالة مقعرة لأعلى $(-\infty,1)$، ولأسفل في $(2,\infty)$

والنقطة $(1,0)$ نقطة انقلاب

ربّما نحتاج لنقطة التقاطع مع Y وهي $(0,1)$

** لاحظ فشل اختبار المشتقة الثانية لتحديد نوع النقطة الحرجة.



درس (14): تطبيقات على القيم الصغرى والعظمى

2017/4/11

<u>خطوات حل مسألة الأمثلية (Optimization problem guidelines):</u>

خطوة (1): اقرأ المسألة بعناية لأكثر من مرّة لتحديد المعطيات والكميات المتغيرة.

خطوة (2)*: مثل الشكل المعبر عن المسألة بوضع المتغيرات في مكانها المناسب بالشكل.

خطوة (3): ابحث عن العلاقة التي تربط بين المتغيرات (متغيرين غالبًا).

خطوة (4): اكتب الدالة المراد جعلها أكبر/أصغر ما يمكن.

خطوة (5): اجعل الدالة بمتغير واحد فقط (باستخدام العلاقة المستنتجة في الخطوة (3)).

خطوة (6): أوجد النقاط الحرجة للدالة.

خطوة (7): وظف اختبار المشتقة الثانية لتحديد نوع النقطة الحرجة (وإذا فشل رجعنا لاختبار المشتقة الأولى).

خطوة (8): حدد قيمة المتغير المناسب تبعًا للفترة المطلوبة.

<u>ملاحظة:</u> 1- خطوة (2) قد لا نحتاجها في المسألة، وأنّ هذه الخطوات قد يتم دمج بعضها في بعض ولا مشكلة في ذلك.

2- في الخطوة (7) يهمنا إشارة المشتقة الثانية وليس الناتج نفسه.

مثال (1): عددان موجبان مجموعهما 20، ومجموع مربّعيهما أصغر ما يمكن. فما هما العددان؟

<u>الحل</u>

نفرض أنّ العدد الأول = x

العدد الثاني = y

لأنّ مجموع العددين 20 فإنّ: $x+y=20 \Rightarrow y=20-x$

الدالة المطلوبة: $f=x^2+y^2$

$$f(x)=x^2+(20-x)^2=x^2+400-40x+x^2=2x^2-40x+400$$

$$f'(x)=4x-40 \Rightarrow f'(x)=0 \Rightarrow 4x-40=0 \Rightarrow x=10$$

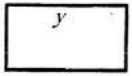
الآن نتحقّق من كون هذه الحرجة عظمى أم صغرى بواسطة اختبار المشتقة الثانية

$$f''(x)=4 \Rightarrow f''(10)=4>0$$

إذن للدالة قيمة صغرى عند $x=10$

فيكون العددان هما: $10,10$

مثال (2): شكّل مستطيل من سلك طوله 20 cm، احسب بعديه، بحيث تكون سطحه أكبر ما يمكن.



نفرض أنّ العدد الأول = x، العدد الثاني = y

$$2x+2y=20 \Rightarrow x+y=10 \Rightarrow y=10-x$$

الدالة المطلوبة: $f(x)=x(10-x)=10x-x^2$

$$f'(x)=10-2x \Rightarrow f'(x)=0 \Rightarrow 10-2x=0 \Rightarrow x=5$$

الآن نتحقّق من كون هذه الحرجة عظمى أم صغرى بواسطة اختبار المشتقة الثانية

$$f''(x)=-2 \Rightarrow f''(5)=-2<0$$

إذن للدالة قيمة عظمى عند $x=10$

فيكون البعدان هما: $5,5$

<u>قوانين المساحات والحجوم لبعض الأشكال الهندسية</u>

ليكن: A مساحة السطح، C المحيط، V الحجم، S مساحة السطح الجانبية، h الارتفاع، r نصف القطر

<u>الأشكال ذات بعدين (الأشكال المستوية):</u>

المثلث	المربع	المستطيل	متوازي الأضلاع
$A=\frac{1}{2}bh$	$A=l^2$	$A=lw$	$A=bh$

المعين	شبه المنحرف	الدائرة	المثلث المتساوي الأضلاع*
$A=\frac{1}{2}ab$	$A=\frac{1}{2}(a+b)h$	$C=2\pi r$ ، $A=\pi r^2$	$h=\frac{\sqrt{3}}{2}s \Rightarrow A=\frac{\sqrt{3}}{4}s^2$

الأشكال ذات ثلاثة أبعاد (المجسمات):

المكعب	متوازي المستطيلات	الأسطوانة الدائرية القائمة	الكرة	المخروط الدائري القائم
$V=a^3$	$V=lwh$	$V=\pi r^2h$	$V=\frac{4}{3}\pi r^3$	$V=\frac{1}{3}\pi r^2h$
$A=6a^2$	$A=2(hl+lw+hw)$	$S=2\pi rh$	$A=4\pi r^2$	$S=\pi r\sqrt{r^2+h^2}$

* لا تستخدم القانون مباشرة لكن يمكنك استخدامه لتعريف الدوال المثلثية الموصول لها، حيث أن زواياه متساوية في القياس 60°.

** المساحة الكلية هي المساحة الجانبية + مساحة القاعدتين. أما المحيط للأشكال غير المنحنية فهو مجموع الأضلاع الخارجية للشكل.

مسائل منوّعة في التكامل غير المحدّد

• أوجد التكاملات الآتية:

(i) $\int \frac{5}{x^2}\left(1+\frac{1}{x}\right)^3 dx$

الحل

نلاحظ أنّ: $\frac{d}{dx}\left(1+\frac{1}{x}\right)=0-\frac{1}{x^2}=\frac{-1}{x^2}$ وهي موجودة في المسألة -ولله الحمد-

وسنخرج العدد (5) خارج التكامل، وسنضرب في (-1) وسنقسم عليه خارجًا:

$$\therefore \int \frac{5}{x^2}\left(1+\frac{1}{x}\right)^3 dx=-5\int \frac{-1}{x^2}\left(1+\frac{1}{x}\right)^3 dx \;=\frac{-5}{4}\left(1+\frac{1}{x}\right)^4+c$$

(ii) $\int \frac{5}{(4x^2-12x+9)^7}\, dx$

الحل

المشكلة واضحة جدًّا وهي عدم وجود مشتقة القوس $(8x-12)$ لذلك فإنّ جُلّ اهتمامنا ينصبّ في تبسيط هذا القوس، وأوّل ما سنفكّر به هو هل يمكن تحويل الحدوديّة ذات الدرجة 2 إلى الدرجة 1 لكي لا نحتاج إلى مشتقة؟! نعم يمكن ذلك في حالة واحدة، وهي أن يكون المقدار مربّعًا كاملاً، وهو بالفعل كذلك إذ أنّ: $4x^2-12x+9=(2x-3)^2$ وعليه:

$$\int \frac{5}{(4x^2-12x+9)^7}\, dx=\int \frac{5}{((2x+3)^2)^7}\, dx=\int \frac{5}{(2x+3)^{14}}\, dx$$

$$=5\int (2x+3)^{-14}dx$$

أصبح التكامل جاهزًا، يحتاج فقط لمشتقة القوس وهي (2) وسنقسم عليها خارجًا لتكون:

$$\int \frac{5}{(4x^2-12x+9)^{14}}\, dx=\frac{5}{2}\int 2(2x+3)^{-14}\, dx=\frac{5}{2}\times\frac{1}{-13}(2x+3)^{-13}+c$$

$$=-\,\frac{5}{26}(2x+3)^{-13}+c$$

(iii) $\int (f\circ g)\, dx$ حيث $f(x)=\cos^2 x \;،\; g(x)=2x$

الحل

$$\int (f\circ g)\, dx=\int f(g(x))\, dx=\int f(2x)\, dx \;=\int \cos^2 2x\, dx$$

نلاحظ أنّ: $\cos^2 2x$ لا توجد لها قاعدة مباشرة ومشتقتها تحتاج لـ $\sin 2x$، لذا سنقوم باختيار علاقة مثلثية مناسبة: ونحن نعلم بأنّ $\cos^2 2x$ ، $\sin^2 2x$ يمكن إيجادها من قوانين ضعف الزاوية حيث: $\cos^2 2x=\frac{1}{2}(1+\cos 4x)$ ومن هنا تخلّصنا من التربيع الذي كان عائقًا في عمليّة التكامل..

$$\therefore \int (f\circ g)\, dx=\int \frac{1}{2}(1+\cos 4x)\, dx=\frac{1}{2}\int (1+\cos 4x)\, dx$$

$$=\frac{1}{2}\left(x+\frac{1}{4}\sin 4x\right)+c=\frac{1}{2}x+\frac{1}{8}\sin 4x+c$$

(iv) $\int (\tan^4 x-1)\, dx$

الحل

المسألة غير جاهزة للتكامل حيث لا توجد لدينا قاعدة لها، لذلك نبحث عن علاقة مثلثية مناسبة، لكن القواعد تأتي مع تربيع دالة الظل مع موجب 1، لذلك ليس لدينا سوى القيام بالعمليات الجبريّة التي تتلاءم مع هذه المسألة، وهو الفرق بين مربّعين، فهيّا بنا...

$$\therefore \int (\tan^4 x-1)\, dx=\int (\tan^2 x-1)(\tan^2+1)\, dx$$

نلاحظ أن القوس الثاني (الأيمن) علاقة معروفة فيكون:

$$\therefore \int (\tan^4 x-1)\, dx=\int (\tan^2 x-1)\sec^2 x\, dx$$

بهذه الصورة لا يمكن أن يكون القوس دالة إذ أننا نحتاج للدالة $\tan x$ مع $\sec^2 x$ خارج القوس، لذلك سنتخلص $\sec^2 x$ بضربها في القوس طالما كان القوس بأسّ واحد، فيكون:

$$\therefore \int (\tan^4 x-1)\, dx=\int (\tan^2 x\sec^2 x-\sec^2 x)\, dx$$

وهنا حصلنا على دالة في مشتقتها (اليسرى)، ودالة أخرى جاهزة التكامل، وبينهما طرح:

$$\therefore \int (\tan^4 x-1)\, dx=\int 2\tan^2 x\sec^2 x\, dx-\int \sec^2 x\, dx$$

$$=\frac{1}{3}\tan^3 x-\tan x+c$$

(v) $\int \frac{\cos 2x}{\cos x - \sin x}\, dx$

الحل

وجود زوايا متعدّدة للدوال المثلثيّة، هنا $(2x)$، (x) يحتّم علينا التفتيش عن العلاقات المثلثيّة التي تخرجنا من هذا المأزق، وبالاطّلاع على المسألة جيّدًا فإنّه يمكننا التفكير في العلاقة $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$ وبذلك نكون مخيّرين في أن نقوم باستبدال البسط إلى ما يساويه من العلاقة السابقة، أو من خلال الضرب في مرافق المقام لكي يختصر مع البسط، والأولى هي الأكثر أمانًا؛ مع حاجتنا فيما بعد للتحليل باستخدام الفرق بين مربّعين للتخلّص من المشكلة الأساسيّة –وهي وجود المقام– فيكون:

$$\int \frac{\cos 2x}{\cos x - \sin x}\, dx = \int \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\cos x - \sin x}\, dx$$

$$= \int \frac{\cancel{(\cos x - \sin x)}(\cos x + \sin x)}{\cancel{\cos x - \sin x}}\, dx$$

$$= \int (\cos x + \sin x)\, dx$$

وهنا نكون قد وصلنا إلى قواعد أساسيّة تكاملاتها معروفة، وسوف نحصل في النهاية على:

$$\therefore \int \frac{\cos 2x}{\cos x - \sin x}\, dx = \sin x - \cos x + c$$

(vi) $\int \sqrt{1+\sin x}\, dx$ حيث $\frac{\pi}{2} < x < \pi$

الحل

مثل هذه المسائل لا تنبئ بخير إطلاقًا، فهي دالة داخل جذر وتحتاج لمشتقة في الخارج، لكن كلّ ذلك معدوم ولا سبيل إلا في التفكير بعمق من خلال الوصول لعلاقة مثلثيّة معقولة يمكن لها تخليصنا من هذا الجبّ الذي نحن فيه. إنّ وجود 1 مع الدالة $\sin x$ أقرب ما يكون مرشدًا للعلاقة $1 - \sin^2 x = \cos^2 x$ والوصول إلى هذه العلاقة ممكن إذا ما قمنا بضرب مرافق المقدار الموجود داخل الجذر وهو $(1 - \sin x)$، فيكون:

$$\int \sqrt{1+\sin x}\, dx = \int \sqrt{(1+\sin x) \times \frac{1-\sin x}{1-\sin x}}\, dx$$

$$\therefore \int \sqrt{1+\sin x}\, dx = \int \sqrt{\frac{1-\sin^2 x}{1-\sin x}}\, dx = \int \frac{\sqrt{1-\sin^2 x}}{\sqrt{1-\sin x}}\, dx$$

$$= \int \frac{\sqrt{\cos^2 x}}{\sqrt{1-\sin x}}\, dx$$

وهنا يبدو جليًا أن البسط يمكن اختصاره إلى $(-\cos x)$ ذلك لأنّ $\sqrt{\cos^2 x} = |\cos x|$ (لأنّ الجذر دليله زوجي لذا ممكن أن تكون موجبة أو سالبة) ولأنّ الزاوية موجودة بالربع الثاني إذن فقيمة المقدار ستساوي $(-\cos x)$ ؛ فيكون:

$$\therefore \int \sqrt{1+\sin x}\, dx = \int \frac{-\cos x}{\sqrt{1-\sin x}}\, dx = \int -\cos x (1-\sin x)^{-\frac{1}{2}}\, dx$$

حيث أنّنا قمنا بتحويل الجذر إلى أس كسري ورفعناه إلى البسط وهنا وضحت الصورة بشكل لا يحتمل لبسًا أنّها دالة في مشتقتها، ونكون قد وصلنا إلى الخطوة التالية:

$$\therefore \int \sqrt{1+\sin x}\, dx = \frac{2}{1}(1-\sin x)^{\frac{1}{2}} + c = 2\sqrt{1-\sin x} + c$$

تدريب: أوجد التكاملات الآتية:

(١) $\int x^{12}\left(\frac{3}{x^2} - \frac{5}{x}\right)^6 dx$ **الجواب:** $-\frac{1}{35}(3-5x)^7 + c$

(٢) $\int \frac{x}{x^3 + 2x^2 + x}\, dx$ **الجواب:** $\frac{1}{3}(x+1)^3 + c$

(٣) $\int (g \circ f)\, dx$ حيث $g(x) = \sin^2 x$ ، $f(x) = 2x$

الجواب: $\frac{1}{2}x - \frac{1}{8}\sin 4x + c$

(٤) $\int \sin^4 x \cos^4 x\, dx$ **الجواب:** $\frac{3}{128}x - \frac{1}{128}\sin 4x + \frac{1}{128}\sin 8x + c$

(٥) $\int \sqrt[3]{x^5 + x^3}\, dx$

(٦) $\int (\sin x + \sin^2 x + \sin^3 x + \sin^4 x)\, dx$

(٧) $\int \frac{\sin 2\theta}{\sqrt{2 + \sin^2 \theta}}\, d\theta$

(٨) $\int (y-3)(y+5)^8\, dy$

تطبيقات هندسية على التكامل غير المحدّد ٢٠١٧/٤/٢٣

ارجع لدرس "تطبيقات هندسيّة في التفاضل للتعرف على الدرس بشكل جيّد
باختصار فإنّ الدرس عبارة عن عملية عكسيّة لما تعلّمناه في التفاضل؛ أي أنّ:
$f(x) = \int m \ dx$ حيث m هي ميل المماس للدالة f عند أي لحظة

وسنحتاج للحالات الابتدائية الممثّلة بنقاط لإيجاد قيم الثوابت كما يتبيّن بالأمثلة.

مثال (١): انظر الكتاب مثال (١) ص ١١٢.

مثال (٢): إذا كانت المشتقة الأولى للدالة f تعطى بالعلاقة: $f'(x) = 3x^2 - 6x - 9$ ،
وكان لمنحنى الدالة f قيمة عظمى محليّة (10). فأوجد الدالة f

الحلّ

$$\int f'(x)dx = \int (3x^2 - 6x - 9)dx \Rightarrow f(x) = x^3 - 3x - 9x + c$$

لإيجاد النقطة المطلوبة، نوجد النقاط الحرجة عندما $f'(x) = 0$:

$$3x^2 - 6x - 9 = 0 \Rightarrow x^2 - 2x - 3 = 0 \Rightarrow (x-3)(x+1) = 0 \Rightarrow x = -1,3$$

نختبر متى تكون للدالة قيمة عظمى محليّة باستخدام اختبار المشتقة الثانية:

$$f''(x) = 6x - 6 \Rightarrow f''(-1) = -12 < 0, f''(3) = 12 > 0$$

إذن يكون للدالة قيمة عظمى محليّة عند النقطة $(-1,10)$

$$\therefore 10 = -1 + 3 + 9 + c \Rightarrow c = -1$$

إذن الدالة هي: $\boxed{f(x) = x^3 - 3x - 9x - 1}$

ملاحظات:

(١) عند التعامل مع مسألة فيها مشتقة ثانية للوصول للدالة الأساسيّة ستحتاج للتكامل مرتين،
لذا تبدأ تسمية الثابت الأوّل بـ C_1 والثاني بـ C_2 أو أي متغيرات ولكن لا تقل أنّهما C معًا.

(٢) الحالات الابتدائية (النقاط) قد لا تُرى ظاهرة في السؤال بشكل مباشر، ولذا يجب البحث عنها، مثل "ابتدأ من السكون": $v(0) = 0$ ، "ابتدأ من نقطة ثابتة" $s(0) = 0$ ، وغير ذلك.

(٣) لا يكفي إيجاد الثابت لإيجاد الدالة؛ بل يجب إعادة كتابتها باستبدال الثابت.

تطبيقات فيزيائية على التكامل غير المحدّد ٢٠١٧/٤/٢٤

ارجع لدرس "تطبيقات فيزيائيّة في التفاضل للتعرف على الدرس بشكل جيّد
باختصار فإنّ الدرس عبارة عن عملية عكسيّة لما تعلّمناه في التفاضل؛ أي أنّ:

$$s = \int vdt, v = \int vdt$$

وسنحتاج للحالات الابتدائية الممثّلة بنقاط لإيجاد قيم الثوابت كما يتبيّن بالأمثلة.

مثال (١): تمرين (١٢) صفحة ١١٩:

$V = \cos t + \sin t$ ، $S = 1 \ cm$ عندما $t = \frac{\pi}{2}$ sec أوجد s عند أي لحظة..

الحل

نكامل طرفي المعادلة بالنسبة للزمن t

$$\int vdt = \int (\cos t + \sin t) \ dt \Rightarrow s = \sin t - \cos t + c$$

$$\because s(\frac{\pi}{2}) = 1 \Rightarrow s(\frac{\pi}{2}) = \sin\frac{\pi}{2} - \cos\frac{\pi}{2} + c$$

$$1 = 1 - 0 + c \Rightarrow c = 0$$

$\therefore$ الإزاحة عند أي لحظة هي: $s = \sin t - \cos t$

مثال (٢): تمرين (٢٩) صفحة ١٢١:

$a = 6t + 2$ ، $s = 4 \ m$ عندما $t = 0$ ، $v = 11 \ m\backslash sec$ عندما $t = 1$ sec أوجد $s(5)$

الحل

نكامل طرفي المعادلة بالنسبة للزمن t

$$\int a \ dt = \int (6t + 2) \ dt \Rightarrow v = 3t^2 + 2t + c_1$$

$$v(1) = 11 \Rightarrow 11 = 3(1)^2 + 2(1) + c_1 \Rightarrow c_1 = 6$$

$\therefore$ السرعة عند أي لحظة: $V = 3t^2 + 2t + 6$

$$\int V \ dt = \int (3t^2 + 2t + 6) \ dt \Rightarrow S = t^3 + t^2 + 6t + c_2$$

$$s(0) = 4 \Rightarrow 4 = 0 + 0 + 0 + c_2 \Rightarrow c_2 = 0$$

$\therefore$ الإزاحة عند أي لحظة هي: $s = t^3 + t^2 + 6t$

$\therefore$ الإزاحة عندما $t = 5$ تساوي: $s(5) = (5)^3 + (5)^2 + 6(5) = 180 \ m$

التكامل المحدّد

٢٠١٧/٤/٢٥

النظرية الأساسية للتفاضل والتكامل

إذا كانت الدالة $f(x)$ متصلة في الفترة $[a,b]$، وكانت الدالة $F(x)$ دالة أصلية (عكس المشتقة) لها في هذه الفترة، فإن:

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big]_a^b = F(b) - F(a)}$$

خواص التكامل المحدّد

(١) إذا كانت الدالة $f(x)$ قابلة للتكامل في الفترة $[a,b]$، وكان $k \in \mathbb{R}$ فإن:

$$\int_a^b (kf)(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$$

(٢) إذا كانت الدالة $f(x)$، $g(x)$ قابلتين للتكامل في الفترة $[a,b]$، فإن:

$$\int_a^b (f \pm g)(x)dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$$

(٣) إذا كانت $c \in [a,b]$ الدالة $f(x)$ قابلة للتكامل في الفترتين: $[a,c]$، $[c,b]$ فإن:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx \pm \int_c^b f(x)dx$$

ملاحظة: (١) يمكن أن تكون c خارج الفترة المطلوبة وتبقى الخاصية صحيحة.

(٢) يمكن باستخدام خاصية (٣) الوصول إلى الخاصيتين الآتيتين:

(i) $\int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx$ (ii) $\int_a^a f(x)dx = 0$

تدريبات

(١) جد قيمة التكاملات الآتية: (2.75 ،1 ،4)

(i) $\int \frac{\sin 2x}{\sqrt{\cos^2 x - \cos^4 x}}dx$

(ii) $\int_0^2 |1-z|dz$

(iii) $\int_{\frac{3}{2}} 2x[[\frac{x}{2}]]dx$

(٢) إذا كان $\int_1^6 g(x)dx = 20$، فأوجد قيمة: $\int_1^6 (g(x)+3)dx$ (35)

(٣) إذا كان: $\int_{-4}^{a} h(y)dy = 3$، $\int_{4}^{a} (h(y)+a)dy = 15$ فما قيمة a ؟ (-6,2)

(٤) إذا كان $\int_{-1}^{-2} \frac{4b}{x^3}dx = 3$ فما قيمة b؟ (2)

(٥) إذا علم أن قيمة $\int_{\frac{\pi}{6}}^{k} \frac{\sec^2 x}{\cot x}dx$ هي $(\frac{4}{3})$، فما قيمة k حيث $k \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right)$؟ $(\frac{\pi}{3})$

(٦) احسب قيمة $\int_{-2}^{3} w(t)dt$ إذا كان: $w(t) = \begin{cases} t^2+3, t \le 1 \\ 9t-5, t > 1 \end{cases}$ (38)

(٧) ما قيمة الثابت c الموجب الذي يجعل: $\int_3^c u\,du = 8$؟ (5)

(٨) إذا كان: $\int_0^2 h(x)dx = 3$، $\int_1^0 h(x)dx = -3$ حيث $h(x) = ax+b$، حيث a,b ثوابت حقيقية، فاحسب قيمة ما يلي: (4.5 و -3 ،-4)

(i) $\int_1^2 (h(x)-4)dx$ دون استخدام الثوابت a,b

(ii) قيمة الثوابت a,b

(٩) ضع التكاملات الآتية في تكامل واحد:

(i) $I = \int_c^{c+h} g\,dx - \int_c^h g\,dx$

(ii) $I = \int_c^a g\,dx + \int_a^b g\,dx - \int_c^b g\,dx - \int_a^d g\,dx$

(١٠) احسب قيمة: $(\frac{3}{2})$

(i) $\int_8^8 12\sqrt{4x^3-5}dx$ (ii) $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 4\theta}{\cos 2\theta}d\theta$

(١١) إذا كان: $\int f(x)dx = 2$، $\int (2x+5f(x))dx = 4$ فأوجد قيمة: $\int (2-3f(x))dx$

(-12)