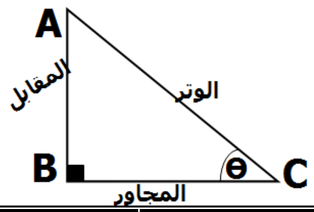
مملكة البحرين

وزارة التربية والتعليم

مدرسة أحمد العمران الثانوية للبنين

# ملخص قوانين مقرر ريض 364

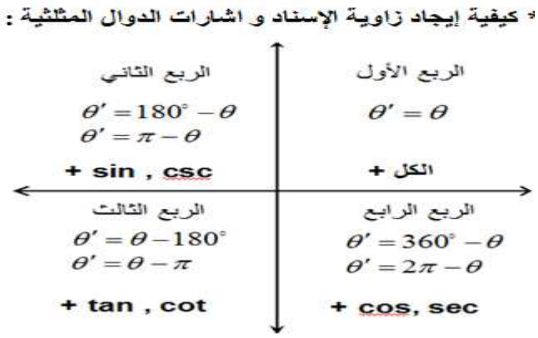
## الفصل الأول : المتطابقات والمعادلات المثلثية

| | | |
|---|---|---|
| قاعدة فيثاغورث |  | **نظرية فيثاغورث**<br>لإيجاد أي ضلع مجهول في مثلث قائم الزاوية<br>$(AB)^2+(BC)^2=(AC)^2$ |

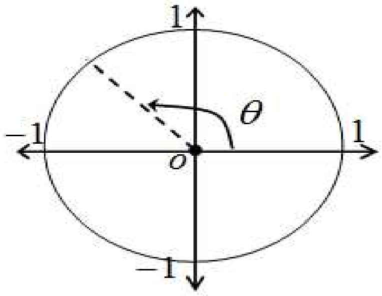
| | | | |
|---|---|---|---|
| الدوال المثلثية الأساسية | $\sin\theta = \dfrac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}}$ | $\cos\theta = \dfrac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}}$ | $\tan\theta = \dfrac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}} = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$ |
| مقلوبات الدوال الأساسية | $\csc\theta = \dfrac{1}{\sin\theta}$ | $\sec\theta = \dfrac{1}{\cos\theta}$ | $\cot\theta = \dfrac{1}{\tan\theta} = \dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}$ |

### تذكر

**قاعدة إشارات الدوال المثلثية**




**الدوال المثلثية للزوايا الربعية**




$\sin\theta = y, \cos\theta = x, \tan\theta = \dfrac{y}{x}$

**التحويل من القياس بالدرجات إلى الراديان و العكس**

| | |
|---|---|
| درجات ⇐ راديان<br>بالضرب في $\dfrac{\pi}{180^\circ}$ | راديان ⇐ درجات<br>بالضرب في $\dfrac{180^\circ}{\pi}$ |

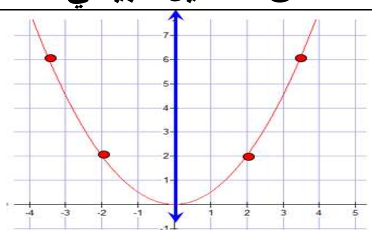
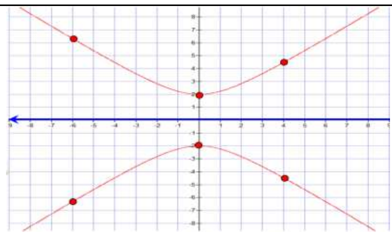
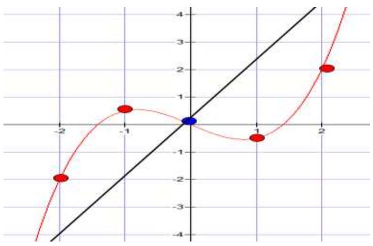
| | | | |
|---|---|---|---|
| المتطابقات الرئيسية | $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$<br>ومنه نستنتج :<br>$1-\sin^2\theta=\cos^2\theta$<br>$1-\cos^2\theta=\sin^2\theta$ | $1+\tan^2\theta=\sec^2\theta$<br>ومنه نستنتج :<br>$\tan^2\theta=\sec^2\theta-1$<br>$\sec^2\theta-\tan^2\theta=1$ | $1+\cot^2=\csc^2\theta$<br>ومنه نستنتج :<br>$\cot^2\theta=\csc^2\theta-1$<br>$\csc^2\theta-\cot^2\theta=1$ |
| الدوال المثلثية للزاويتين المتتامتين | $\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\cos\theta$ | $\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\sin\theta$ | $\tan\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\cot\theta$ |
| الدوال الزوجية والفردية | $\sin(-\theta)=-\sin\theta$ | $\cos(-\theta)=\cos\theta$ | $\tan(-\theta)=-\tan\theta$ |
| متطابقات المجموع و الفرق | $\sin(x\pm y)=\sin x\cos y\pm\cos x\sin y$<br>$\cos(x\pm y)=\cos x\cos y\mp\sin x\sin y$<br>$\tan(x\pm y)=\dfrac{\tan x\pm\tan y}{1\mp\tan x.\tan y}$ | | |
| متطابقات ضعف الزاوية | $\sin 2\theta=2\sin\theta\cos\theta$<br>ومنه نستنتج :<br>$\sin 4\theta=2\sin 2\theta\cos 2\theta$<br>$\sin\theta=2\sin\frac{1}{2}\theta\cos\frac{1}{2}\theta$ | $\cos 2\theta=\cos^2\theta-\sin^2\theta$<br>$=2\cos^2\theta-1$<br>$=1-2\sin^2\theta$<br>ومنه نستنتج :<br>$\cos 4\theta=$<br>$\cos\theta=$ | $\tan 2\theta=\dfrac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}$<br>ومنه نستنتج :<br>$\tan 4\theta=$<br>$\tan\theta=$ |
| متطابقات نصف الزاوية | $\sin\frac{\theta}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{2}}$<br>ومنه نستنتج :<br>$\sin\theta=$ | $\cos\frac{\theta}{2}=\pm\sqrt{\frac{1+\cos\theta}{2}}$<br>ومنه نستنتج :<br>$\cos\theta=$ | $\tan\frac{\theta}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}}$<br>ومنه نستنتج :<br>$\tan\theta=$ |

# الفصل الثاني : تحليل الدوال

## إيجاد مقطعي المحورين

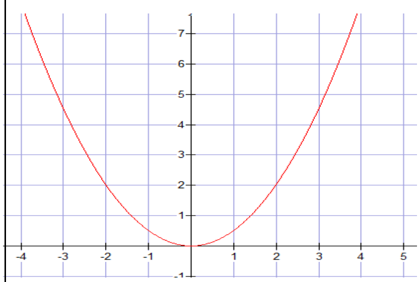
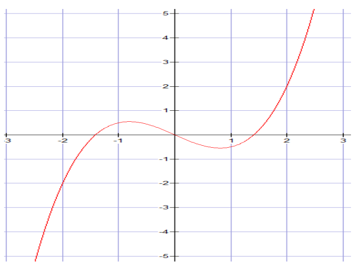
| | بيانياً | جبرياً |
|---|---|---|
| مقطع $X$ ( أصفار أو جذور الدالة ) | التقاطع مع محور $X$ | نعوض عن $y=0$ ونوجد قيم $x$ |
| مقطع $Y$ | التقاطع مع محور $Y$ | نعوض عن $x=0$ |

## إختبارات التماثل بين الدوال والعلاقات

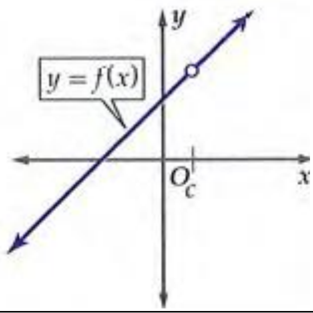
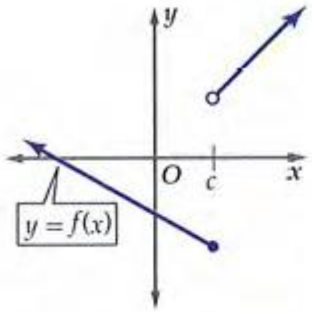
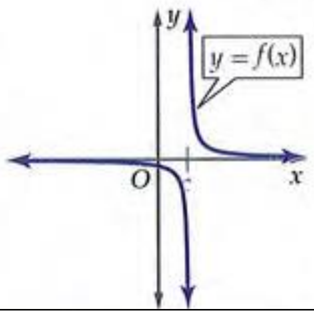
| التماثل | عددياً | من التمثيل البياني | جبرياً |
|---|---|---|---|
| حول محور Y | لكل نقطة $(x, y)$ على المنحنى فإن النقطة $(-x, y)$ واقعة أيضاً عليه |  | تعويض $-x$ مكان $x$ يعطي معادلة مكافئة |
| حول محور X | لكل نقطة $(x, y)$ على المنحنى فإن النقطة $(x, -y)$ واقعة أيضاً عليه |  | تعويض $-y$ مكان $y$ يعطي معادلة مكافئة |
| حول نقطة الأصل | لكل نقطة $(x, y)$ على المنحنى فإن النقطة $(-x, -y)$ واقعة أيضاً عليه |  | تعويض $-x$ مكان $x$ و $-y$ مكان $y$ يعطي معادلة مكافئة |



## تحديد الدوال الزوجية والفردية

| | الدالة الزوجية | الدالة الفردية |
|---|---|---|
| بيانياً | متماثلة حول محور Y  | متماثلة حول نقطة الأصل  |
| جبرياً | $f(-x)=f(x)$ | $f(-x)=-f(x)$ |

## أنواع الانفصال

| النوع | أولاً : الإنفصال النقطي | ثانياً : الإنفصال القفزي | ثالثاً : الإنفصال اللانهائي |
|---|---|---|---|
| مثال |   |   |   |
| | النهاية موجودة عند النقطة لكن **إما** الدالة غير معرفة عند x=c **أو :** $\lim\limits_{x\to c} f(x) \neq f(c)$ | النهايتين من اليمين و اليسار موجودتين لكن غير متساويتين | النهاية غير موجودة عند النقطة $\lim\limits_{x\to c} f(x) = \pm\infty$ |
| **هل هي قابلة للإزالة** | نعم | لا | لا |



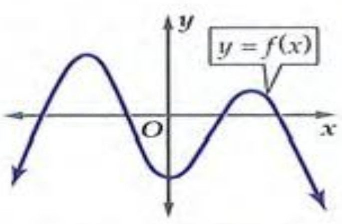
## اختبار الاتصال

تكون الدالة $f(x)$ متصلة عند $x = c$ إذا تحقق كل مما يلي :

**أولاً :** الدالة معرفة عند $x = c$ أي $f(c) \in \Re$

**ثانياً :** للدالة نهاية عند $x = c$ أي $\lim\limits_{x\to c^+} f(x) = \lim\limits_{x\to c^-} f(x) \in \Re$

**ثالثاً :** $\lim\limits_{x\to c} f(x) = f(c)$




## تقريب أصفار الدالة

يكون $x = c$ صفر للدالة $f(x)$ إذا كانت $f(c) = 0$

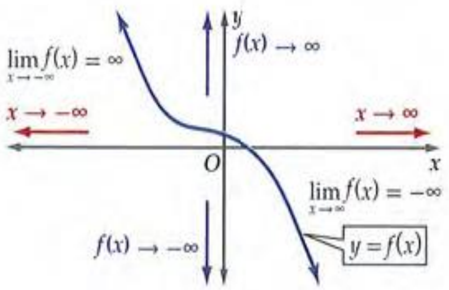
<u>**لمعرفة الأعداد الصحيحة المتتالية**</u> التي ينحصر بينها الأصفار الحقيقية للدالة في فترة ما :

نعوض عن الاعداد الصحيحة بالدالة واذا تغيرت قيمة الدالة من موجب لسالب أو العكس فيكون هناك صفر حقيقي بين هذين العددين الصحيحين

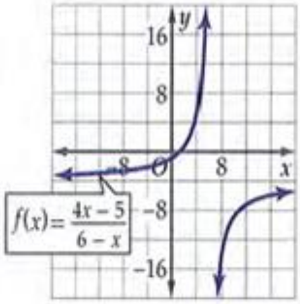
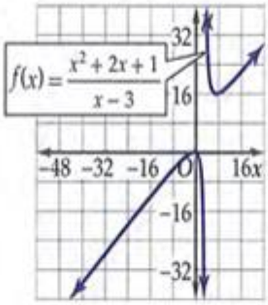
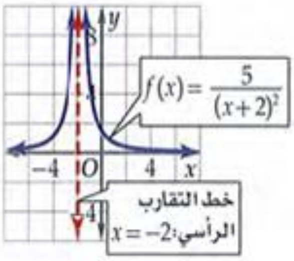
## سلوك طرفي التمثيل البياني

هو وصف قيم الدالة عندما تزاد قيم $x$ أو تنقص بلا حدود

أي عندما تقترب من $\infty, -\infty$

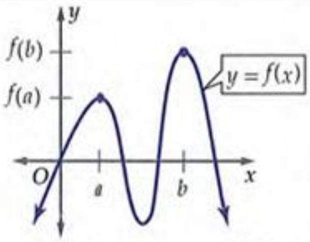


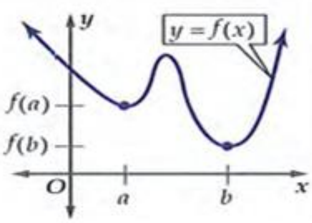
## إيجاد خطوط التقارب الرأسية والأفقية

| | درجة البسط = درجة المقام | درجة البسط > درجة المقام | درجة البسط < درجة المقام |
|---|---|---|---|
| مثال عليها |  |  |  |
| خطوط التقارب الرأسية | $x = c$ : حيث $c$ أحد أصفار المقام<br>$\lim_{x\to c^-} f(x) = \pm\infty$ أو $\lim_{x\to c^+} f(x) = \pm\infty$ | | |
| خطوط التقارب الأفقية | يوجد خط أفقي معادلته $y = \dfrac{\text{معامل أكبر اس بالبسط}}{\text{معامل أكبر اس بالمقام}}$ | لا يوجد خطوط تقارب أفقية | يوجد خط تقارب أفقي معادلته $y = 0$ |
| | $\lim_{x\to-\infty} f(x) = c$ أو $\lim_{x\to\infty} f(x) = c$ | | |



## إيجاد القيم القصوى بيانياً




| | | | |
|---|---|---|---|
| $f(b)$ عظمى مطلقة | $f(a)$ عظمى محلية | $f(b)$ صغرى مطلقة | $f(a)$ صغرى محلية |

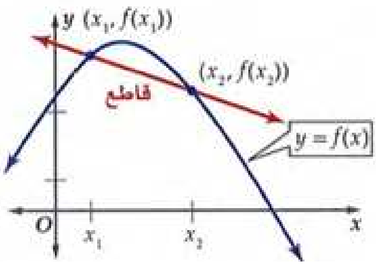
## متوسط معدل التغير

متوسط معدل التغير $(m)$ للدالة $f(x)$ في الفترة $[x_1 , x_2]$

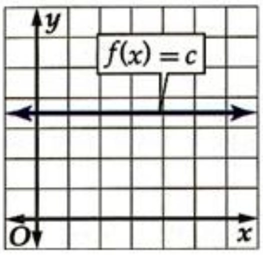
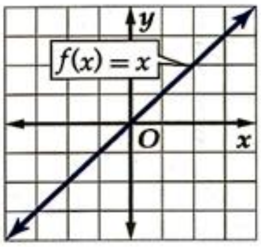
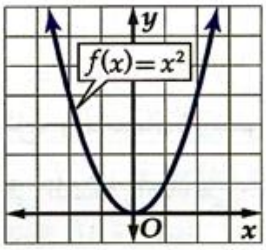
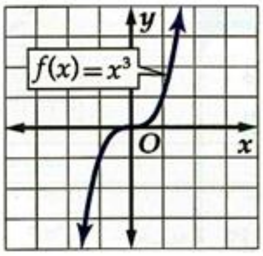
$$\boxed{m = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}}$$

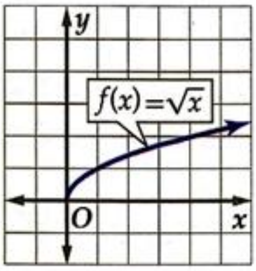
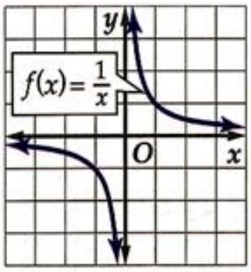
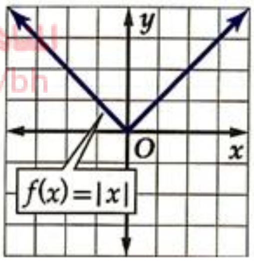
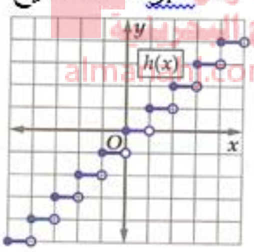
الدالة تزايدية $\Rightarrow$ موجب

الدالة تناقصية $\Rightarrow$ سالب



## الدوال الأم

| النوع | (1) الدالة الثابتة | (2) الدالة الخطية | (3) الدالة التربيعية | (4) الدالة التكعيبية |
|---|---|---|---|---|
| تمثيلها البياني |   |   |   |   |

| النوع | (5) دالة الجذر التربيعي | (6) دالة المقلوب | (7) دالة القيمة المطلقة | (8) الدالة الدرجية |
|---|---|---|---|---|
| تمثيلها البياني |   |   |   | دالة اكبر عدد صحيح   |



## التحويلات الهندسية للدوال

جميع ما يلي هو تحويل للدوال الأم $f(x)$

| التحويل | التغير في التمثيل البياني للدالة | |
|---|---|---|
| التمدد | $g(x)=a.f(x)$ أو $g(x)=f(ax)$<br>$a>1$<br>توسع رأسي ( تضييق أفقي ) | <br>$0<a<1$<br>تضييق رأسي ( توسع أفقي ) |
| الإنعكاس صـ 92 | $g(x)=-f(x)$ : إنعكاس حول محور $x$ | $g(x)=f(-x)$ : إنعكاس حول محور $y$ |
| الانسحاب (الإزاحة) | إزاحة أفقية $f(x\pm h)$<br>+ : إزاحة لليسار ، − : إزاحة لليمين | إزاحة رأسية $f(x)\pm k$<br>+ : إزاحة للأعلى ، − : إزاحة للأسفل |

## صيغة الرأس

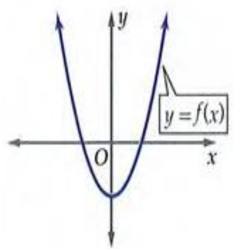
لكتابة الدالة التربيعية $f(x)=ax^2+bx+c$ بصيغة الرأس وذلك لتحديد التحويلات الهندسية عليها فيكون على الشكل التالي :

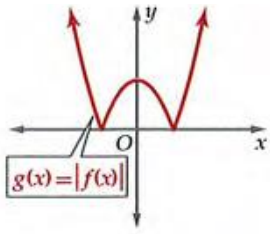
$f(x)=a(x-h)^2+k$ حيث رأس المنحنى هو $(h,k)$ ، $h=x=\dfrac{-b}{2a}$ و $k=y=f(h)$

## تحويلات القيمة المطلقة

**أولاً :** $g(x)=|f(x)|$

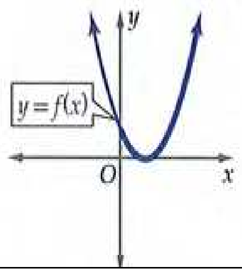
نستبدل الجزء الموجود أسفل المحور X بعمل انعكاس له على محور X

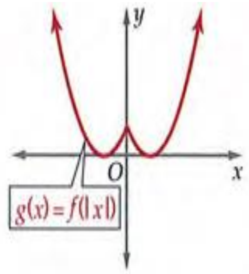



**ثانياً :** $h(x)=f(|x|)$

نستبدل الجزء الموجود يسار المحور Y بعمل انعكاس للجزء الأيمن على محور Y




## العمليات على الدوال



| العملية | الجمع $(f+g)(x)$ | الطرح $(f-g)(x)$ | الضرب $(f.g)(x)$ | القسمة $(\frac{f}{g})(x)$ |
|---|---|---|---|---|
| الناتج | $f(x)+g(x)$ | $f(x)-g(x)$ | $f(x).g(x)$ | $\frac{f(x)}{g(x)}$ |
| المجال | تقاطع مجال الدالتين $f\,,g$ | | | تقاطع مجال الدالتين $f\,,g$ ماعدا أصفار المقام $g$ |

## تركيب دالتين

$f\,,g$ دالتين فإن دالة التركيب $f\circ g$ هي : $(f\circ g)(x)=f(g(x))$

**<u>مجال دالة التركيب :</u>**

قيم $x$ في مجال $g$ بشرط أن تكون صورها $g(x)$ موجودة بمجال $f$

**وبشكل آخر** ( مجال $g$ $\cap$ مجال الدالة الناتجة من التركيب )

## إستراتيجية إيجاد الدالة العكسية

للدالة $f(x)$ فلإيجاد الدالة العكسية $f^{-1}(x)$ نتبع ما يلي :

1) حدد من التمثيل البياني للدالة $f(x)$ وإختبار الخط الأفقي هل يوجد دالة عكسية أم لا .

2) ضع $y$ مكان $f(x)$ $\Leftarrow$ 3) بدل موقع المتغيرين $x, y$

4) أوجد $y$ بدلالة $x$ $\Leftarrow$ 5) ضع $f^{-1}(x)$ مكان $y$

6) ضع القيد على الدالة العكسية بحيث يكون مجال $f^{-1}(x)=$ مدى $f(x)$

## العلاقة بين الدالة ودالتها العكسية :

تكون $f\,,g$ دالة و معكوسها إذا كان : $[f\circ g](x)=x=[g\circ f](x)$

# الفصل الثالث : النهايات والإشتقاق

## إستراتيجية إيجاد نهاية الدالة جبرياً

**إستراتيجية إيجاد نهاية الدالة $f(x)$ عندما $x \to c$ ( أي $\lim_{x\to c} f(x)$ )**

نقوم بالتعويض المباشر للدالة عند هذه النقطة فإذا كان **الناتج**

| | | |
|---|---|---|
| عدد حقيقي وليكن L فإن : | كمية غير معرفة $\frac{\text{عدد حقيقي غير الصفر}}{0}$ | كمية غير معينة $\frac{0}{0}$ |
| $\lim_{x\to c} f(x) = L$ | $\lim_{x\to c} f(x) = \infty$ أو $-\infty$ | نلجأ لتحليل الدالة أو الضرب بالمرافق إذا كانت تحتوي جذور |
| الدالة لها نهاية عندما $x \to c$ | الدالة ليس لها نهاية عندما $x \to c$ | لايمكن الحكم على وجود نهاية من عدمها |



## حساب النهايات عند اللانهاية جبرياً

**بعض قواعد النهايات**

| دوال القوى ( n : طبيعي ) | | دوال كثيرات الحدود | دوال المقلوب | الحدودية النسبية |
|---|---|---|---|---|
| $\lim_{x\to\infty} x^n = \infty$ | | نأخذ النهاية فقط للحد الذي يحتوي على أكبر قوة | n : طبيعي $\lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{x^n} = 0$ | نقسم الحد الذي يحتوي على أكبر قوة على الحد الذي يحتوي أكبرقوة بالمقام وبعد التبسيط نعوض عن $\pm\infty$ |
| n : زوجي | $\lim_{x\to-\infty} x^n = \infty$ | | | |
| n : فردي | $\lim_{x\to-\infty} x^n = -\infty$ | | | |

**تذكر : نهاية الحدودية النسبية $h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ عند اللانهاية**

| درجة البسط = درجة المقام | درجة البسط > درجة المقام | درجة البسط < درجة المقام |
|---|---|---|
| $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \frac{\text{معامل أكبر اس بالبسط}}{\text{معامل أكبر اس بالمقام}}$ | $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \infty$ أو $-\infty$ | $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 0$ |

## المشتقة بإستخدام التعريف

| المشتقة بإستخدام التعريف | ملاحظة |
|---|---|
| للدالة $y = f(x)$ فإن مشتقتها $f'(x)$ بإستخدام التعريف هي : $$f'(x) = \lim_{x\to h} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$ | يرمز للمشتقة أيضاً بـ $y', \frac{dy}{dx}, \frac{df}{dx}$ |

## قواعد الإشتقاق

| أولاً | مشتقتها | الدالة |
|---|---|---|
| دوال القوة | $f'(x)=n.x^{n-1}$ | $f(x)=x^n$ |
| | $f'(x)=c.n.x^{n-1}$ | $f(x)=cx^n$ |
| | $f'(x)=0$ | $f(x)=c$ |

| تذكر أن |
|---|
| $\frac{1}{x^m}=x^{-m}$ |
| $\sqrt[m]{x^n}=x^{\frac{n}{m}}$ |

| ثانياً | مشتقتها | الدالة |
|---|---|---|
| ضرب دالتين | $h'(x)=f(x).g'(x)+g(x).f'(x)$<br>مشتقة الأولى × الثانية + مشتقة الثانية × الأولى | $h(x)=f(x).g(x)$ |
| قسمة دالتين | $h'(x)=\frac{g(x).f'(x)-f(x).g'(x)}{[g(x)]^2}$<br>( مشتقة المقام × البسط ) - ( مشتقة البسط × المقام )<br>المقام تربيع | $h(x)=\frac{f(x)}{g(x)}$ |



## بعض تطبيقات الإشتقاق

### ◄ أولاً : ميل المماس للمنحنى

للدالة $y=f(x)$ فإن **معادلة ميل المنحنى m** هو مشتقة الدالة $\boxed{m=f'(x)}$

**ويكون ميل المماس عند** $x=a$ **هو** $m=f'(a)$

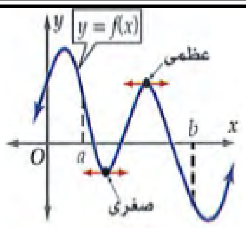
**ملاحظة :** معدل التغير اللحظي لدالة هو أيضاً مشتقة هذه الدالة

### ◄ ثانياً : السرعة المتجهة

إذا كانت $f(t)$ : المسافة التي يقطعها جسم حيث t : الزمن

| تذكر مما سبق ( متوسط السرعة المتجهة ) | السرعة المتجهة اللحظية |
|---|---|
| متوسط السرعة المتجهة في الفترة الزمنية من $a$ إلى $b$ هو :<br>$v_{avg}=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ | **السرعة المتجهة اللحظية** $v(t)$ هي مشتقة المسافة :<br>$v(t)=f'(t)$ |

### ◄ ثالثاً : النقاط الحرجة

| النقطة الحرجة | إستخدام المشتقة لإيجاد القيم القصوى |
|---|---|
| تكون النقطة $(x_1,f(x_1))$ نقطة حرجة إذا حققت أحد الشرطين<br>$f'(x_1)=0$<br>أو $f'(x_1)$ **غير معرف** | لأي دالة $f(x)$ متصلة في الفترة $[a,b]$ فإن لها قيمة عظمى أو صغرى اما عند :<br>**الطرفين أو النقاط الحرجة**<br>**ملاحظة :** إذا كانت النقطة الحرجة خارج الفترة فلا يتم احتسابها من النقط العظمى أو الصغرى<br> |

## قانون التكامل المحدد باستعمال النهايات (مجموع ريمان الأيمن)

يستخدم لإيجاد مساحة المنطقة المحصورة بين دالة والمحور **X** في الفترة $[a,b]$

$$\int_a^b f(x).dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x$$

- طول الفترة الجزئية : $\Delta x = \dfrac{b-a}{n}$
- الحد الأدنى : $a$
- الحد الأعلى : $b$
- الأطراف اليمنى $x_i = a + i\Delta x$

**صيغ المجموع $\sum$**

| | |
|---|---|
| $(1)\ \sum_{i=1}^{n} c = cn$ | $(2)\ \sum_{i=1}^{n} i = \dfrac{n(n+1)}{2}$ |
| $(3)\ \sum_{i=1}^{n} i^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ | $(3)\ \sum_{i=1}^{n} i^3 = \dfrac{n^2(n+1)^2}{4}$ |



## قواعد التكامل

### قواعد التكامل غير المحدد ( إيجاد الدوال الأصلية )

| الدالة $f(x)$ | تكاملها $F(x)$ |
|---|---|
| $\int x^n.dx$ | $\dfrac{x^{n+1}}{n+1}+c$ |
| $\int k\,x^n.dx$ | $\dfrac{k\,x^{n+1}}{n+1}+c$ |
| $\int k.dx$ | $kx+c$ |

**ملاحظة :** n : عدد نسبي $n \neq 1$

**c , k** : ثابت ( عدد حقيقي )

### التكامل المحدد

تعرف أيضاً بـ **النظرية الأساسية في التفاضل والتكامل**

$$\int_a^b f(x).dx = F(x)\Big|_a^b = F(b)-F(a)$$

**حيث :** $F(x)$ : دالة أصلية للدالة $f(x)$

## العلاقة بين التفاضل والتكامل

- **المسافة ( الإزاحة )** $s(t)$ ← **بالإشتقاق** → **السرعة المتجهة اللحظية** $v(t)=s'(t)$ ، و **بالتكامل** نعود إلى المسافة.
- **الدالة** $f(x)$ ← **بالإشتقاق** → **ميل المماس** $m=f'(x)$ ، و **بالتكامل** نعود إلى الدالة.

## ملاحظات فيزيائية

1) في بداية الحركة يكون الزمن = صفر

2) إذا رجع الجسم لنقطة البداية فإن الإزاحة = صفر

3) عند أقصى ارتفاع تكون السرعة = صفر