مجموعة(١):

(١) إذا كان $y = sinax$، حيث $a > 0$ وكان $\frac{d^2y}{dx^2} = -16y$ ، فما قيمة الثابت a ؟

(٢) إذا كان $g(x) = cotx + kx$، فما قيمة k التي تحقق $g'\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0$ ؟

(٣) إذا كان $g(x) = (a + x)^3 + 4$ ، وكان $g''(1) = -18$، فما قيمة a ؟

الحل

(١)

$y = \sin ax$

$\frac{dy}{dx} = a\cos ax$

$\frac{d^2y}{dx^2} = -a^2 \sin ax$

$\frac{d^2y}{dx^2} = -16y$

$\therefore a^2 = 16 \Rightarrow \boxed{a = 4}$

لأن $a > 0$

(٢)

$g(x) = \cot x + kx$

$g'(x) = -\csc^2 x + k$

$g'\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\csc^2 \frac{\pi}{4} + k = 0$

$-2 + k = 0$

$\boxed{k = 2}$

(٣)

$g(x) = (a+x)^3 + 4$

$g'(x) = 3(a+x)^2$

$g''(x) = 6(a+x)$

$g''(1) = 6(a+1) = -18$

$\Rightarrow a+1 = \frac{-18}{6}$

$a+1 = -3$

$\boxed{a = -4}$

مجموعة(٢):

(١) إذا كان $y = csc^2x$ ، $z = y^2$ ، فأوجد $\left(\frac{dz}{dx}\right)_{x=\pi/4}$.

(٢) إذا كان $f(x) = sin^2x \ , \ g(x) = \sqrt{x}$ ، فأوجد $(fog)'\left(\frac{\pi^2}{4}\right)$.

(٣) إذا كان $y = tanx$ فأثبت أن: $\frac{d^2y}{dx^2} - 2y\left(\frac{dy}{dx}\right) = 0$.

(٤) إذا كان $y^2 = x^2(3+x)$ فأثبت أن: $y\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right) + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - 3x = 3$

(٥) إذا كان $xy + y^2 = 7$ فأثبت أن: $(x+2y)\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right) + 2\left(\left(\frac{dy}{dx}\right) + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right) = 0$

(١)

$z = y^2 \qquad y = csc^2 x$

$\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy} \cdot \frac{dy}{dx}$

$= 2y \cdot [2csc x\,(-csc x\,Cot x)]$

$= 2(csc^2 x)\,[-2csc^2 x\,Cot x]$

$= -4\,csc^4 x\,Cot x$

$x = \frac{\pi}{4} \Rightarrow \frac{dz}{dx} = -4\,csc^4 \frac{\pi}{4}\,Cot \frac{\pi}{4}$

$= -4(4)(1) = -16$

(٢)

$f(x) = Sin^2 x \qquad g(x) = \sqrt{x}$

$(fog)'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$

$= 2\,Sin\sqrt{x}\,Cos\sqrt{x} \cdot \left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)$

$(fog)'\left(\frac{\pi^2}{4}\right) = 2\,Sin\frac{\pi}{2}\,Cos\frac{\pi}{2} \cdot \left(\frac{1}{2\left(\frac{\pi}{2}\right)}\right) = 0$

(٣)

$y = tan x$

$\frac{dy}{dx} = Sec^2 x$

$\frac{d^2y}{dx^2} = 2Sec^2 x\,tan x$

$\frac{d^2y}{dx^2} = 2\left(\frac{dy}{dx}\right)(y)$

$\frac{d^2y}{dx^2} - 2y\frac{dy}{dx} = 0$

(٤)

$y^2 = x^2(3+x)$

$y^2 = 3x^2 + x^3$

نشتق ضمنياً:

$2yy' = 6x + 3x^2$

نعيد الاشتقاق:

$2yy'' + 2(y')^2 = 6 + 6x$

$(\div 2)$

$yy'' + 2(y')^2 = 3 + 3x$

$yy'' + 2(y')^2 - 3x = 3$

(٥)

$xy + y^2 = 7$

نشتق ضمنياً:

$xy' + y + 2yy' = 0$

$(x+2y)\,y' + y = 0$

نعيد الاشتقاق:

$(x+2y)y'' + y'(1+2y') + y' = 0$

$(x+2y)y'' + y' + 2(y')^2 + y' = 0$

$(x+2y)y'' + 2y' + 2(y')^2 = 0$

$(x+2y)y'' + 2(y' + (y')^2) = 0$

مجموعة(٣):

(١) أوجد ناتج : $\lim\limits_{x \to -1} \frac{x^3 \sin(x+1)}{x+1}$ $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\tan(2x)\sin(4x)}{x^2}$

$\lim\limits_{x+1 \to 0} x^3 \cdot \left(\frac{\sin(x+1)}{x+1}\right)$

$(-1)^3 \ (1) = -1$

$\lim\limits_{x \to 0} \frac{\tan 2x}{x} \cdot \lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin(4x)}{x}$

$(2) \quad (4) = 8$

مجموعة(٤):

(١) متى يكون ميل المماس للدالة $h(x) = -2ax^3 + 4$ سالباً .

(٢) ما قياس الزاوية التي يصنعها مماس المنحنى $f(x) = \frac{x}{x-4}$ مع الاتجاه الموجب لمحور x عند النقطة(2,-1) الواقعة عليه.

(٣) إذا كان المماس للمنحنى $y = f(x)$ عند النقطة (x_1, y_1) الواقعة عليه عمودياً على المستقيم $x + y = 4$ فما قيمة $f'(x_1)$.

(٤) إذا كان ميل المماس لمنحنى $f(x)$ عند النقطة $(2, -3)$ الواقعة عليه يساوي 0 فأوجد معادلة المماس والعمودي.

(٥) إذا كانت $x = 1$ معادلة مماس لمنحنى $f(x)$ عند نقطة معينة. فأوجد ميله وميل المستقيم العمودي عليه.

(١) يكون المماس سالباً عندما $f'(x) < 0$

$-6ax^2 < 0$

ليكون هذا المقدار سالباً لابد أن يكون $a > 0$

حيث أن x^2 دائماً موجب فيكون

$-6ax$ سالباً عندما $a > 0$

(٢) $f(x) = \frac{x}{x-4} \Rightarrow f'(x) = \frac{(x-4)(1) - x(1)}{(x-4)^2}$

$\Rightarrow f'(x) = \frac{-4}{(x-4)^2}$

$m = \tan\theta = \frac{-4}{(2-4)^2} = -1$

$\Rightarrow \theta = \tan^{-1}(-1) = 135 = \frac{3\pi}{4}$

(٣) نوجد ميل المستقيم $x + y = 4$

$y = 4 - x$

$\therefore$ ميل المستقيم $m = -1$

$\because$ ميل المماس عمودي على المستقيم:

$\therefore$ ميل المماس $= 1$

$\therefore f'(x_1) = 1$

(٤) $\because$ ميل المماس = صفر

$\therefore$ المماس أفقي ومعادلته $y = -3$

أما معادلة العمودي عليه فهي $x = 2$

(٥) $\because$ $x = 1$ معادلة مماس (خط رأسي)

$\therefore$ ميله = (غير معرف)

$\therefore$ ميل المستقيم العمودي عليه = صفر

مجموعة(٥):

(١) إذا كانت $x^2 + 2x = y^2 + 4y + 3$ فأوجد معادلة العمودي عند النقطة $(2, -5)$ الواقعة عليه.

(٢) أوجد معادلة العمودي لمنحنى $y = 2x\tan\pi x$ عندما $x = 1$.

(٣) أوجد معادلة المماس والعمودي لمنحنى $3xy + y^2 = -9$ عند النقطة $(2, -3)$ الواقعة عليه.

(٤) أوجد معادلة المماس والعمودي لمنحنى $x + xy = \sin y + 1$ عند النقطة $(1, 0)$ الواقعة عليه.

الحل

(١) $x^2+2x=y^2+4y+3$

نشتق:

$2x+2=2yy'+4y'$

$(\div 2)$

$x+1=yy'+2y'$

$y'=\frac{x+1}{y+2} \Rightarrow m=\frac{2+1}{-5+2}=\frac{3}{-3}=-1$

∴ الميل العمودي $m_\perp=1$

معادلة العمودي: $y-y_1=m_\perp(x-x_1)$

$y+5=1(x-2)$

$y-x+7=0$

(٢) $x=1 \Rightarrow y=2(1)\tan\pi(1)=0$

∴ النقطة هي $(1,0)$

$m=y'=2x[\sec^2\pi x\cdot\pi]+2\tan\pi x$

$=2(1)[\sec^2\pi\cdot\pi]+2\tan\pi$

$=2\pi+0=2\pi$

∴ $m_\perp=\frac{-1}{2\pi}$

$y-y_1=m_\perp(x-x_1)$

$y-0=\frac{-1}{2\pi}(x-1)$

$2\pi y=-x+1$

$2\pi y+x-1=0$

(٣) $3xy+y^2=-9$

نشتق

$3xy'+3y+2yy'=0$

$3xy'+2yy'=-3y$

$y'=\frac{-3y}{3x+2y}$

$m=\frac{-3(-3)}{3(-2)+2(-3)}=\frac{9}{0}$ غير معرف

∴ معادلة المماس: $x=2$

معادلة العمودي: $y=-3$

(٤) $x+xy=\sin y+1$

نشتق:

$1+xy'+y=\cos y\cdot y'$

$xy'-\cos y\,y'=-1-y$

$y'=\frac{-1-y}{x-\cos y}$

$m=\frac{-1-0}{1-\cos 0}=\frac{-1}{0}$

غير معرف

∴ معادلة المماس: $x=1$

ومعادلة العمودي: $y=0$

مجموعة(٦):

(١) يتحرك جسم وفق العلاقة $S = 24 + 12t - t^3$ حيث S بالأمتار، و t بالثواني. أوجد تسارع الجسم عندما يسكن لحظياً .

(٢) يتحرك جسم وفق العلاقة بين الإزاحة والزمن: $S = sint + cost$. أوجد التسارع عندما تنعدم السرعة.

(٣) قذف جسم رأسياً لأعلى وفق العلاقة: $S=64t-16t^2$ أوجد :

(أ) متى يعكس الجسم اتجاه حركته. (ب) وما أقصى ارتفاع يصله.

الحل

(١)

$S = 24 + 12t - t^3$

$v = 12 - 3t^2$

$a = -6t$

يسكن الجسم لحظياً عندما :

$v = 0 \Rightarrow 12 - 3t^2 = 0$

$\div 3 \Rightarrow 4 - t^2 = 0$

$(2-t)(2+t) = 0$

$t = 2 \qquad t = -2$ مرفوض

$\therefore a = -6t = -6(2) = -12 \ m/s^2$

(٢)

$S = \sin t + \cos t$

$v = \cos t - \sin t$

$a = -\sin t - \cos t$

عندما تنعدم السرعة :

$v = 0 \Rightarrow \cos t - \sin t = 0$

$\cos t = \sin t$

$t + t = \frac{\pi}{2}$

$2t = \frac{\pi}{2} \Rightarrow t = \frac{\pi}{4}$

$\therefore a = -\sin\frac{\pi}{4} - \cos\frac{\pi}{4} = -\sqrt{2} \ m/s^2$

(٣)

$S = 64t - 16t^2$

$v = 64 - 32t$

$a = -32$

(أ) يعكس الجسم اتجاه حركته أي (نصل لأقصى ارتفاع)

$v = 0 \Rightarrow 64 - 32t = 0$

$t = \frac{64}{32} = 2 \ sec$

(ب) أقصى ارتفاع يصل له الجسم.

$S = 64(2) - 16(2)^2 = 64 \ m$

مجموعة(٧):

(١) عين موضع النقاط الواقعة على $y = \sin x + \frac{\sqrt{3}}{2}$ والتي يكون عندها $\frac{dx}{dt} = 2cm/s, \frac{dy}{dt} = 1cm/s$.

(٢) إذا كانت نقطة تتحرك على $xy = -25$ فأوجدها في اللحظة التي يكون فيها $\frac{dx}{dt} = \frac{dy}{dt}$.

(٣) مثلث متطابق الأضلاع، يزداد طول ضلعه بمعدل 0.1 cm/min فأوجد معدل الزيادة في مساحته عندما يبلغ طول ضلعه 10cm .

(٤) حوض لتربية الأسماك بعدا قاعدته 40cm , 60cm وارتفاعه 30cm يتسرب منه الماء بمعدل 0.03 cm^3/sec أوجد معدل التغير في ارتفاع الماء عندما يبلغ ارتفاع الماء في الحوض 20cm .

(٥) يرتفع بالون رأسياً إلى أعلى بمعدل ثابت (سرعة ثابتة) 42 m/min فإذا تم رصد البالون من رجل على الأرض يبعد 150m عن مسقط البالون. فأوجد معدل التغير في زاوية ارتفاع نظر الراصد عندما يبلغ ارتفاع البالون 150m .

الحل

(١)

$y = \sin x + \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\frac{dy}{dt} = \cos x \frac{dx}{dt}$

$1 = \cos x \,(2) \Rightarrow \cos x = \frac{1}{2}$

$\Rightarrow x = \frac{\pi}{3} \Rightarrow y = \sin\frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$

∴ النقطة هي $(\frac{\pi}{3}, \sqrt{3})$

(٢)

$xy = -25$

نشتق

$x\frac{dy}{dt} + y\frac{dx}{dt} = 0$

$x\frac{dx}{dt} + y\frac{dx}{dt} = 0$

$\frac{dx}{dt}(x+y) = 0$

$\Rightarrow x + y = 0 \Rightarrow \boxed{y = -x}$

نعوض في $xy = -25$

$x(-x) = -25$

$x^2 = 25$

$x = \pm 5$

∴ النقاط هي: $(5,-5), (-5,5)$

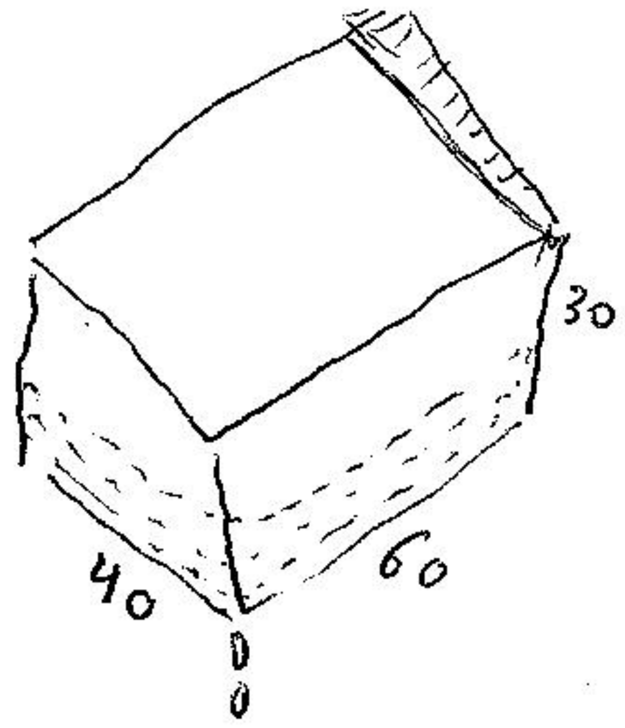
(٣) مساحة المثلث متطابق الأضلاع:

$A = \frac{\sqrt{3}}{4}x^2$

$\frac{dA}{dt} = \frac{\sqrt{3}}{2}x\frac{dx}{dt}$

$= \frac{\sqrt{3}}{2}(10)(0.1) = \frac{\sqrt{3}}{2} cm^2/min$

(٤)



$V = (40)(60)(z)$

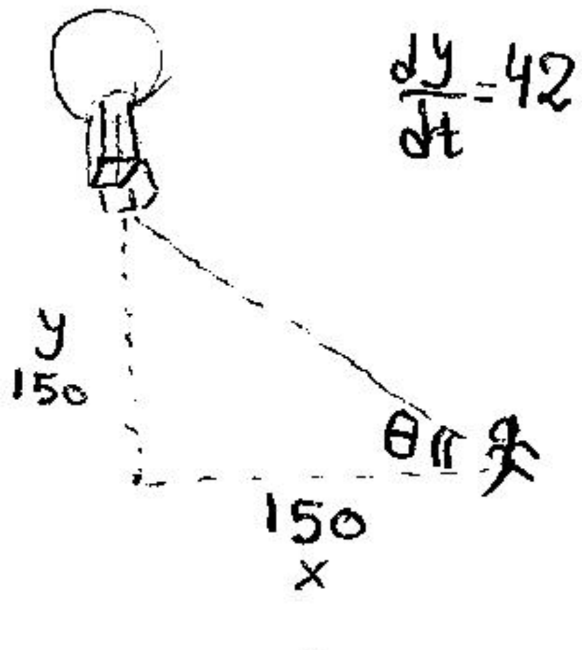
$\frac{dV}{dt} = 2400\frac{dz}{dt}$

$-0.03 = 2400\frac{dz}{dt}$

$\frac{dz}{dt} = \frac{-0.03}{2400} = \ldots$

(٥)

$\frac{dy}{dt} = 42 \qquad \frac{d\theta}{dt} = ?$



$\tan\theta = \frac{y}{x} = \frac{150}{150} = 1$

$\theta = 45°$

عند الارتفاع يتغير y ويتغير قياس الزاوية

$\therefore \tan\theta = \frac{y}{150}$

نشتق:

$\sec^2\theta \frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{150}\frac{dy}{dt}$

$\sec^2 45 \frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{150}(42)$

$2\frac{d\theta}{dt} = \frac{42}{150}$

$\frac{d\theta}{dt} = \frac{42}{300} = \frac{7}{50}$

m/min^2