ورقه عمل المتطابقات نصف زاويه

مملكة البحرين - وزارة التربية والتعليم - مدرسة الرفاع الشرقي الثانوية للبنين - قسم الرياضيات

كراسة التدريبات (الرياضيات ٥)

ريض (٣٦٤)

عزيزي الطالب : كراسة التدريبات لا تغني عن الكتاب المدرسي وانما هي داعمة ومساندة للتعليم والتعلم

اسم الطالب	جزى الله خيرا الطالب
الشعبة	

مفهوم أساسي

المتطابقات المثلثية لضعف الزاوية

المتطابقات الآتية صحيحة لقيم θ جميعها:

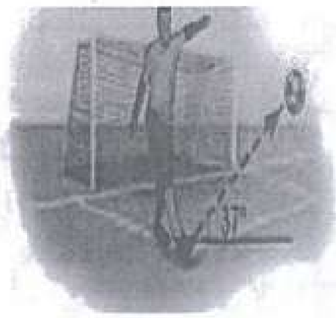
$$\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$$

$$\cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta$$

$$\cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1$$

$$\cos 2\theta = 1 - 2\sin^2\theta$$

$$\tan 2\theta = \frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}$$



تصوير وتجهيز/
أ.إبراهيم الخلاقي

Bo.omar90

Boomar90

Telegram

بطاقة هوية الطالب والاتفاقية

اسم الطالب / .... الشعبة / ....

هوايتي / .... طموحي ان اكون/ ....

أتعهد أنا الطالب / .... رقم اكاديمي / .... شعبة ....
بالالتزام بالآتي:

- ❖ الالتزام بموعد الحصة والتواجد داخل الصف قبل دخول المعلم، وعدم التأخر.
- ❖ الالتزام بالهدوء وحسن الانصات أثناء الدرس.
- ❖ الالتزام بالنظافة والنظام وحسن الترتيب.
- ❖ أن أوفر جميع متطلبات الحصة من أدوات.
- ❖ الدخول المتأخر للحصة سيكون ببطاقة من المشرف.
- ❖ عدم الخروج أثناء الحصة إلا للضرورة، والرجوع بسرعة.
- ❖ الاحترام المتبادل بيني وبين المعلم.
- ❖ أداء الواجبات والمهمات والاستعداد الجيد للمهمات المطلوبة.
- ❖ الالتزام بمواعيد تسليم المهمات في الوقت المحدد لها، وفي حال عدم التسليم في الوقت تخصم من الدرجة.
- ❖ عدم استعمال الهاتف أثناء الحصة.

أتعهد أنا معلم الرياضيات بالالتزام بالتالي:

- ❖ تعريف الطالب بالمقرر من اليوم الأول.
- ❖ تعريف الطالب بنظام توزيع الدرجات الخاصة بالمقرر ومواعيد تسليم المتطلبات.
- ❖ التقويم العادل للطلاب ومعاملتهم بالمثل.
- ❖ التنويع في طرق التدريس بما يحقق فهم الطالب للمقرر واستيعابه الجيد له.
- ❖ شرح وتوضيح المقرر للطلاب والانتهاء منه قبل موعد الامتحان النهائي.

مواعيد الامتحانات	اليوم والتاريخ					مواعيد الأنشطة اللاصفية		
	الامتحان	(١)	(٢)	(٣)	(٤)		المنتصف	النهائي
	الدرجة							

⌘ ملاحظات عامة:

① لن يعاد الامتحان للطالب المتغيب إلا بعذر يسلم بعد يومين كحد أقصى.
② يعيد المعلم الامتحان للطالب المتغيب خلال أسبوع واحد من تقديمه كحد أقصى أو وفق ما يتفق عليه.
③ يمكنك عزيزي الطالب التواصل مع المعلم لأي سبب كان وسنسعى لأن نكون عند حسن الظن.

الطرف الأول (الطالب) الطرف الثاني (المعلم) الطرف الثالث (ولي الأمر)

عزيزنا ولي الأمر يمكنك التواصل مع المعلم ولقاءه وزيارة المدرسة خلال الساعات المدرسية المحددة من قبل الإدارة.
يشكر قسم الرياضيات تعاونكم ويرحب بكم دوما ويتمنى لكم ولأبنائكم النجاح والتوفيق

المعلم الأول
أ. محمود عاشور

مدير المدرسة
أ. سامي فارس

محتوى مساق الرياضيات للمستوى الثالث (توحيد المسارات / العلمي)

اسم المساق	الفصل الدراسي	رمز المساق	عدد الساعات	سنة الطبعة
الرياضيات 5	الخامس	ريض 364	4	الطبعة الأولى 1434 هـ - 2013 م الطبعة الثانية 1436 هـ - 2015 م

الفصل	رمز الدرس	الامثلة المطلوبة	التمارين المطلوبة	فترة التدريس
الفصل (1)	1 - 1	جميع الأمثلة	جميع التمارين ماعدا 32 - 35	قبل امتحان منتصف الفصل والتي سيشملها جميعًا
	1 - 2	جميع الأمثلة	جميع التمارين ما عدا 51	
	1 - 3	جميع الأمثلة	جميع التمارين ما عدا 17، 32، 37	
	1 - 4	جميع الأمثلة	جميع التمارين ما عدا 9، 28 - 30	
	1 - 5	جميع الأمثلة	جميع التمارين ما عدا 49 - 57	
الفصل (2)	2 - 1	جميع الأمثلة ما عدا تأكد 5B	جميع التمارين ما عدا 28، 29، 38-50	
	2 - 2	جميع الأمثلة	جميع التمارين ما عدا 28، 29، 32-38، 41-48	
الفصل (2)	*2 - 3	جميع الأمثلة ما عدا 7	جميع التمارين ما عدا 21-27، 31، 34-42	بعد امتحان منتصف الفصل
	2 - 4	جميع الأمثلة ما عدا 4	جميع التمارين ما عدا 3-5، 14-20، 30-42	
	[redacted]			
الفصل (3)	**3 - 1	جميع الأمثلة ما عدا 7	جميع التمارين ماعدا 35-37	
	3 - 2	جميع الأمثلة ما عدا 7	جميع التمارين ما عدا 13، 30-35، 39-49	
	[redacted]			
	***3 - 4	جميع الأمثلة	جميع التمارين ما عدا 5، 40 -44	
	[redacted]			

* : يُدرس درسا 1 – 3 وَ 2 – 3 قبل درس 3 – 2 ويتم حل أمثلته وتمارينه بدون التعزيز العددي.

** : عند تقدير النهايات بيانيًا يُعطى التمثيل البياني للدالة، وفي تمارين الدرس يمكن الاستعانة بالآلة الحاسبة البيانية أو أي برمجية لتمثيل الدوال بيانيًا.

*** : يُعطى مثال 1، ومثال 2 من درس 3 – 3 قبل مثال 4 في درس 4 – 3 ويكون تمثيل الدوال أو مشتقات الدوال غير مطلوب في التمارين.

(١) أوجد القيمة الفعلية لـ $sin\theta$ إذا كان $cos\theta = \frac{5}{13}$ ، $270° < \theta < 360°$.

$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$

$\sin^2\theta + \left(\frac{5}{13}\right)^2 = 1$

$\sin^2\theta = 1 - \left(\frac{5}{13}\right)^2$

$\sqrt{\sin^2\theta} = \sqrt{\frac{144}{169}}$

$\sin = \pm \frac{12}{13}$

$\sin = -\frac{12}{13}$

(٢) أوجد القيمة الفعلية لـ $sec\theta$ إذا كان $sin\theta = -\frac{2}{7}$ ، $180° < \theta < 270°$.

$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$

$\left(-\frac{2}{7}\right)^2 + \cos^2\theta = 1$

$\cos^2\theta = 1 - \left(-\frac{2}{7}\right)^2$

$\sqrt{\cos^2} = \sqrt{\frac{45}{49}}$

$\cos = \pm \frac{3\sqrt{5}}{7}$

$\cos = -\frac{3\sqrt{5}}{7}$

$\sec = \frac{1}{\cos}$

$\sec = -\frac{7}{3\sqrt{5}}$

$\sec = -\frac{7\sqrt{5}}{15}$

(٣) أوجد القيمة الفعلية لـ $tan\theta$ إذا كان $sin\theta = \frac{1}{2}$ ، $90° < \theta < 180°$.

$\cot^2\theta + 1 = \csc^2\theta$

$\cot^2\theta + 1 = (2)^2$

$\sqrt{\cot^2} = \sqrt{3}$

$\cot = \frac{1}{\tan}$

$\tan = -\frac{1}{\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$

(٤) أوجد القيمة الفعلية لـ $csc\theta$ إذا كان $cot\theta = \frac{1}{4}$ ، $180° < \theta < 270°$.

$1 + \cot^2\theta = \csc^2\theta$

$1 + \left(\frac{1}{4}\right)^2 = \csc^2\theta$

$\sqrt{\frac{17}{16}} = \sqrt{\csc^2\theta}$

$\pm\frac{\sqrt{17}}{4} = \csc$

$-\frac{\sqrt{17}}{4} = \csc$

$\therefore$ θ تقع في الجزء الثالث

---

(٥) أوجد القيمة الفعلية لـ $tan\theta$ إذا كان $sec\theta = -3$ ، $180° < \theta < 270°$.

$\tan^2\theta + 1 = \sec^2\theta$

$\tan^2\theta = (-3)^2 - 1$

$\sqrt{\tan^2\theta} = \sqrt{8}$

$\tan = \pm 2\sqrt{2}$

$\tan = +2\sqrt{2}$

$\therefore$ θ تقع في الربع الثالث

---

(٦) أوجد القيمة الفعلية لـ $cos\theta$ إذا كان $sec\theta = \frac{5}{3}$ ، $270° < \theta < 360°$.

$\sec = \frac{1}{\cos}$

$\cos = \frac{1}{\sec}$

$\cos = \frac{3}{5}$

بسط التعابير المثلثية الآتية:

1) $\frac{\cos\theta \sec\theta}{\cot\theta}$

$\frac{\cancel{\cos}\theta \cdot \frac{1}{\cancel{\cos}}}{\cot\theta}$

$\frac{1}{\cot\theta} = \tan\theta$

2) $\sec^2\theta - \tan^2\theta$

عن القانون

$1 + \cancel{\tan^2\theta} - \cancel{\tan^2\theta}$

$= 1$

3) $\tan\theta(1 - \sin^2\theta)$

$\tan\theta \cdot \cos^2\theta$

$= \frac{\sin\theta}{\cancel{\cos}\theta} \cdot \frac{\cos\theta}{1} =$

$\sin\theta \cos\theta$

4) $(1 + \cot^2\theta)(1 - \cos^2\theta)$

$\csc^2\theta \cdot \sin^2\theta = 1$

$\frac{1}{\cancel{\sin^2\theta}} \cdot \frac{\cancel{\sin^2\theta}}{1} = 1$

$= 1$

10

5) $(\csc^2\theta - 1)(\sec^2\theta - 1)$

$\cot^2\theta \cdot \tan^2\theta$

$\frac{1}{\cancel{\tan^2\theta}} \cdot \frac{\tan^2\theta}{1} = 1$

6) $\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)\cot\theta$

$\sin\theta \cdot \cot\theta$

$\frac{\cancel{\sin}\theta}{1} \cdot \frac{\cos\theta}{\cancel{\sin}\theta}$

$1 \cdot \cos\theta$

$= \cos\theta$

7) $\sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)\sec\theta$

$\cos\theta \cdot \sec\theta$

$\cancel{\cos}\theta \cdot \frac{1}{\cancel{\cos}\theta}$

$= 1$

8) $(1 - \sin\theta)(1 + \sin\theta)$

توزيع

$1 - \sin^2\theta$

$= \cos^2\theta$

9) $\frac{1-\sin^2\theta}{\sin^2\theta}$

$\frac{\cos^2\theta}{\sin^2\theta} = \cot^2\theta$

10) $\frac{1}{\cos^2\theta} - \frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}$

$\sec^2 - \tan^2$

$1 - \tan^2 - \tan$

$= 1$

$\frac{1-\sin^2\theta}{\cos^2\theta}$

$\frac{\cos^2\theta}{\cos^2\theta} = \boxed{1}$

---

11) $5 - 5\sin^2\theta$

$5(1-\sin^2\theta)$

$5\cos^2\theta$

12) $\frac{\sec\theta\tan^2\theta+\sec\theta}{\cos\theta}$

$\frac{\sec\theta(\tan^2\theta+1)}{\cos\theta}$

$\frac{\sec\theta \times \sec^2\theta}{\cos\theta}$

$\frac{\sec^3}{\cos\theta} = \sec \div \frac{\cos\theta}{1}$

تحويل للضرب $\sec^3\theta \cdot \frac{1}{\cos\theta}$

$\sec^3\theta \cdot \sec\theta$

$= \sec^4\theta$

---

13) $\frac{\cos(-\theta)}{\sin(-\theta)}$

$\frac{\cos}{-\sin} = -\cot$

14) $\frac{\sec\theta}{\sin\theta}(1-\cos^2\theta)$

$\frac{\sec\theta}{\sin\theta} \cdot \sin^2\theta$

$= \sec\theta \cdot \sin\theta$

$= \frac{1}{\cos\theta} \times \frac{\sin\theta}{1}$

$\frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \tan\theta$

---

15) $\frac{\tan^2\theta\csc^2\theta-1}{\sec^2\theta}$

$\frac{\frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta} \times \frac{1}{\sin^2\theta} - 1}{\sec^2\theta}$

$\frac{\frac{1}{\cos^2\theta} - 1}{\sec^2\theta} = \frac{\sec^2\theta - 1}{\sec^2\theta}$

$\frac{\sec^2\theta}{\sec^2\theta} - \frac{1}{\sec^2\theta} = 1 - \cos^2\theta$

$= \sin^2\theta$

16) $\dfrac{\tan\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)\sec\theta}{1-\csc^2\theta}$

① $\dfrac{\cot\theta \cdot \frac{1}{\cos}}{1-\left(\frac{1}{\sin^2\theta}\right)}$

② $\dfrac{\frac{\cos\theta}{\sin\theta} \cdot \frac{1}{\cos\theta}}{\frac{\sin^2\theta}{\sin^2\theta} - \frac{1}{\sin^2\theta}}$

③ $\dfrac{\frac{1}{\sin\theta}}{\frac{\sin^2\theta-1}{\sin^2\theta}}$

④ $\dfrac{\frac{1}{\sin}}{\frac{-(1-\sin^2\theta)}{\sin^2\theta}}$

⑤ $\dfrac{\frac{1}{\sin\theta}}{\frac{-\cos^2\theta}{\sin^2\theta}}$

⑥ $\frac{1}{\sin\theta} \cdot -\frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}$

⑦ $-\frac{\sin}{\cos^2\theta}$

⑧ $-\frac{\sin}{\cos} \times \frac{1}{\cos}$

⑨ $-\tan\theta \times \sec\theta$

17) $\dfrac{\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)-1}{1+\sin(-\theta)}$

$\dfrac{\sin\theta - 1}{1-\sin\theta}$

$= \dfrac{-1(1-\sin\theta)}{1-\sin\theta}$

$= -1$

---

18) $\dfrac{\sec\theta\sin\theta+\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)}{1+\sec\theta}$

$\dfrac{\frac{1}{\cos\theta} \cdot \frac{\sin\theta}{1} + \sin\theta}{1+\frac{1}{\cos\theta}}$

$\dfrac{\frac{\sin\theta}{\cos\theta} + \frac{\sin}{1}}{\frac{1\times\cos\theta}{\cos\theta} + \frac{1}{\cos\theta}}$

$\dfrac{\frac{\sin\theta + \cos\theta\times\sin\theta}{\cos\theta}}{\frac{\cos\theta+1}{\cos\theta}}$

$\dfrac{\sin\theta(1+\cos\theta)}{\cos\theta+1}$

$= \sin\theta$

19) $\dfrac{20-20\sin^2\theta}{10\cos^2\theta-10}$

$\dfrac{20(1-\sin^2)}{-10(-\cos^2+1)}$

$\dfrac{20(\cos^2)}{-10(-\cos^2\theta+1)}$

$\dfrac{20(\cos^2\theta)}{-10(\sin^2\theta)}$

---

(١) يمكن حساب شدة الضوء المار من عدستين متلاصقتين في نظارة شمسية باستعمال الصيغة $I = I_o - \frac{I_o}{\csc^2\theta}$ حيث I_o شدة الضوء القادم من العدسة الأولى، و I شدة الضوء الخارجة من العدسة الثانية، θ الزاوية بين محوري العدستين.

(أ) أوجد شدة الضوء بدلالة $\cos\theta$.

$I = I_o - I_o\sin^2\theta$

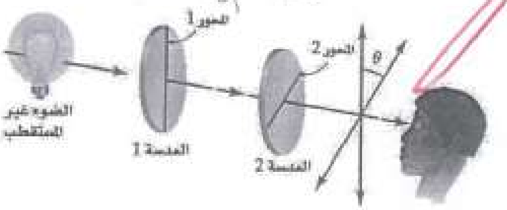
$= I_o(1-\sin^2\theta)$

$= I_o\cos^2\theta$

(ب) احسب شدة الضوء إذا كانت $\theta = 30^\circ$.

$I = I_o(\cos 30)^2$

$= \frac{3}{4} I_o$



محذوف

(٢) يتزلج شخص كتلته m باتجاه أسفل هضبة ثلجية بزاوية قياسها θ وبسرعة ثابتة، عند تطبيق قانون نيوتن يتم استعمال نظام المعادلتين : $mg\sin\theta - \mu_k F_n = 0$, $F_n - mg\cos\theta = 0$ حيث g تسارع الجاذبية الأرضية، و F_n القوة العمودية المؤثرة في المتزلج، و μ_k معامل الاحتكاك . استعمل النظام لتعريف μ_k بدلالة θ .

(٣) اعد كتابة $\cot^2\theta - \tan^2\theta$ بد...

$\left(\frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}\right) \times \sin^2$

$(\ldots\theta + \sin^2\theta)$

$- \sin^2 - \sin^2 \qquad \frac{1-2\sin^2}{\sin^2 - \sin^4}$

$(-\sin^2)\cdot\sin^2$

...لالة $\sin\theta$

$\cos^2 \times \left(\frac{\cos^2}{\sin^2}\right) - (\ldots$

$= \frac{\cos^4\theta - \sin^4\theta}{\cos^2\theta \cdot \sin^2\theta}$

$= \frac{(\cos^2\theta - \sin^2\theta)(\cos\ldots}{\cos^2\theta \cdot \sin\ldots}$

$= \frac{(\cos^2 - \sin^2)}{\cos^2 \cdot \sin^2} = \ldots$

(٤) إذا كان $\sin x = m$, $0° < x < 90°$ ، فأث... ...ت أن: $\tan x = \frac{m\sqrt{1-m^2}}{1-m^2}$ ؟

$\sin x = m$ نعوض ب

$\tan x = \frac{\sin x\sqrt{1-\ldots}}{1-\sin\ldots}$

$\tan x = \frac{\sin x\ldots}{\cos\ldots}$

$\tan x = \frac{\sin x\ldots}{\cos\ldots}$

(١) أثبت صحة المتطابقات الآتية:

1) $\sin^2\theta = (1-\cos\theta)(1+\cos\theta)$

R.H.S = (1 − cos θ)(1 + cos θ)

= 1 − cos² بالقانون الاول

sin² θ = sin² θ = L.H.S

إذاً المتطابقة صحيحة

2) $\sec\theta\sin\theta\cot\theta = 1$

L.H.S =

$\frac{1}{\cos\theta} \cdot \frac{\sin\theta}{1} \cdot \frac{\cos\theta}{\sin\theta}$

= 1 = R.H.S

3) $1+\csc^2\theta\cos^2\theta = \csc^2\theta$

L.H.S = $1 + \frac{1}{\sin^2\theta} \cdot \frac{\cos\theta}{1}$

$= 1 + \frac{\cos^2}{\sin^2}$

$= 1 + \cot^2\theta$

$= \csc^2\theta$ = R.H.S

4) $\tan\theta = \frac{\sec\theta}{\csc\theta}$

R.H.S tan θ = $\left(\frac{\frac{1}{\cos\theta}}{\frac{1}{\sin\theta}}\right)$ =

$= \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$ = L.H.S

5) $\sin^2\theta + \tan^2\theta\sin^2\theta = \tan^2\theta$

L.H.S = sin²θ (1 + tan²)

sin² (sec²)

$\frac{\sin^2}{1} \cdot \frac{1}{\cos^2}$

$\frac{\sin^2}{\cos^2}$ = tan² = R.H.S

6) $\cos^2\theta + \tan^2\theta\cos^2\theta = 1$

R.H.S cos² + $\frac{\sin^2}{\cos^2} \cdot \frac{\cos^2}{1}$ = 1

cos²θ + sin²θ = 1

= L.H.S

7) $\cos\theta\cos(-\theta) - \sin\theta\sin(-\theta) = 1$

L.H.S = cos θ · cos θ − sin · (−sin)

cos²θ + sin²θ

= 1 = R.H.S

8) $\csc\theta + \cot\theta = \frac{1+\cos\theta}{\sin\theta}$

L.H.S = $\frac{1}{\sin} + \frac{\cos}{\sin}$

$\frac{1+\cos}{\sin} = \frac{1+\cos}{\sin}$

= R.H.S

أثبت أن

9) $\tan\theta(\tan\theta + \cot\theta) = \sec^2\theta$

L.H.S $\tan^2 + \tan\theta\cot\theta$

$\tan^2 + \frac{\sin}{\cos} \cdot \frac{\cos}{\sin}$

$\tan^2 + 1 = \sec^2$

$= R.H.S$

١

10) $\cot\theta + \tan\theta = \frac{\sec^2\theta}{\tan\theta}$

$L.H.S = \frac{1}{\tan\theta} + \frac{\tan\theta}{1}$

$= \frac{1 + \tan^2\theta}{\tan\theta}$

$= \frac{\sec^2\theta}{\tan\theta} = R.H.S$

---

11) $\frac{\tan\theta + \cot\theta}{\tan\theta\cot\theta} = \tan\theta + \cot\theta$

L.H.S $\frac{\tan}{\tan . \cot} + \frac{\cot}{\tan . \cot}$

$\frac{1}{\cot\theta} + \frac{1}{\tan\theta}$

$\tan\theta + \cot\theta = R.H.S$

12) $\sec\theta\csc\theta = \tan\theta + \cot\theta$

$R.H.S = \tan\theta + \cot\theta$

$\frac{\sin\theta}{\cos\theta} + \frac{\cos\theta}{\sin\theta}$

$\frac{\sin^2 + \cos^2}{\sin\cos} = 1$

$\frac{1}{\sin\cos}$

$\frac{1}{\sin} \cdot \frac{1}{\cos}$

$\csc . \sec = L.H.S$

---

13) $\sec^2\theta + \csc^2\theta = \sec^2\theta\csc^2\theta$

$R.H.S = \frac{1}{\cos^2} + \frac{1}{\sin^2}$

$\frac{\sin^2 + \cos^2}{\cos^2\sin^2} = 1$

$\frac{1}{\cos^2\sin^2}$

$\frac{1}{\cos^2} \cdot \frac{1}{\sin^2}$

$\sec^2 . \csc^2 = R.H.S$

14) $\csc\theta - \sin\theta = \cot\theta\cos\theta$

L.H.S $\frac{1}{\sin} - \frac{\sin}{1}$

$\frac{1 - \sin^2}{\sin} = \frac{\cos^2}{\sin}$

$\frac{\cos}{\sin} \cdot \frac{\cos}{1}$

$\cot\theta . \cos\theta$ R.H.S

15) $\dfrac{\cos\theta}{1-\sin\theta} = \dfrac{1+\sin\theta}{\cos\theta}$

$L.H.S = \dfrac{\cos\theta}{1-\sin\theta} \cdot \dfrac{1+\sin\theta}{1+\sin\theta}$

اذا كان سالب وموجب بدون تربيع نضرب المقام

$\dfrac{\cos(1+\sin\theta)}{1-\sin^2\theta}$

$= \dfrac{\cancel{\cos\theta}(1+\sin\theta)}{\cos\cancel{^2}} = \dfrac{1+\sin\theta}{\cos} = R.H.S$

16) $\csc\theta - 1 = \dfrac{\cot^2\theta}{\csc\theta+1}$

$R.H.S = \dfrac{\cot^2}{\csc+1}$

$= \dfrac{\csc^2-1}{\csc+1}$

$= \dfrac{(\csc-1)\cancel{(\csc+1)}}{\cancel{\csc+1}}$

$= \csc\theta - 1$

$= L.H.S$

---

17) $\cot\theta\,(1-\cos\theta) = \dfrac{\cos\theta.\sin\theta}{(1+\cos\theta)}$

$R.H.S = \dfrac{\cos\theta\sin\theta}{1+\cos\theta} \cdot \dfrac{1-\cos\theta}{1-\cos\theta}$

$= \dfrac{\cos\theta\sin\theta(1-\cos\theta)}{1-\cos^2\theta}$

$= \dfrac{\cos\,\cancel{\sin}\,(1-\cos)}{\sin\cancel{^2}}$

$= \cot(1-\cos\theta) = L.H.S$

---

18) $1-\tan^4\theta = 2\sec^2\theta - \sec^4\theta$

$R.H.S = 2\sec^2\theta - \sec^4$

$= \sec^2 \cdot (2-\sec^2)$

$-(\tan^2+1)$

$= (\tan^2+1)(2-\tan^2-1)$

$= (\tan^2+1)(1-\tan^2)$

$\cancel{\tan^2} - \tan^4 + 1 - \cancel{\tan^2}$

$1-\tan^4 = L.H.S$

19) $$\frac{\sin^4\theta-\cos^4\theta}{\cos^2\theta-\sin^2\theta}=-1$$

$L.H.S = -\dfrac{(\sin^4-\cos^4)}{\cos^2-\sin^2}$

$-\dfrac{(\sin^2-\cos^2)(\sin^2+\cos^2)}{\cos(2\theta)}$

$-\dfrac{(\cos(2\theta)\times 1}{\cos(2\theta)}$

$-1=-1=R.H.S$

---

20) $$\frac{1-\sin\theta}{1+\sin\theta}=(\sec\theta-\tan\theta)^2$$

$L.H.S = \dfrac{1-\sin}{1+\sin}\cdot\dfrac{1-\sin}{1-\sin}$

$\dfrac{1+\sin^2}{(1-\sin^2)}$

$=\dfrac{1+\sin^2}{\cos^2}$

$\dfrac{1}{\cos^2}+\dfrac{\sin^2}{\cos^2}$

$(\sec^2+\tan^2)$

$=(\sec-\tan)^2=R.H.S$

21) $$\frac{1+\tan\theta}{\sin\theta+\cos\theta}=\sec\theta$$

$L.H.S = \dfrac{1+\dfrac{\sin}{\cos}}{\sin+\cos}$

$\dfrac{\dfrac{\cos+\sin}{\cos}}{\sin+\cos}$

$\dfrac{\cos+\sin}{\cos}\cdot\dfrac{1}{\sin+\cos}$

$\dfrac{(\cos+\sin)\times 1}{\cos\times(\sin+\cos)}=\dfrac{1}{\cos}=R.H.S$

---

(٣) اختر الإجابة فيما يأتي:

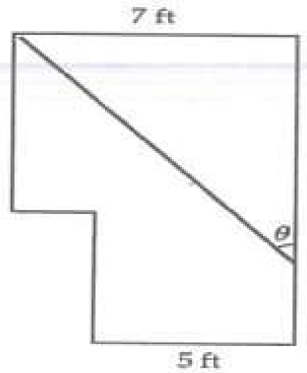
(أ) أيٌّ مما يأتي لا يكافئ $\cos\theta$ ، حيث $0<\theta<\frac{\pi}{2}$ ؟

A $\dfrac{\cos\theta}{\cos^2\theta+\sin^2\theta}$ **B** $\dfrac{1-\sin^2\theta}{\cos\theta}$ **C** $\cot\theta\sin\theta$ **D** $\tan\theta\csc\theta$

(ب) أيٌّ مما يأتي يكافئ 1 ، حيث $0<\theta<\frac{\pi}{2}$ ؟

A $\tan^2\theta(1-\csc^2\theta)$ **B** $\dfrac{\cot\theta}{\cos\theta}-\csc\theta$ **C** $\dfrac{\sin\theta}{\csc\theta}+\dfrac{\cos\theta}{\sec\theta}$ **D** $(1-\sin^2\theta)(1+\tan^2\theta)$

(١) اشتق بعض الطلبة صيغة لمعرفة أطول سلم يمكن أن يحمل أفقياً ليتلائم مع زاوية ممر عرضه 5 ft إلى ممر آخر عرضه 7 ft . فوجدوا أنه يعطى بالصيغة: $l(\theta) = \dfrac{7\sin\theta + 5\cos\theta}{\sin\theta\cos\theta}$ وعندما قام معلمهم بإيجاد صيغة أخرى وجد أن : $l(\theta) = 7\sec\theta + 5\csc\theta$. هل الصيغتان متكافئتان؟



$\dfrac{7\sin + 5\cos}{\sin\cos} = 7\sec + 5\csc$

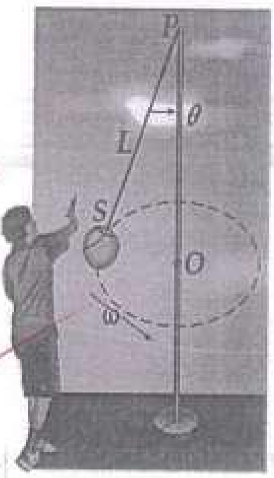
$\dfrac{7\cancel{\sin}}{\cancel{\sin}\cos} + \dfrac{5\cancel{\cos}}{\sin\cancel{\cos}}$

$7\sec + 5\csc$

$= R.H.S$

---

(٢) يُبيّن الشكل المجاور إحدى الألعاب. عندما تدور الكرة حول العمود، فإنها تكوّن مع الحبل شكلًا مخروطيًا. إذا علمت أن العلاقة بين طول الحبل L، والزاوية المحصورة بين الحبل والعمود تُعطى بالصيغة: $L = \dfrac{g\sec\theta}{\omega^2}$، فهل الصيغة $L = \dfrac{g\tan\theta}{\omega^2\sin\theta}$ هي أيضًا تُمثّل العلاقة بين L, θ؟



$\dfrac{g\sec}{w^2} = \dfrac{g\tan}{w^2\sin}$

R.H.S $= \dfrac{g\tan}{w^2\sin}$

$= \dfrac{g\,\frac{\sin}{\cos}}{w^2\sin}$

$= \dfrac{g\,\frac{1}{\cos}}{w^2} = \dfrac{g\sec}{w^2}$

١٠

---

(٢) إذا كان $x = \frac{1}{2}\tan\theta$، حيث $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$، فاكتب $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1+4x^2}}$ بدلالة $\sin\theta$ فقط .

سؤال اختبار

1-3 المتطابقات المثلثية لمجموع زاويتين والفرق بينهما
Sum and Difference of Angles Trigonometric Identities

(١) مستعملاً متطابقات المجموع والفرق أوجد القيمة الفعلية لما يأتي:

نجلب الأرقام فقط من الزوايا بالجمع أو الطرح

1) $sin75°$

$\sin(45+30)$

$(\sin 45)(\cos 30)+(\cos 45)(\sin 30)$

$=\left(\frac{\sqrt2}{2}\right)\left(\frac{\sqrt3}{2}\right)+\left(\frac{\sqrt2}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)$

$=\frac{\sqrt6}{4}+\frac{\sqrt2}{4}=\frac{\sqrt6+\sqrt2}{4}$

2) $\sec(105)$

$\cos(105)=\cos(60+45)$

$(\cos 60)(\cos 45)-(\sin 60)(\sin 45)$

$=\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{\sqrt2}{2}\right)-\left(\frac{\sqrt3}{2}\right)\left(\frac{\sqrt2}{2}\right)$

$\frac{\sqrt2}{4}-\frac{\sqrt6}{4}$

$=\frac{\sqrt2-\sqrt6}{4}$

$\sec 105=\frac{1}{\cos 105}=\frac{4}{\sqrt2-\sqrt6}=-\sqrt6-\sqrt2$

3) $\sin(-195)$

نحول السالب إلى موجب

$-195+(360)$

$\sin 165=\sin(120+45)$

$(\sin 120)(\cos 45)+(\cos 120)(\sin 45)$

$\left(\frac{\sqrt3}{2}\right)\left(\frac{\sqrt2}{2}\right)+\left(\frac{-1}{2}\right)\left(\frac{\sqrt2}{2}\right)$

$=\frac{\sqrt6-\sqrt2}{4}$

8) $\tan(345)$

$\tan(300+45)$

$=\frac{(\tan 300)+(\tan 45)}{1-(\tan 300)(\tan 45)}$

$=\frac{(-\sqrt3)+(1)}{1-(-\sqrt3)(1)}$

$=-2+\sqrt3$

$\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right)$

$\pi=180$

$\cos\left(\frac{7(180)}{12}\right)$

$\cos 105$

$\csc\left(\frac{\pi}{12}\right)$

$\pi=180$

$\csc\left(\frac{180}{12}\right)\quad \csc(15)$

$\sin(60-45)$

$(\sin 60)(\cos 45)-(\cos 60)(\sin 45)$

$\left(\frac{\sqrt3}{2}\right)\left(\frac{\sqrt2}{2}\right)-\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{\sqrt2}{2}\right)$

$\frac{\sqrt6}{4}-\frac{\sqrt2}{4}$

$=\frac{\sqrt6-\sqrt2}{4}$

$\csc 15=\frac{1}{\sin 15}=\frac{4}{\sqrt6-\sqrt2}=\sqrt6+\sqrt2$

نرجع السؤال أصله

$\cos 37^\circ \cos 7^\circ + \sin 37^\circ \sin 7^\circ$ $\cos(A-B)$ $\cos(37-7)$ $\cos 30 = \frac{\sqrt{3}}{2}$	$\cos\left(\frac{\pi}{4}-\theta\right)\cos\theta - \sin\left(\frac{\pi}{4}-\theta\right)\sin\theta$ $\cos(A+B)$ $\cos\left(\frac{\pi}{4} - \cancel{\theta} + \cancel{\theta}\right)$ $\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$
$\sin 18 \cos 12 + \cos 18 \sin 12$ $\sin(A+B)$ $\sin(18+12)$ $\sin 30 = \frac{1}{2}$	$\cos 20 \cos 10 - \cos 70 \cos 80$ $\cos 20 \cos 10 - \sin 20 \sin 10$ $\cos(20+10)$ $\cos 30 = \frac{\sqrt{3}}{2}$
$\frac{\tan 40^\circ - \tan 10^\circ}{1 + \tan 40^\circ \cot 80^\circ}$ $= \tan 10$ (90) $\tan(A-B)$ $\tan(40-10)$ $\tan 30 = \frac{\sqrt{3}}{3}$ ١٠	$\frac{1 - \tan 25^\circ \tan 20^\circ}{\tan 25^\circ + \tan 20^\circ}$ $\frac{1}{\tan(25+20)} = \cot 45$ $= 1$

٢١ـ أوجد بدون الآلة الحاسبة القيمة الفعلية:

1) $\sin(364^\circ) \times \cos(364^\circ) \times \tan(364^\circ) \times \cot(364^\circ) \times \csc(364^\circ) \times \sec(364^\circ) = 1$

لأنه كل ١ له تضرب بمقلوبها تساوي (١)

---

2) $\sin(1^\circ) \times \sin(2^\circ) \times \sin(3^\circ) \times \dots\dots 0 \dots\dots \times \sin(2018^\circ) \times \sin(2019^\circ) = 0$

$\sin 180 = 0$ فأي صفر × أي رقم = ٠

---

3) $\cos(\theta+40)\cos(\theta-50) + \sin(\theta+40)\sin(\theta-50)$

$\cos(\theta+40-(\theta-50))$

$\cos(\cancel{\theta}+40 - \cancel{\theta}+50)$

$\cos(40+50)$

$\cos(90) = 0$

(٢) أثبت صحة ما يلي:

1) $\cos(\theta + 60°) = \sin(30° - \theta)$

$L.H.S = \cos(\theta + 60)$

$= \cos\theta \cos 60 - \sin\theta \sin 60$

$= (\cos\theta)(\frac{1}{2}) - (\sin\theta)(\frac{\sqrt{3}}{2})$

$R.H.S = \sin(30 - \theta)$

$= \sin 30 \cos\theta - \cos 30 \sin\theta$

$= \frac{1}{2}\cos\theta - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta$ $\quad L.H.S = R.H.S$

(١) أثبت صحة

3) $\tan(\theta + 45) = \dfrac{1 + \tan\theta}{1 - \tan\theta}$

$L.H.S = \tan(\theta + 45) = \tan(45 + \theta)$

$= \dfrac{\tan 45 + \tan\theta}{1 - \tan 45 \tan\theta} = \dfrac{1 + \tan\theta}{1 - (1)\tan\theta} = \dfrac{1 + \tan\theta}{1 - \tan\theta}$

$= R.H.S$

— $\mathit{Sin}\, 3\theta = 3\, \mathit{Sin}\theta - 4\, \mathit{Sin}^3\theta$

لا يحل في هذا المكان

$= \sin(\theta + 2\theta)$

$= \sin\theta \cos 2\theta + \cos\theta \sin 2\theta$

$= \sin\theta[1 - 2\sin^2\theta] + \cos\theta(2\sin\theta\cos\theta)$

$= \sin\theta - 2\sin^3\theta + 2\sin\theta(\overset{\cos^2}{1 - \sin^2\theta})$

$= \sin\theta - 2\sin^3\theta + 2\sin\theta - 2\sin^3\theta$

$= 3\sin\theta - 4\sin^3\theta$

5) $\cos\left(\underset{220}{\dfrac{3\pi}{2}} - \theta\right) = -\sin\theta$

$L.H.S = \cos(270 - \theta)$

$= \cos 270 \cos\theta + \sin 270 \sin\theta$

$= \cancel{(0)\cos\theta} + (-1)\sin\theta$

$= -\sin\theta$

$= R.H.S$

6) $\tan\left(\theta + \dfrac{\pi}{2}\right) = -\cot\theta$

$\tan((\theta -) - \frac{\pi}{2})$

$= \cot(-\theta)$

$- \cot$

اذا كان رقم مختلف عن الزوايا
يجب د اختباره هنا

7) $\sin 24^\circ + \cos 54^\circ = \cos 6^\circ$

$L.H.S = \sin(30-6) + \cos(60-6)$

$(\sin 30 \cos 6 - \cos 30 \sin 6) + (\cos 60 \cos 6 + \sin 60 \sin 6)$

$\frac{1}{2}\cos 6 - \cancel{\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 6} + \frac{1}{2}\cos 6 + \cancel{\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 6}$

$\frac{1}{2}\cos 6 + \frac{1}{2}\cos 6$

$= \cos 6 = R.H.S$

---

8) $\cos\left(\theta + \frac{\pi}{3}\right)\cos\frac{2\pi}{3} - \sin\left(\theta + \frac{\pi}{3}\right)\sin\frac{2\pi}{3} = -\cos\theta$

$\cos\left(\theta + \frac{\pi}{3} + \frac{2\pi}{3}\right)$

$\cos(\theta + \pi)$

$\cos\theta \cos 180 - \sin\theta \sin 180$

$(\cos\theta)(-1) - (\cancel{\sin\theta)\cos}$

$= -\cos\theta$

---

9) $\sin(A+B)\sin(A-B) = \sin^2 A - \sin^2 B$

محذوف

---

10) $\sin(A+B) = \frac{\tan A + \tan B}{\sec A \sec B}$

$R.H.S = \frac{\tan A + \tan B}{\sec A \sec B} = \frac{\tan A}{\sec A \sec B} + \frac{\tan B}{\sec A \sec B}$

$= \frac{\sin A}{\cancel{\cos A}} \cdot \frac{\cancel{\cos A}}{1} \cdot \frac{\cos B}{1} + \frac{\sin B}{\cancel{\cos B}} \cdot \frac{\cos A}{1} \cdot \frac{\cancel{\cos B}}{1}$

$\sin A \cos B + \cos A \sin B$

$= \sin(A+B) = L.H.S$

اثبت صحة المتطابقة

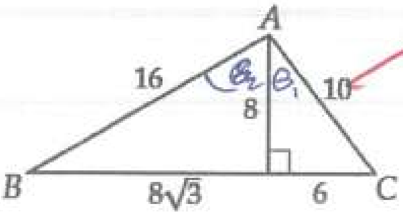
11) $sec(A-B)=\frac{\sec A.\sec B}{1+\tan A\ .\tan B}$

$R.H.S=\frac{\sec A.\sec B}{1+\tan A\tan B}=\frac{\frac{1}{\cos A}\cdot\frac{1}{\cos B}}{1+\frac{\sin A}{\cos A}\cdot\frac{\sin B}{\cos B}}$

$=\frac{\frac{1}{\cos A}\cdot\frac{1}{\cos B}}{\frac{\cos A\cos B+\sin A\sin B}{\cos A\cos B}}$ $\quad\frac{1}{\cos(A-B)}=\sec(A-B)$

$=L.H.S$

اوجد القيمة الفعلية لجيب تمام الزاوية BAC ثم اوجد قياسها



القيمة الفعلية جيب تمام
و قياسها $\angle BAC$

$\cos(\theta_1+\theta_2)=\cos\theta_1\cos\theta_2-\sin\theta_1\sin\theta_2$

$=\left(\frac{8}{10}\right)\left(\frac{8}{16}\right)-\left(\frac{6}{10}\right)\left(\frac{8\sqrt{3}}{10}\right)=\frac{64-48\sqrt{3}}{160}$

$=\cos^{-1}\left(\frac{64-48\sqrt{3}}{160}\right)=m\angle BAC=96.86^\circ$

اشتق المتطابقة $\cot(A+B)$ بدلالة كل من : $\cot A\ ,\ \cot B$

$\cot(A+B)=\frac{1}{\tan(A+B)}$

$=\frac{1-\tan A\tan B}{\tan A+\tan B}\div\tan A\tan B$

$=\frac{\frac{1}{\tan A\tan B}-\frac{\tan A\tan B}{\tan A\tan B}}{\frac{\tan A+\tan B}{\tan A\tan B}}=\frac{\frac{1}{\tan A\tan B}}{\frac{1}{\tan A}\cdot\frac{1}{\tan B}}$

٢

---

(١) يمر تيار كهربائي متردد في إحدى الدوائر الكهربائية، ويمكن استعمال الصيغة $c=5\sin(255t)$ لحساب شدة التيار c ، بالأمبير بعد مرو t ثانية.

$(45t+210t)$

(أ) أعد كتابة الصيغة باستعمال مجموع زاويتين.

$C=5\sin(45t+210t)$

(ب) أوجد شدة التيار بعد مرو 1 sec .

$t=1$

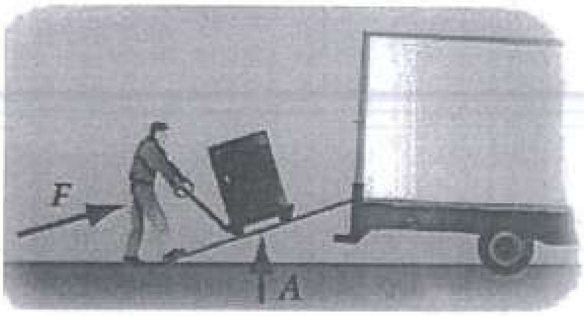
$C=5\sin(45+210)$

$5[(\sin 45)(\cos 210)+(\cos 45)(\sin 210)]$

$=5\left[\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(\frac{-\sqrt{3}}{2}\right)+\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(\frac{-1}{2}\right)\right]$

$=-\frac{5\sqrt{6}+5\sqrt{2}}{4}$

(٢) في الشكل أدناه، إذا كان مقدار القوة اللازمة F، والضرورية لإبقاء الخزنة ثابتة على المنحدر تعطى بالعلاقة $F = \frac{W(sinA + \mu cosA)}{cosA - \mu sinA}$، حيث W هو وزن الخزنة، و $\mu = tan\theta$. فأثبت أن: $F = Wtan(A+\theta)$.



$$F = \frac{w\left(sinA + \frac{sin\theta}{cos\theta} \cdot cosA\right)}{cosA - \frac{sin\theta}{cos\theta} \cdot sinA}$$

$$F = \frac{w\left(\frac{sinA\,cos\theta + sin\theta\,cosA}{cos\theta}\right)}{\frac{cosA\,cos\theta - sin\theta\,sinA}{cos\theta}}$$

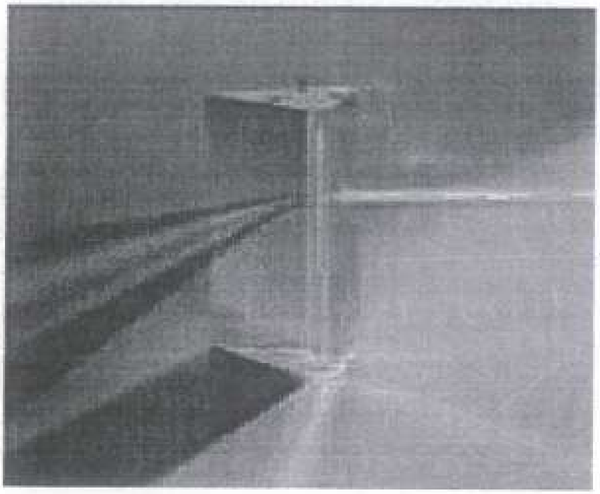
$$F = w\,\frac{sinA\,cos\theta + cosA\,sin\theta}{cosA\,cos\theta - sinA\,sin\theta}$$

$$w\,\frac{sin(A+\theta)}{cos(A+\theta)} = w\,tan(A+\theta)$$

---

(٣) عندما يمر الضوء من خلال منشور زجاجي، فإن معامل الانكسار n في الزجاج بالنسبة للهواء يعطى بالمعادلة: $n = \frac{sin\left[\frac{1}{2}(a+b)\right]}{sin\frac{b}{2}}$ ، حيث a قياس زاوية انحراف الضوء الخارج من المنشور، و b قياس زاوية رأس المنشور. أثبت أنه في المنشور المعطى: $n = \sqrt{3}sin\frac{a}{2} + cos\frac{a}{2}$.

محذوف



سؤال في اختبار

مفهوم أساسي **المتطابقات المثلثية لضعف الزاوية**

المتطابقات الآتية صحيحة لقيم θ جميعها:

$$\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$$

$$\cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta$$
$$\cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1$$
$$\cos 2\theta = 1 - 2\sin^2\theta$$

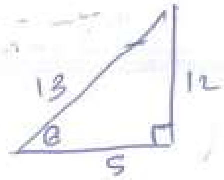
$$\tan 2\theta = \frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}$$

(١) إذا كان $\sin\theta = \frac{12}{13}$, $90° < \theta < 180°$ ، فأوجد مستعملاً المتطابقات القيمة الفعلية لـ :

1) $\sin 2\theta$ **2) $\cos 2\theta$** **3) $\cot 2\theta$** **4) $\sec 2\theta$**

1) $\sin 2\theta = 2\sin\cos$

$2\left(\frac{12}{13}\right)\left(-\frac{5}{13}\right)$



$\cos = -\frac{5}{13}$

$= 2\left(\frac{12}{13}\right)\left(-\frac{5}{13}\right)$

$= -\frac{120}{169}$

2) $\cos 2\theta =$

$1 - 2\left(\frac{12}{13}\right)^2$

$= -\frac{119}{169}$

3) $\tan 2\theta$

$= \frac{\sin 2\theta}{\cos 2\theta}$

$= \frac{\frac{-120}{169}}{-\frac{119}{169}}$

$= -\frac{120}{119}$

$= \cot 2\theta$

$= \frac{1}{\tan 2\theta} = \frac{119}{120}$

4) $\sec 2\theta = \frac{1}{\cos 2\theta}$

$= \sec 2\theta =$

$= -\frac{169}{119}$

١٠

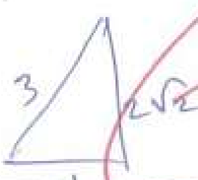
١٠

1) أوجد القيمة الفعلية لـ $\sin 2\theta$ ، إذا كانت $\cos\theta = -\frac{1}{3}$ ، $90° < \theta < 180°$. $\frac{-4\sqrt{2}}{9}$

$\sin 2\theta = 2\sin\cos\theta$

$\sin =$

$2\left(\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)\left(-\frac{1}{3}\right)$



$= \frac{-4\sqrt{2}}{9}$

$\sqrt{3^2 - 1^2} = 2\sqrt{2}$

١٠

سؤال الاختبار

مفهوم أساسي **المتطابقات المثلثية لنصف الزاوية**

المتطابقات الآتية صحيحة لقيم θ جميعها:

$$\sin\frac{\theta}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{2}} \qquad \cos\frac{\theta}{2}=\pm\sqrt{\frac{1+\cos\theta}{2}} \qquad \tan\frac{\theta}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}},\ \cos\theta\neq-1$$

(٣) إذ كان $\tan\theta=\frac{8}{15}$, $180°<\theta<270°$ فأوجد مستعملاً المتطابقات القيمة الفعلية لـ : من دون بحيث 0.0

1) $\sin\frac{\theta}{2}$ 2) $\cos\frac{\theta}{2}$ 3) $\cot\frac{\theta}{2}$

$\sqrt{15^2+8^2}=17$

$\sin=-\frac{8}{17}$ $\cos=-\frac{15}{17}$

$\sin\frac{\theta}{2}$ $\frac{180}{2}<\frac{\theta}{2}<\frac{270}{2}$

$=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{2}}$

$=+\sqrt{\frac{1-(-\frac{15}{17})}{2}}$

$=\sqrt{\frac{\frac{32}{17}}{2}}$

$=\sqrt{\frac{16}{17}}$

$=\frac{4\sqrt{17}}{17}$

$\cos\frac{\theta}{2}$

$=-\sqrt{\frac{1+(-\frac{15}{17})}{2}}$

$=-\frac{\sqrt{17}}{17}$

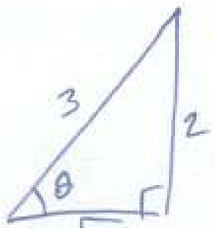
$\tan\frac{\theta}{2}$

$=\pm\sqrt{\frac{1-(-\frac{15}{17})}{1+(-\frac{15}{17})}}$

$=-4$

$\cot=-\frac{1}{4}$

أوجد القيمة الفعلية لـ $\sin\frac{\theta}{2}$ ، علمًا بأن $\sin\theta=\frac{2}{3}$ ، θ تقع في الربع الثاني.



$=\sqrt{3^2-2^2}$

$=\sqrt{5}$

$\cos=-\frac{\sqrt{5}}{3}$

$\sin\frac{\theta}{2}=\sqrt{\frac{1-(\frac{\sqrt{5}}{3})}{2}}$

$=\sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{6}}$

$\simeq$

0.93

اذا لم يحدد في السؤال أحل بأي طريقة

واذا حدد مثال حل المتطابقات الضعف الزاوية أو الجمع والطرح

(١) بدون استعمال الآلة الحاسبة، أوجد القيمة الفعلية لما يأتي:

1) $\sin 67.5°$ ← في الربع الأول

$\sin \frac{\theta}{2}$

$\sin \frac{135}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{2}}$

$= + \sqrt{\frac{1-\cos 135}{2}}$

$= \sqrt{\frac{1-\left(\frac{-\sqrt{2}}{2}\right)}{2}}$

$= \sqrt{\frac{2+\sqrt{2}}{4}} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$

2) $\tan\frac{5\pi}{12}$

$\tan = 75$

$\tan(45+30)$

$= \frac{\tan 45 + \tan 30}{1-\tan 45 \tan 30}$

$= \frac{1+\frac{\sqrt{3}}{3}}{1-(1)\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)}$

$= \frac{3+\sqrt{3}}{3-\sqrt{3}}$

$= 2+\sqrt{3}$

$\tan\frac{150}{2}$

$= \pm\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{1-\cos\theta}}$

$= + \sqrt{\frac{1-\cos 150}{1+\cos 150}}$

$= \sqrt{\frac{1+\frac{\sqrt{3}}{2}}{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}}$

$= \sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}}$

3) $2\sin 15\cos 15$

$\sin 30$

$= \frac{1}{2}$

4) $2\cos^2 22.5 - 1$

$= \cos(2\times 22.5)$

$= \cos 45$

$= \frac{\sqrt{2}}{2}$

5) $\frac{2\tan 67.5}{1-\tan^2 67.5}$

$\tan(2\times 67.5)$

$= \tan 135$

$= -1$

6) $1-2\sin^2\frac{7\pi}{12}$

$\cos(2\times 105)$

$= \cos 210$

$= -\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\frac{Tan68 - \cot67}{1+Tan68Tan23} = 1$ $90-67$ $= \frac{\tan68 - \tan(23)}{1+\tan68\tan33}$ $= \tan(68-23)$ $= \tan45 = 1$	$\frac{2Sin67.5\ Cos67.5}{Cos40Cos10+Sin40Sin10} = \frac{\sqrt{6}}{3}$ $\frac{\sin 2\times67.5}{\cos(40-10)}$ $= \frac{\sin135}{\cos30}$ $= \frac{\sqrt2}{2} \div \frac{\sqrt3}{2} = \frac{\sqrt6}{3}$
$\frac{Tan25-Tan175^\circ}{1+Tan25.Tan175} = \frac{\sqrt3}{3}$ $\tan(25-175)$ $= \tan(-150)+360$ $= \tan(210) = \frac{\sqrt3}{3}$	$\frac{Sin50}{1+Cos50} = Tan\ 25^\circ$ L.H.S $\frac{2\sin25\cos25}{1+2\cos^2 25-1}$ تابع $= \frac{\cancel{2}\sin25\ \cancel{\cos25}}{\cancel{2}\cos\cancel{25}\cos25} = \tan25$ R.H.S
$\frac{2Tan112.5}{1-Tan^2 112.5} = 1$ $\tan(2\times112.5) =$ $\tan(225) = 1$	$\frac{Cos55\sin15 - Sin55\cos15}{2Cos^2 25 - 1} = -1$ $\frac{-(\sin55\cos15 - \cos55\sin15)}{2\cos^2 25-1}$ $\frac{-(\sin(55-15))}{\cos(2\times25)}$ $\frac{-(\sin(40))}{\cos(50)}$ $\frac{-\cos50}{\cos50} = -1 =$ R.H.S

(2) Sin 25 + cos 55 = cos 5	**(1) sin 40 = 8 sin 5 cos 5 cos 10 cos 20**
$\sin(30-5)+\cos(60-5)$ $\sin 30\cos 5-\cos 30\sin 5+\cos 60\cos 5+\sin 60\sin 5$ $=\frac{1}{2}\cos 5-\cancel{\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 5}+\frac{1}{2}\cos 5+\cancel{\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 5}$ $=1\cos 5$	L.H.S $=\sin 2(20)$ $=2\sin 20\cos 20$ $=2(2\sin 10\cos 10)\cos 20$ $=4(2\sin 5\cos 5)\cos 10\cos 20$ $=8\sin 5\cos 5\cos 10\cos 20$ $=$ R.H.S
$\dfrac{1+\cos\theta+\cos 2\theta}{\sin\theta+\sin 2\theta}=\cot\theta$	$\dfrac{\sin 35+\sin 70}{1+\cos 35+\cos 70}=\tan 35^{\circ}$
L.H.S $=\dfrac{\cancel{1}+\cos\theta+2\cos^2\theta-\cancel{1}}{\sin\theta+2\sin\theta\cos\theta}$ $=\dfrac{\cos(1+2\cos\theta)}{\sin(1+2\cos\theta)}$ $=\cot\theta=$ R.H.S	$\dfrac{\sin 35+2\sin 35\cos 35}{\cancel{1}+\cos 35+2\cos^2 35-\cancel{1}}$ $\dfrac{\sin 35(1+2\cos 35)}{\cos 35(1+2\cos 35)}$ $\dfrac{\sin 35}{\cos 35}=\tan 35=$ R.H.S
$\sin^2\theta=\frac{1}{2}(1-\cos 2\theta)$	**4)** $\tan 50^{\circ}=\dfrac{1+\tan 5^{\circ}}{1-\tan 5^{\circ}}$
R.H.S $=\frac{1}{2}[1-(1-2\sin^2\theta)]$ $\frac{1}{2}(\cancel{1}-\cancel{1}+2\sin^2\theta)$ $\frac{1}{2}\times 2\sin^2\theta$ $=\sin^2\theta$	$\tan 50=\tan(45+5)$ $\dfrac{\tan 45+\tan 5}{1-\tan 45\tan 5}$ $\dfrac{(1)+\tan 5}{1-(1)\tan 5}$ $=\dfrac{1+\tan 5}{1-\tan 5}$

(١) أثبت صحة ما يلي:

1) $\frac{sin4\theta}{sin\theta} = 4cos\theta cos2\theta$

$\frac{(2 sin 2\theta \, cos 2\theta)}{sin}$

$\frac{2(2 \cancel{sin} \theta \, cos\theta) cos 2\theta}{\cancel{sin} \theta}$

$4 cos\theta \, cos 2\theta$

2) $sin8\theta = 8sin\theta cos\theta cos2\theta cos4\theta$

R.A.S $sin 8\theta$

$(2 sin 4\theta \, cos 4\theta)$

$2(2 sin 2\theta \, cos 2\theta) cos 4\theta$

$4(2 sin\theta \, cos\theta) cos 2\theta \, cos 4\theta$

$8 sin\theta \, cos\theta \, cos 2\theta \, cos 4\theta$

---

3) $(sin\theta + cos\theta)^2 = 1 + sin2\theta$

L.H.S $= \underline{sin^2 + cos^2} + \underline{2 sin cos\theta}$

$= \quad 1 \quad + \quad sin 2\theta$

4) $cos^4\theta - sin^4\theta = cos2\theta$

L.H.S =

$(cos^2 + sin^2)(cos^2 - sin^2)$

$(1) \quad (cos 2\theta) = cos 2\theta$

---

5) $\frac{sin2\theta}{1-cos2\theta} = cot\theta$

$\frac{2 sin cos}{1-(1-2sin^2\theta)}$

$\frac{2 sin cos}{\cancel{1-1} + 2 sin^2\theta}$

$\frac{\cancel{2} sin cos}{\cancel{2} sin^2} = \frac{cos}{sin}$

6) $\frac{sin2\theta}{1+cos2\theta} = tan\theta$

$\frac{\cancel{2} sin cos}{\cancel{1} + \cancel{2} cos^2\theta - \cancel{1}}$

$\frac{sin}{cos} = tan\theta$

---

8) $\frac{cos2\theta}{1+sin2\theta} = \frac{cos\theta - sin\theta}{cos\theta + sin\theta}$

L.H.S $= \frac{cos^2 - sin^2}{cos^2 + sin^2 + 2 sin cos}$

$= \frac{cos^2 - sin^2}{cos^2 + 2 sin cos + sin^2}$

$= \frac{(cos - sin)(\cancel{cos + sin})}{(cos + sin)(\cancel{cos + sin})}$

$$\tan 2\theta = \frac{2}{\cot\theta - \tan\theta}$$

$L.H.S = \tan 2\theta = \dfrac{2\tan\theta}{1-\tan^2} \div \tan\theta$

$= \dfrac{2}{\dfrac{1}{\tan\theta} - \tan\theta} = \dfrac{2}{\cot\theta - \tan\theta}$

---

9) $\dfrac{1-\tan^2\theta}{1+\tan^2\theta} = \cos 2\theta$

$L.H.S =$

$\dfrac{1-\tan^2\theta}{\sec^2\theta}$

$= \left(1 - \dfrac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}\right) \div \dfrac{1}{\cos^2}$

$\left(1 - \dfrac{\sin^2}{\cos^2}\right) \times \dfrac{\cos^2}{1}$

$\cos^2 - \sin^2$

$\cos 2\theta = R.Hs$

10) $\tan\dfrac{\theta}{2} = \dfrac{\sin\theta}{1+\cos\theta}$

$\dfrac{\sin\theta}{1+\cos\theta} = \dfrac{2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}}{\cancel{1}+2\cos^2\frac{\theta}{2}\cancel{-1}}$

$\dfrac{2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}}{2\cos\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}} = \tan\dfrac{\theta}{2} = R.H.S$

Bo.omar90

(٢) إذا كان $\sin\theta + \cos\theta = \frac{7}{5}$ فاثبت أن: $\sin 2\theta = \frac{24}{25}$.

$(\sin\theta + \cos\theta)^2 = \left(\frac{7}{5}\right)^2$

$\sin^2\theta + \cos^2\theta + 2\sin\theta\cos\theta = \dfrac{49}{25}$

$1 + \sin 2\theta = \dfrac{49}{25}$

$\sin 2\theta = \dfrac{49}{25} - 1 = \dfrac{24}{25}$

(٣) إذا كان $tan\theta_1 = \frac{1}{3}\ ,tan\theta_2 = \frac{1}{7}$ حيث $0 < \theta_1, \theta_2 < 90$. فاثبت أن: $\tan(2\theta_1 + \theta_2) = 1$.

$$L.H.S = \frac{\tan 2\theta_1 + \tan\theta_2}{1 - \tan 2\theta_1 \tan\theta_2} =$$

$$\tan 2\theta_1 = \frac{2\tan\theta_1}{1-\tan^2\theta_1} = \frac{2(\frac{1}{3})}{1-(\frac{1}{3})^2} = \frac{3}{4}$$

$$= \frac{\frac{3}{4} + \frac{1}{7}}{1 - (\frac{3}{4})(\frac{1}{7})} = 1$$

$$\cot\theta + \sec\theta = \frac{\cos^2\theta + \sin\theta}{\sin\theta\cos\theta}$$

$$\frac{\cos}{\sin} + \frac{1}{\cos}$$

$$\frac{\cos \times \cos + 1 \times \sin}{\sin \cos}$$

$$= \frac{\cos^2 + \sin}{\sin \cos}$$

---

(٤)تدريب أثبت أن: $Cos\ 3\ \theta = 4\ Cos^3\theta - 3\ Cos\ \theta$

$$Sec2\ \theta + Tan2\ \theta = \frac{Cos\theta + Sin\theta}{Cos\theta - Sin\theta}$$

$$L.H.S = \frac{1}{\cos 2\theta} + \frac{\sin 2\theta}{\cos 2\theta}$$

$$= \frac{1 + \sin 2\theta}{\cos 2\theta}$$

$$= \frac{\cos^2\theta + 2\sin\cos + \sin^2}{\cos^2 - \sin^2}$$

$$= \frac{(\cos\theta + \sin\theta)(\cos\theta + \sin\theta)}{(\cos\theta + \sin\theta)(\cos\theta - \sin\theta)}$$

$$= R.H.S$$

$$\cdot\frac{\cos 2\theta}{1+\sin 2\theta} = \frac{\cot\theta - 1}{\cot\theta + 1}$$

$$\frac{\frac{\cos}{\sin} - 1}{\frac{\cos}{\sin} + 1} = \frac{\frac{\cos - \sin}{\sin}}{\frac{\cos + \sin}{\sin}} = \frac{\cos - \sin}{\cos + \sin} \times \frac{\cos + \sin}{\cos + \sin} =$$

$$= \frac{\cos^2 - \sin^2}{\cos^2 + \sin^2 + 2\sin\cos} = \frac{\cos 2\theta}{1 + \sin 2\theta}$$

1-5

حل المعادلات المثلثية
Solving Trigonometric Equations

(١) أوجد مجموعة حل المعادلة: $2\cos\theta - 1 = 0$
في كل من الحالات كما هو بالجدول

$\frac{2\cos\theta}{2} = \frac{1}{2}$

$\cos\theta = \frac{1}{2}$

نكتب الزاوية من 0 إلى 360 إذا وجدت $(60 , 300)$ هنا لأنه يوجد = فيمكننا أن نكتب 0 في حال وجودها	$0 \le \theta \le 360$
(لا يوجد زاوية) $\emptyset$	$90 \le \theta \le 270$
$60 \times \left(\frac{\pi}{180}\right) = \frac{\pi}{3}$ $\quad 300\left(\frac{\pi}{180}\right) = \frac{5\pi}{3}$ إذا طلب بالراديان نحول الدرجة إلى الراديان	$0 < \theta < 2\pi$
$60 \leftarrow \frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{4} < \theta < \pi$ (45, 180)
$60 + 360K$ $300 + 360K$ K عدد صحيح	لجميع قيم θ بالدرجات
$\frac{\pi}{3} + 2\pi K$ $\frac{5\pi}{3} + 2\pi K$	لجميع قيم θ بالراديان

---

(٢) حل المعادلة: $2\sin\theta + \sqrt{3} = 0$ علماً بأن $0 < \theta < 2\pi$. ← حدد بالراديان

$2\sin\theta + \sqrt{3} = 0$

$\frac{2\sin\theta}{2} = \frac{-\sqrt{3}}{2}$

$\sin\theta = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ الربع ③ ، الربع ④

$\theta_r = \sin^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 60$

$\theta_3 = 180 + \theta = 180 + 60 = 240$

$\theta_4 = 360 - \theta = 360 - 60 = 300$

$60\left(\frac{\pi}{180}\right) = \frac{\pi}{3} \qquad 240\left(\frac{\pi}{180}\right) = \frac{4}{3}\pi$

---

(٣) حل المعادلة $\cot\theta = \sqrt{3}$ لجميع قيم θ بالدرجات

$\cot = \sqrt{3}$

$\tan = \frac{1}{\sqrt{3}}$ ① ، ③

$= \tan^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = 30$

$= 180 + \theta = 180 + 30 = 210$

$30 + 360K$

$210 + 360K$

(٤) حل المعادلة $csc\theta + \sqrt{2} = 0$ لجميع قيم θ بالراديان.

$$\sin = -\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{cases} (3) \\ (4) \end{cases}$$

$$\theta_1 = \sin^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 45$$

$$\theta_3 = 180 + \theta = 180 + 45 = 225\left(\frac{\pi}{180}\right) \quad \frac{5}{4}\pi$$

$$\theta_3 = 360 - \theta = 360 - 225 = 135\left(\frac{\pi}{180}\right) = \frac{3}{4}\pi$$

$\frac{5}{4}\pi + 2\pi K$ قيم θ بالراديان

$\frac{3}{4}\pi + 2\pi K$

---

(٥) في الفترة $0 \le \theta < 360$ حل المعادلات التالية: زوايا محورية

1) $sin\theta = 0$	2) $cos\theta = 0$	3) $tan\theta = 0$ $0 \leftarrow \frac{y=0}{x}$
$\theta = 0, 180$	$\theta = 90, 270$	$\theta = 0, 180$
4) $sin\theta = 1$	5) $cos\theta = 1$	6) $tan\theta =$ غير معرف
$\theta = 90$	$\theta = 0$	$\theta = 90, 270$
7) $sin\theta = -1$	8) $cos\theta = -1$	6) $cot\theta =$ غير معرف $\frac{x}{y}$ صفر
$\theta = 270$	$\theta = 180$	$\theta = 0, 180$

---

(٦) حل المعادلة $sin2\theta - sin\theta = 0$ علماً بأن $0 \le \theta \le 360$.

$$2\sin\theta\cos\theta - (1)\sin\theta = 0$$

$$\sin\theta(2\cos - 1) = 0$$

$\sin = 0$

$\theta = 0, 180, 360$

$\frac{2\cos - 1}{2} = 0$

$\cos = \frac{1}{2}$

(1) 60   (4) $360 - \theta$ 300

الحلول $\{0, 60, 180, 300, 360\}$

(٧) حل المعادلة $sin2\theta = cos\theta$ علماً بأن $0 \le \theta \le 360$.

sin 2θ - cos θ

2 sin cos - cos θ

cos θ (2 sin - 1)

cos = 0 | 2 sin - 1 = 0

θ = 90 , 270 | $\frac{2\sin}{2} = \frac{1}{2}$ ① 30 ② 180 - 30 = 150

١/١

الحلول {90 , 270 , 30 , 150}

---

(٨) حل المعادلة $4\cos^2\theta - 1 = 0$ حيث $90 \le \theta \le 270$

4 cos² - 1 = 0

$\frac{4\cos^2}{4} = \frac{1}{4}$

cos = $\sqrt{\frac{1}{4}}$ cos = ± $\frac{1}{2}$ ② ①

١/١

$\cos^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) = 60$

180 - 60 = 120

180 + 60 = 240

{240 , 120}

---

(٩) حل المعادلة $cos2\theta + 4cos\theta = -3$ علماً بأن $0 \le \theta < 2\pi$.

cos 2θ + 4 cos

2cos² - 1 + 4 cos + 3

2 cos² + 4 cos + 2

2 (cos² + 2cos + 1) = 0

cos = -1

θ = 180

{π}

(١٠) حل المعادلة $cos2\theta = 8 - 15sin\theta$ لجميع قيم θ بالدرجات.

$1 - 2\sin^2\theta = 8 - 15\sin\theta$

$0 = 2\sin^2 - 1 + 8 - 15\sin\theta$

$0 = 2\sin^2\theta - 15\sin\theta + 7$

$0 = (2\sin\theta - 1)(\sin\theta - 7)$

30 ① $2\sin\theta - 1 = 0$ | $\sin - 7 =$

150 ② $\sin = \frac{1}{2}$ | $\sin = 7$

مرفوض

لا يوجد كيف أكبر من واحد

إذا كان الأخير موجب ثم نأخذ اشارة الأوسط

الحل

$= 30 + 360K$

$150 + 360K$

---

(١١) حل المعادلة $cos2\theta + 3cos\theta = 1$ حيث $\theta \in [0,2\pi]$.

$2\cos^2 - 1 + 3\cos + 1$

$2\cos^2 + 3\cos - 2 = 0$

$(2\cos - 1)(\cos + 2)$

60 ① $\cos = \frac{1}{2}$ | $\cos = -2$

300 ④ | $\varnothing$

$\theta = \frac{\pi}{3} + 2\pi K$ $\quad \theta = \frac{5\pi}{3} + 2\pi K$

$K = 0$

$= \{\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}\}$

---

(١٢) حل المعادلة $cos2\theta = \frac{1}{2}$ لجميع قيم θ بالدرجات. ثم اوجد مجموعة الحل في الفترة $\theta \in [0,180]$

يجب أن يكون الزوايا على حدود 0 و 180

$\cos 2\theta = \frac{1}{2}$ ① ④

$2\theta = \cos^{-1}(\frac{1}{2})$

$2\theta = 60$

① $2\theta = \frac{60 + 360K}{2}$

$\theta = 30 + 180K$

② $2\theta = 300 + 360K$

$\theta = 150 + 180K$

$K = 0$

$K = 1$

$\theta = 30 + 180(0)$

$= 30$

$\theta = 150 + 180(0)$

$= 150$

مجموعة الحل

$[30, 150]$

(١٣) حل المعادلة $cos2\theta = \frac{1}{2}$ حيث $0 < \theta < 360$.

$\cos 2\theta = \frac{1}{2} = 2\theta = \cos^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$

$2\theta = \begin{cases} 60 \\ 300 \end{cases}$

تحقق

$30 + 180(1) = 210$

$150 + 180(1) = 330$

$\frac{2\theta}{2} = \frac{60 + 360K}{2}$

$= 30 + 180$

$\frac{2\theta}{2} = \frac{300 + 360K}{2}$

$K = 0$

$= 150 + 180K$

$30 + 180 \times 2 = 390\ \cancel{\theta}$

$150 + 180 \times 2 = 510\ \cancel{\theta}$

$= \{150, 30\}$ $(K = 0)$ مرفوض

---

(١٤) حل المعادلة: $2sin6\theta + \sqrt{2} = 0$ لجميع قيم θ بالراديان.

$\frac{2\sin 6\theta}{2} = \frac{-\sqrt{2}}{2}$

$\sin 6\theta = \frac{-\sqrt{2}}{2}$ ③ 225 ④ 315

$225 \times \frac{\pi}{180} = \frac{5\pi}{4}$

$315 \times \frac{\pi}{180} = \frac{7\pi}{4}$

$\frac{6\theta}{6} = \frac{\frac{5\pi}{4} + 2\pi K}{6}$

$\frac{6\theta}{6} = \frac{\frac{7\pi}{4} + 2\pi K}{6}$

---

(١٥) حل المعادلة: $2sin\frac{\theta}{3} - \sqrt{3} = 0$ حيث $0 < \theta < 2\pi$.

$2\sin\frac{\theta}{3} - \sqrt{3} = 0$

$\frac{2\sin\frac{\theta}{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ① 60 ② 120

$\frac{\theta}{3} = 60 \times \frac{\pi}{180} = \frac{1}{3}\pi \times 3 = \pi$

$\frac{\theta}{3} = 120 \times \frac{\pi}{180} = \frac{2}{3}\pi \times 3 = 2\pi$

$\left(\frac{\pi}{3} + 6\pi K\right) \quad (2\pi + 6\pi K)$

$K = 0$ $\pi, 2\pi$ الحل $= \pi$

(١٦) حل المعادلة $\sin\theta - \cos\theta = 1$ لجميع قيم θ بالراديان.

$(\sin - \cos)^2 = (1)^2$

$\sin^2 + \cos^2 - 2\sin\cos = 1$

$1 - 2\sin\theta\cos\theta = 1$

$-2\sin\cos = 0$

$\sin\cos = 0$

$\sin = 0 \quad | \quad \cos = 0$

$\theta = 0, 180, 360 \quad | \quad \theta = 90, 270$

$180 = \pi + 2\pi K \qquad 90 = \frac{\pi}{2} + 2\pi K$

اذا ربعت الطرفين لازم تتحقق من خلال التعويض في θ

(١٧) حل المعادلة $\sin\theta\cot\theta - \cos^2\theta = 0$ لجميع قيم θ بالدرجات.

$\sin \times \frac{\cos}{\sin} - \cos^2 = 0$

لازم نكتب صفة اذا حذفنا $\sin \neq 0$ $\sin$

$\cos\theta - \cos^2\theta = 0$

$\cos\theta(1 - \cos\theta) = 0$

$\cos\theta = 0 \quad | \quad \cos\theta = 1$

$\theta = 90, 270 \quad | \quad \theta = 0, 360$

مرفوض

لانه $\sin$ لا تساوي صفر عندما نعوضها لن تعطينا جواباً

الحل $= \left\{ \begin{matrix} 90 + 360K \\ 270 + 360K \end{matrix} \right\} = \{90 + 180K\}$

(١٨) حل كل من المعادلتين: $\sin\theta + \cos\theta = \sqrt{2}$ و $\sin\frac{\theta}{2} + \cos\frac{\theta}{2} = \sqrt{2}$ لجميع القيم بالدرجات.

$(\sin\frac{\theta}{2} + \cos\frac{\theta}{2})^2 = (\sqrt{2})^2$

$\sin^2\frac{\theta}{2} + \cos^2\frac{\theta}{2} + 2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2} = 2$

$1 + \sin\theta = 2$

$\sin\theta = 1$

$\theta = 90 \rightarrow 90 + 360K$

حيث K عدد زوجي

الحل

$90 + 720K$

$\frac{\pi}{2} + 4\pi K$

$\sin^2 + \cos^2 + \sin 2 = 2$

$1 + \sin 2\theta = 2$

$\sin 2\theta = 1$

$\frac{2\theta}{2} = \frac{90 + 360K}{2}$

$45 + 180K$

K عدد زوجي

(٨) حل المعادلة $\tan^2\theta - 1 = 0$ لجميع قيم θ بالدرجات.

$\sqrt{\tan^2\theta} = \sqrt{1}$

$\tan\theta = \pm 1$

$\tan\theta = 1$ | $\tan\theta = -1$

$45 + 180K$ (3) 225 (1) 45 | (4) 315 (2) 135 $135 + 180K$

---

٨) حل المعادلة $Tan\,\theta Sec\theta + 2\,Tan\theta = 0$
لجميع قيم θ بالدرجات.

$\tan\theta(\sec\theta + 2) = 0$

$\tan = 0$ | $\sec = -\frac{2}{1}$

$\cos = -\frac{1}{2}$ (2) 120 (3) 240

0
180
360

نأخذ الفرق بينهم

$\theta = 0 + 180K$

$\theta_1 = 120 + 360K$

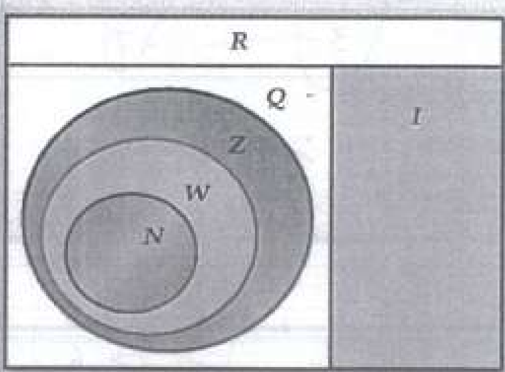
$\theta_2 = 240 + 360K$

مفهوم أساسي الأعداد الحقيقية (R)

أضف إلى مطويتك

N
W
Z
Q
I
R

الرمز	أمثلة	المجموعة
Q	$0.125, -\frac{7}{8}, \frac{2}{3} = 0.66...$	الأعداد النسبية
I	$\pi = 3.14159...$ $\sqrt{3} = 1.73205...$	الأعداد غير النسبية
Z	$-5, 17, -23, 8$	الأعداد الصحيحة
W	$2, 96, 0, \sqrt{36}$	الأعداد الكلية
N	$3, 17, 6, 86$	الأعداد الطبيعية



تدريب(١): اكتب كلاً من مجموعات الأعداد الآتية باستعمال الصفة المميزة، وعلى صورة فترة (إن أمكن):

1	$\{3,4,5,6,...\}$ $\{x \mid x \geq 3, x \in W\}$ Ⓐ الصفة المميزة Ⓑ لا يمكن كتابتها على صورة فترة لأنها مجموعة	2	$\{...,-4,-3,-2,-1\}$ $\{x \mid x \leq -1, x \in Z\}$ لا يمكن كتابتها على صورة فترة لأنها مجموعة
3	$\{7,8,9,10,11\}$ منتهية $\{x \mid 7 \leq x \leq 11, x \in W\}$ لا يمكن كتابتها على صورة فترة	4	$\{-5,-4,...,6,7\}$ منتهية $\{x \mid -5 \leq x \leq 7, x \in Z\}$ لا يمكن كتابتها على صورة فترة
5	$-7 \leq x \leq 9$ لأنه لم يحدد هل كسور أو أرقام $\{x \mid -7 \leq x \leq 9, x \in R\}$ الفترة $[-7, 9]$	6	$2 < y < 5$ $\{y \mid 2 < y < 5, y \in R\}$ $(2, 5)$ الفترة
7	$x \geq 2$ $\{x \mid x \geq 2, x \in R\}$ $[2, \infty)$	8	$x > 18$ أو $x < 0$ $\{x \mid x > 18 \text{ or } x < 0, x \in R\}$ $(18, \infty) \cup (-\infty, 0)$
9	المضاعفات الموجبة للعدد 3 $\{x \mid x = 3n, n \in N\}$ لا يوجد فترة	10	المضاعفات الموجبة للعدد 8 $\{x \mid x = 8n, n \in N\}$ لا يوجد فترة

تدريب(٢): حدد ما إذا كانت كل علاقة مما يأتي تمثل y كدالة في x :

1

١) المتغير x يمثل اسم الشخص، وقيم y تمثل رقمه الشخصي.

أحمد CBR

دالة

٢) المتغير x يمثل اسم المدينة، أما قيم y فتمثل رقم المجمع في تلك المدينة.

ليس دالة

٣) المتغير x يمثل العمر بالسنوات، وقيم y تمثل اسماء الأشخاص.

ليس دالة

2

x	y
-1	-4
2	5
5	5
-1	11

ليس دالة

لأنه العنصر -1 يرتبط بأكثر من عنصر في المدى

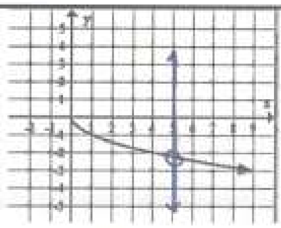
x	y
-1	-4
2	5
5	5
9	11

دالة

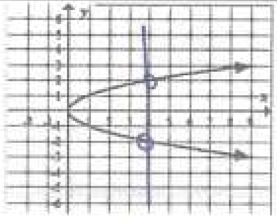
$\{(-1,2),(2,0),(3,5),(2,7),(1,5)\}$

ليست دالة

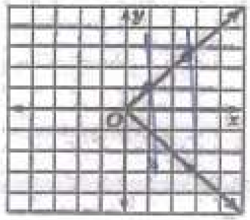
3



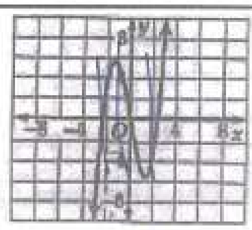
دالة



ليس دالة



ليس دالة



دالة

4

$4x+y=9$

دالة $y=-4x+9$

$y^2-x=5$

ليست دالة $\sqrt{y^2}=\sqrt{x+5}$

$y=\pm\sqrt{x+5}$

$y=x^3-1$

دالة

تدريب(٣): أوجد قيمة كل دالة في كل مما يأتي:

1

$f(x)=x^2+5x-1$

a) $f(-2)=$ $(-2)^2+5(-2)-1=-7$

b) $f(3m)=$ $(3m)^2+5(3m)-1$

$9m^2+15m-1$

2

$h(x)=2x^2-x$

a) $h(3)=$ $2(3)^2-(3)$

$18-3=15$

b) $h(2t)=$ $2(2t)-2t$

$4t-2t=2t$

3

$$g(x)=\begin{cases}2x-3, & x<-3\\ -1, & -3\le x<2\\ x^2+5, & x\ge 2\end{cases}$$

g(0) g(3)

a) $g(0)=$ -1

b) $g(3)=$ $x^2+5=3^2+5=14$

c) $g(-3)=$ -1

نبحث عن الرقم المطلوب في أي فترة

4

$g(a)=5\sqrt{4+a^2}$

a) $g(0)=$ $5\sqrt{4+(0)^2}=10$

b) $g(\sqrt{5})=$ $5\sqrt{4+5}=15$

أولاً : أكمل ما يلي:

١) مجال دالة كثيرة الحدود/الثابتة/ الجذر التكعيبي/ المطلقة هو ..R..........

٢) مجال دالة الجذر التربيعي هو : ....ما تحت الجذر أكبر من أو يساوي صفر

٣) مجال الدالة النسبية: أ) كثيرة حدود قسمة كثيرة حدود: ....المجال R ما عدا أصفار المقام

ب) كثيرة حدود قسمة جذر تربيعي:....المجال حل متباينة الجذر أكبر من الصفر

ج) جذر تربيعي قسمة كثيرة حدود:....ما تحت الجذر أكبر من أو يساوي ٠ ما عدا أصفار المقام مثل $\frac{\sqrt{2x-10}}{x^2-9}$

ثانياً : أجب عما يلي:

تدريب: أوجد مجال الدوال التالية: جذر دليله فردي

$f(x)=\frac{1}{2}x^2-5x+3$ كثيرة حدود R	$g(x)=\sqrt[3]{x-3}$ R
$f(x)=\sqrt[4]{3x+24}$ محذوف $3x+24\geq 0$ $3x\geq -24$ $x\geq -\frac{24}{3}$ $x\geq -8$ $\{x\mid x\geq -8, x\in R\}$ $[-8,\infty)$	$h(t)=\|t-2\|$ دالة المطلقة R
$f(x)=\frac{\sqrt[5]{12-4x}}{x-10}$ $\rightarrow R$ $\leftarrow R$ اذا كانت دالة عادية R مجال البسط $R/\{10\}$ مجال المقام $x-10=0$ $x=10$ ولكن لأنها في المقام يجب أن نكتب $R/\{10\}$	$f(t)=\frac{\sqrt{7-3t}}{5}$ المجال $7-3t\geq 0$ $\frac{-3t}{-3}\geq\frac{-7}{-3}$ اذا قسمنا على سالب نعكس الاشارة $t\leq\frac{7}{3}$ صفة مميزة $\{t\mid t\leq\frac{7}{3}, t\in R\}$ فترة $(-\infty,\frac{7}{3}]$
$f(x)=\frac{\sqrt{3x-12}}{2x-14}$ بسط $3x-12\geq 0$ $\frac{3x}{3}\geq\frac{12}{3}$ $x\geq 4$ $\{x\mid x\geq 4, x\in R\}$ مقام تقاطع المجالين مع عدا أصفار المقام $2x-14=0$ $2x=4$ $x=7$ $R/\{7\}$	$f(x)=\sqrt{25-x^2}$ محذوف $25-x^2\geq 0$ $\frac{-x^2}{-1}\geq\frac{-25}{-1}$ $x\leq\sqrt{\frac{-25}{-1}}$ $x\leq 5$ $\{x\mid x\leq 5, \in R\}$ $(-\infty,5]$

$\{x\mid x\geq 4, x\neq 7, x\in R\}$

$[4,\infty)\setminus\{7\}$

$[4,7)\cup(7,\infty)$

$f(x) = \frac{x^2+7x-1}{\sqrt{x^2+6}}$	$f(x) = \frac{\sqrt{2x-10}}{x^2-7x}$ أصفار المقام $2x - 10 \geq 0$ | $x^2 - 7x = 0$ $\frac{2x}{2} \geq \frac{10}{2}$ | $x(x-7) = 0$ $x \geq 5$ | $x = 0$, $x = 7$ المجال $\{x \geq 5, x \neq 0, x \neq 7\}$
$f(x) = \frac{\sqrt{x^2+5}}{3x-12}$	$f(x) = \frac{\sqrt{x+5}}{x^2-9}$ $x + 5 \geq 0$ | $x^2 - 9 = 0$ $x \geq -5$ | $(x-3)(x+3) = 0$ $x = 3$, $x = -3$ $\{x / x \geq -5 , x \neq 3, -3, x \in R\}$
$f(x) = \frac{2+5x^2}{3x(x+2)} + \frac{25}{x-8}$ $3x(x+2) = 0$ | $x - 8 = 0$ $3x = 0$ | $x + 2 = 0$ | $x = 8$ $x = 0$ | $x = -2$ صفة مميزة $\{x \mid x \neq -2, 0, 8, x \in R\}$ $R \setminus \{-2, 0, 8\}$	$f(x) = \frac{2+5x^2}{3x(x+2)} / \frac{5x}{x-9}$ المجال في المسألة R ماعدا أصفار المقام الأول وبسط ومقام الثاني $3x(x+2) = 0$ | $5x = 0$ | $x - 9 = 0$ $3x = 0$ | $x + 2 = 0$ | $x = 0$ | $x = 9$ $x = 0$ | $x = -2$ $R \setminus \{-2, 0, 9\}$
$h(x) = \frac{3x}{\sqrt{x-2}-4}$ $x - 2 \geq 0$ | $\sqrt{x-2} - 4 = 0$ $x \geq 2$ | $\sqrt{x-2}^2 = 4^2$ $x - 2 = 4^2$ $x = 4^2 + 2$ $x = 18$ المجال $\{x / x \geq 2 , x \neq 18, x \in R\}$ $[2, \infty) \setminus \{18\}$	10) $f(x) = \frac{3-x}{\sqrt{x^2-4}}$

إذا كان جذور فقط تأخذ المقام

حتى في الضرب

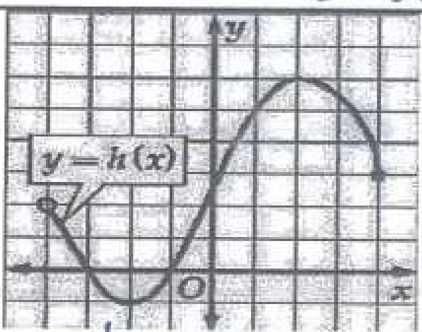
$\frac{2x}{x+4} \cdot \frac{7x}{x-3}$

نفس الحل مقامان 2 فقط

تدريب: استعمل التمثيل البياني للدوال الآتية لإيجاد المجال والمدى:

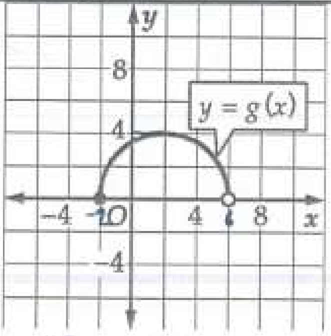
الاقواس
< (○
≤ [●

1



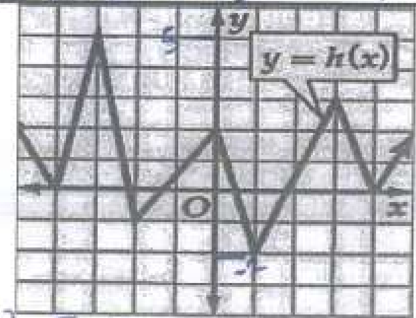
المجال= {x/-4< x ≤ 4, x∈R} [-4, 4]
المدى= {y/-1≤y≤6, y∈R} [-1, 6]

2



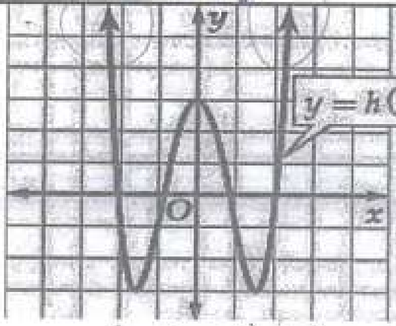
المجال= [-2, 6)
المدى= [0, 4]

3



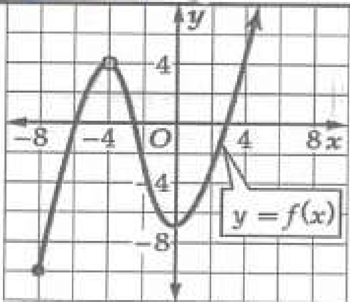
المجال= {x| x ≥ -5, x∈R} [-5, ∞)
المدى= [-2, 5, ∞)

4



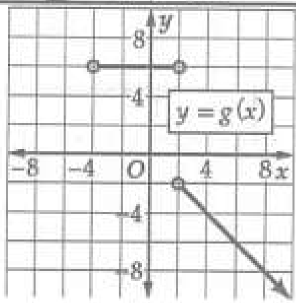
المجال= (-∞, ∞) أو R
المدى= [-3, ∞)

5



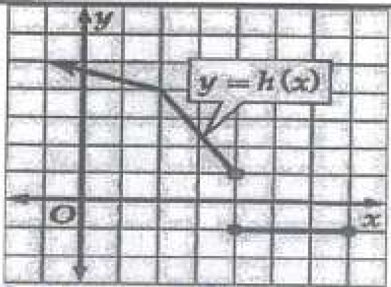
المجال= [-8,-4)∪(-4, ∞) [-8, ∞)\{4}
المدى= [-10, ∞)

6



المجال= (-4, ∞)/{2} (-4, 2)∪(2, ∞)
المدى= (-∞, -2)∪{6}

7



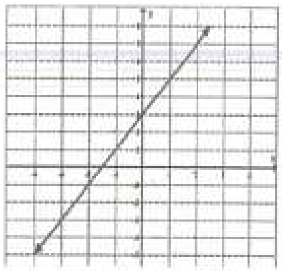
المجال= [8, -∞)
المدى= {-1}∪(1, ∞)

8

انظر الكتاب صفحة ٦٤:
التمارين من (١) إلى (١٠)

تدريب: استعمل التمثيل البياني للدوال الآتية لإيجاد المجال والمدى:

1



$f(x) = 2x + 3$

مقطع y بيانيا: 3 جبرياً: $x = 0$

$2(0) + 3 = 3$

مقطع x بيانياً : -1.5

جبرياً:

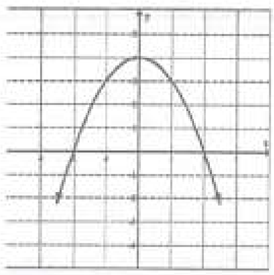
$y = f(x) = 0$

$0 = 2x + 3$

$\frac{-3}{2} = \frac{2x}{2}$

$\boxed{x = -1.5}$

2



$f(x) = 4 - x^2$

مقطع y بيانيا: 4 جبرياً: $x = 0$

$4 - (0)^2 = 4$

مقطع x بيانياً : $-2 , 2$

جبرياً:

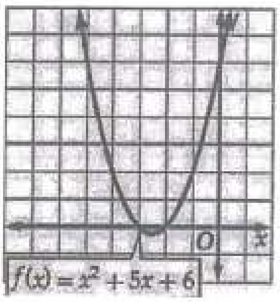
$f(x) = 4 - x^2$

$0 = 4 - x^2$

$\sqrt{x^2} = \sqrt{4}$

$x = \pm 2$

3



مقطع y بيانيا: 6 جبرياً: $(0)^2 + 5(0) + 6 = 6$

مقطع x بيانياً : $-3 , -2$

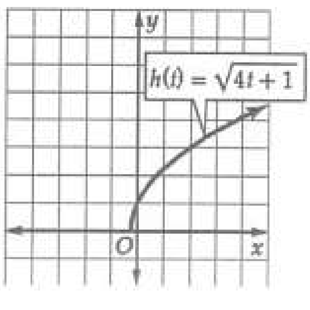
جبرياً:

$x^2 + 5x + 6 = 0$

$(x + 2)(x + 3)$

$x = -2 \mid x = -3$

4



مقطع y بيانيا: 1 جبرياً: $\sqrt{4(0)+1} = 1$

مقطع x بيانياً : $-\frac{1}{4}$

جبرياً:

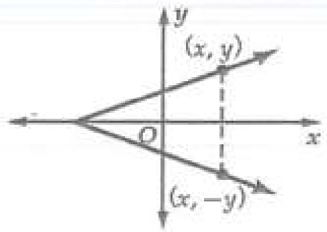
$0^2 = \sqrt{4t+1}$

$0^2 = 4t + 1$

$\frac{-1}{4} = \frac{4t}{4}$ $t = -\frac{1}{4}$

اختبارات التماثل:

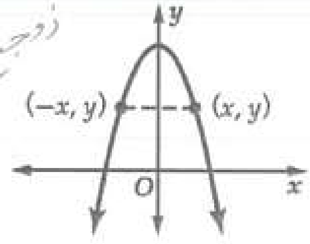
التماثل حول محور x



جبرياً : تعويض $-y$ مكان y يعطي معادلة مكافئة.

التماثل حول محور y

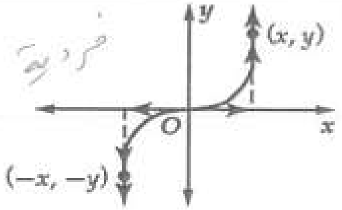
زوجية



جبرياً: تعويض $-x$ مكان x يعطي معادلة مكافئة

التماثل حول نقطة الأصل

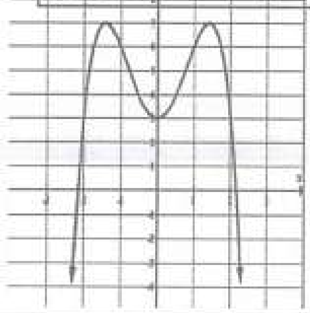
فردية



جبرياً: تعويض $-x$, $-y$ مكان x, y يعطي معادلة مكافئة

تدريب: استعمل التمثيل البياني لتحديد نوع التماثل، وما إذا كانت الدالة زوجية أم فردية أم غير ذلك:

$\boxed{f(x) = 2 + 4x^2 - x^4}$



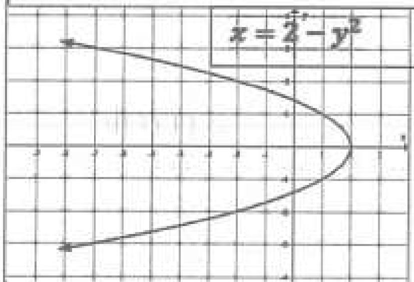
نوع التماثل:......حول محور y...... **نوع الدالة:**......زوجية......

التحقق جبرياً:

$f(-x) = 2 + 4(-x)^2 - (-x)^4$

$f(-x) = 2 + 4x^2 - x^4$

$\boxed{x = 2 - y^2}$

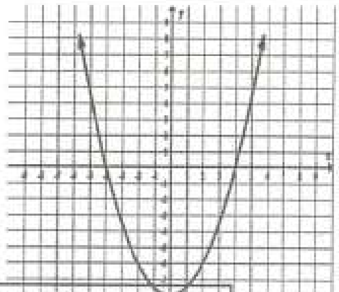


نوع التماثل:......حول x......

التحقق جبرياً:

$x = 2 - (-y)^2$

$x = 2 - y^2$



$\boxed{f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 8}$

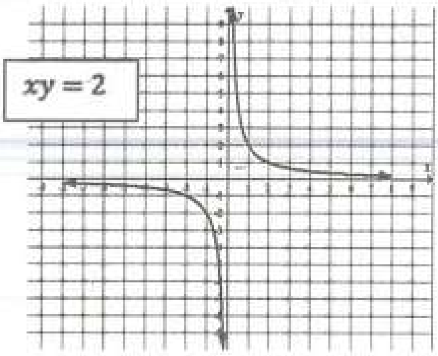
نوع التماثل:......حول محور y...... **نوع الدالة:**......زوجية......

التحقق جبرياً:

$f(-x) = \frac{1}{2}(-x)^2 - 8$

$= \frac{1}{2}x^2 - 8$

يتبع التدريب السابق:



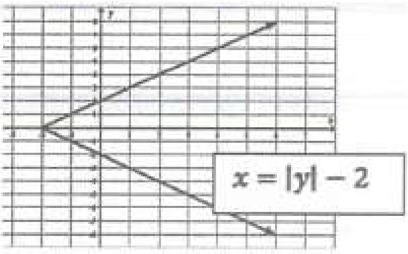
نوع التماثل: حول نقطة الاصل نوع الدالة: فردية

التحقق جبرياً:

$xy = 2$

بالضرب $(-x)(-y) = 2$

$-xy = 2$



نوع التماثل: حول x

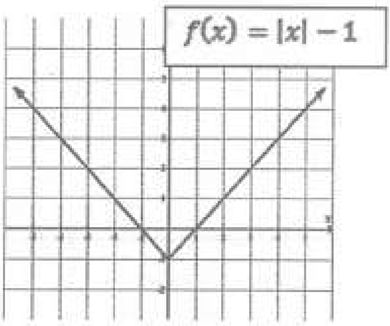
التحقق جبرياً:

$x = |y| - 2$

$x = |-y| - 2$

$x = |y| - 2$

لانه المطلق يحذف الاشارة السالبة

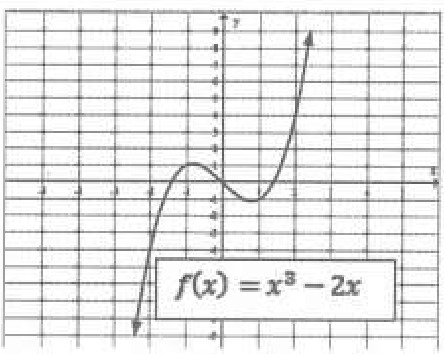


نوع التماثل: حول y نوع الدالة: زوجية

التحقق جبرياً:

$f(x) = |-x| - 1$

$f(x) = |x| - 1$



نوع التماثل: نقطة الاصل نوع الدالة: فردية

التحقق جبرياً:

y

$f(x) = (-x)^3 - 2(-x)$

$-y = -x^3 - 2(-x) = -x^3 + 2x$

$-y = -(x^3 - 2x)$

$+y = +(x^3 - 2x)$

اختبار

الاختبار الجبرى للدالة الزوجية والفردية:

١) إذا كانت الدالة زوجية (متماثلة حول محور y) فإن: $f(-x) = f(x)$

٢) إذا كانت الدالة فردية (متماثلة حول نقطة الأصل) فإن: $f(-x) = -f(x)$

تدريب: بين جبرياً نوع الدوال الآتية من حيث كونها زوجية أو فردية أو غير ذلك.

1) $f(x) = 3x^4 - 5x^2$

$f(-x) = 3(-x)^4 - 5(-x)^2$

$= 3x^4 - 5x^2$

$= f(x)$

زوجية

2) $f(x) = x^6 - 15x^2 + 2$

$f(-x) = (-x)^6 - 15(-x)^2 + 2$

$= x^6 - 15x^2 + 2$

$= f(x)$

زوجية

---

3) $f(x) = x^5 - 2x^3 + x$

$f(-x) = (-x)^5 - 2(-x)^3 + (-x)$

$= -x^5 + 2x^3 - x$

$= -(x^5 - 2x^3 + x)$

$= -f(x)$

فردية

4) $f(x) = \dfrac{\cos x + |x|}{\tan x}$

$f(-x) = \dfrac{\cos(-x) + |-x|}{\tan(-x)}$

$= \dfrac{\cos x + |x|}{-\tan x}$

$= -\left(\dfrac{\cos x + |x|}{\tan x}\right)$

$= -f(x)$

فردية

---

5) $f(x) = \dfrac{3x^6 + 2x^3}{2x}$

$f(-x) = \dfrac{3(-x)^6 + 2(-x)^3}{2(-x)}$

$= \dfrac{3x^6 - 2x^3}{-2x}$

ليست زوجية

$= -\left(\dfrac{3x^6 - 2x^3}{2x}\right)$

ليست فردية

6) $f(x) = 4x^6 - |x|$

$f(-x) = 4(-x)^6 - |-x|$

$= 4x^6 - |x|$

$= f(x)$

زوجية

لا زوجية ولا فردية

لا ختبار

7) $f(x) = |x| + sinx$

$f(-x) = |-x| + \sin(-x)$

$= |x| + -\sin x$

$= |x| - \sin x$ ليست زوجية

$= -(-|x| + \sin x)$

ليست فردية

لا فردية ولا زوجية

8) $f(x) = cosx - \frac{tanx}{x}$

$f(-x) = \cos(-x) - \frac{\tan(-x)}{(-x)}$

$= \cos x - \frac{\tan x}{x}$

$= \cos x - \frac{\tan x}{x}$

$= f(x)$

زوجية

تبرير: إذا كانت $a(x)$ دالة فردية، فحدّد إذا كانت $b(x)$ فردية، أو زوجية، أو ليست أيًّا منهما، أو لا يمكن تحديدها. برِّر إجابتك.

59) $b(x) = a(-x)$

60) $b(x) = -a(x)$

61) $b(x) = [a(x)]^2$

62) $b(x) = a(|x|)$

63) $b(x) = [a(x)]^3$

$b(-x) = a(-(-x))$

$= ax$

$= -(a(-x))$

$= -f(x)$ فردية

$b(-x) = -a(-x)$

$= ax$

$= -(-a(x))$

$= -f(-x)$ فردية

$b(-x) = a(|-x|)$

$= a(|-x|)$

$= a|x|$ زوجية

زوجية

فردية فردية فردية

$a(x) \times a(x) \times a(x)$

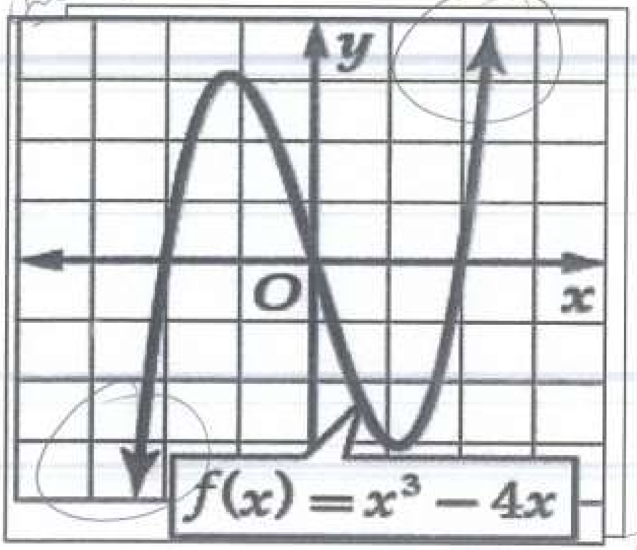
= فردية

اختبار

سهمين في جهتين مختلفتين

التحليل البياني للدوال :

١ مستخدما التمثيل البياني التالي للدالة f(x) اوجد ما يأتي :



(١) المجال = R سهمين

لأخذ كل الأرقام

(٢) المدى = R

(٣) مقطع y : 0 صفر

(٤) أصفار الدالة: -2 , 0 , 2 تقطع خط x

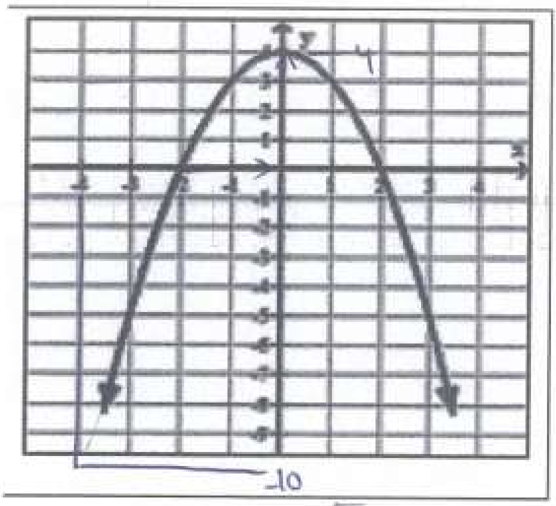
(٥) نوع التماثل: حول نقطة الأصل

(٦) نوع الدالة : (زوجية – فردية – غير ذلك) لأنها متماثلة حول نقطة الأصل

(٧) قدر مما يأتي: $f(-2) = (-2)^3 - 4(-2) = 0$ $f(4) = (4)^3 - 4(4) = 48$

Bo.omar90

-٢- مستخدما التمثيل البياني التالي للدالة f(x) اوجد ما يأتي :



(١) المجال = R

(٢) المدى = $\{y / y \le 4, y \in R\}$ $[4, -\infty)$

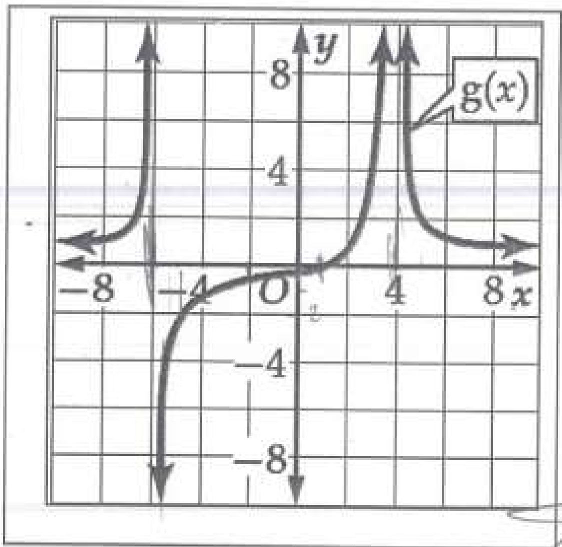
(٤) أصفار الدالة: -2 , 2

(٥) نوع التماثل: حول y

(٦) نوع الدالة : (زوجية – فردية – غير ذلك)

(٧) قدر مما يأتي : $f(-4) = -10$ $f(-2) = 0$ $f(0) = 4$

٣- مستخدما التمثيل البياني التالي للدالة f(x) اوجد ما يأتي :



(١) المجال = (R) \ {-6 , 4}

(٢) المدى = R

(٣) مقطع y : $-\frac{1}{2}$

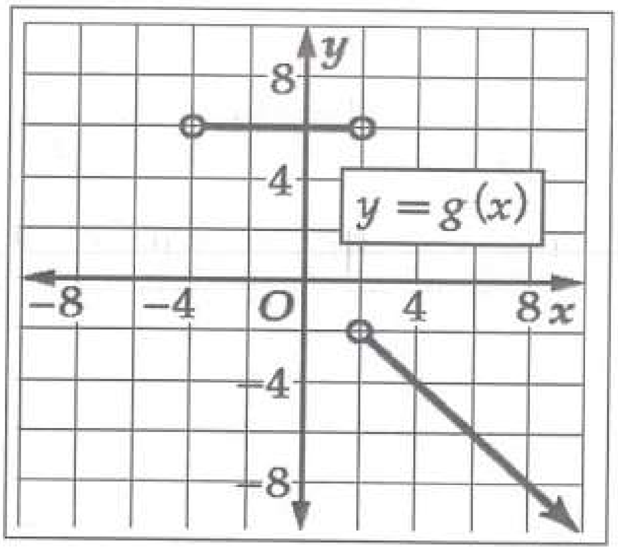
(٤) أصفار الدالة: 1

(٥) نوع التماثل: لا يوجد تماثل

(٦) نوع الدالة : (زوجية – فردية – غير ذلك)

(٧)) قدر مما ياتي : f(-2) = $-\frac{1}{2}$ f(-4) = -1 f(4) = ∅ غير معرفة

٤# مستخدما التمثيل البياني التالي للدالة f(x) اوجد ما يأتي



(١) المجال = {x / x > -4 x ∈ R}

(٢) المدى = {6} ∪ (2 , -∞)
{y / y = 6 , y < 2 , y ∈ R}

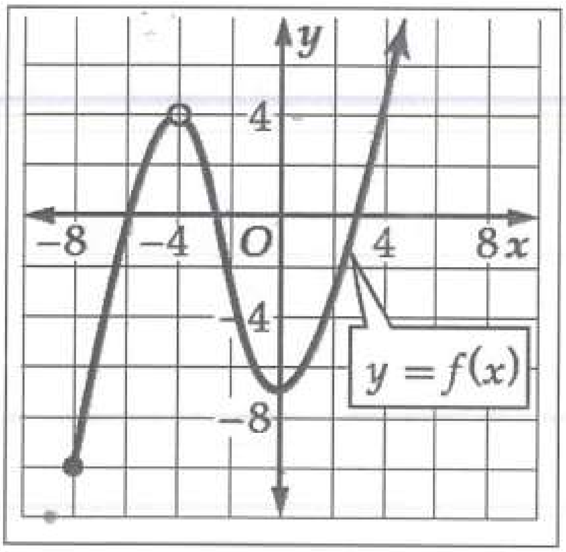
(٤) أصفار الدالة: لا يوجد

(٥) نوع التماثل: لا يوجد

(٦) نوع الدالة : (زوجية – فردية – غير ذلك)

(٧) (قدر مما ياتي : f(-4) = غير معرف f(-2) = 6 f(2) = غير معرف

-٥- مستخدما التمثيل البياني التالي للدالة f(x) اوجد ما يأتي :



(١) المجال = {x/x ≥ -8, x∈R}/{-4}

(٢) المدى = {y/y ≥ -10, y∈R}

(٣) مقطع y : -7

(٤) أصفار الدالة: 2.5 , -6 , -2.5

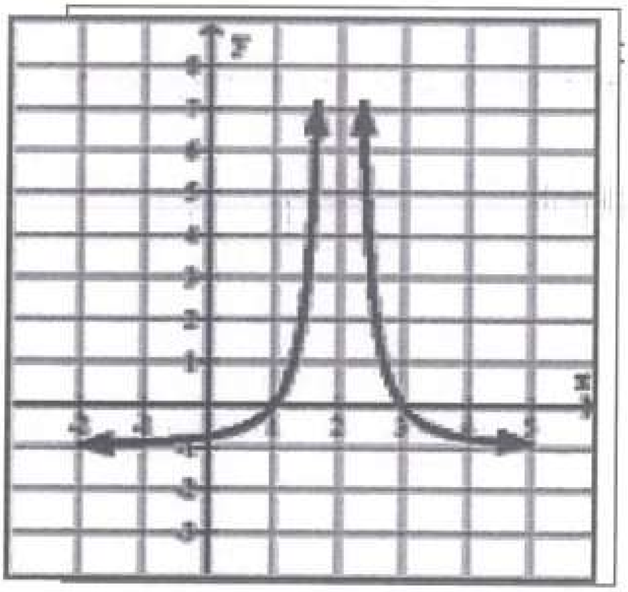
(٥) نوع التماثل: لا يوجد

(٦) نوع الدالة : (زوجية – فردية – غير ذلك)

(٧)) قدر مما ياتي : f(-4) = غير معرف f(4) = 4

f(-9) = -12 f(0) = -7

-#٦#مستخدما التمثيل البياني التالي للدالة f(x) اوجد ما يأتي :



(١) المجال = R / {2}

(٢) المدى = {y/y > -1, y∈R}

(٤) أصفار الدالة: 1 , 3

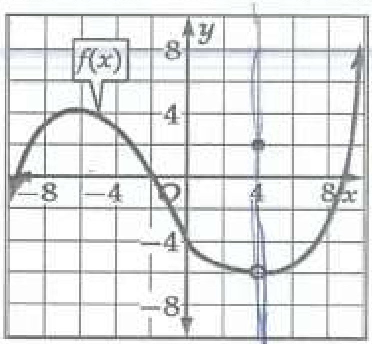
(٥) نوع التماثل: لا يوجد

(٦) نوع الدالة : (زوجية – فردية – غير ذلك)

(٧) (قدر مما ياتي : f(0) =-0.75 f(2) = غير معرف

تدريب: استعمل التمثيل البياني لتقدير النهايات التالية إن كان لها وجود:

عند النقطة الملونة يكون جوابها 2

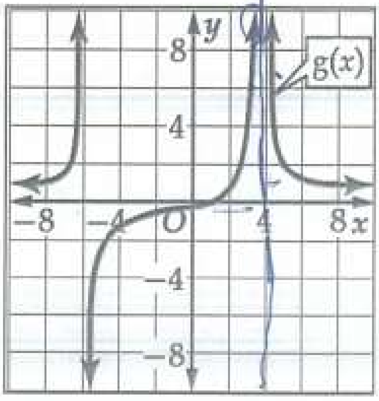


$f(4) = 2$

$\lim_{x \to 4^-} f(x) = -6$

$\lim_{x \to 4^+} f(x) = -6$

$\lim_{x \to 4} f(x) = -6$



$f(4) =$ غير معرف

يسار الاربعة

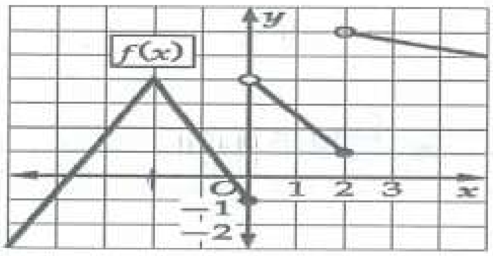
$\lim_{x \to 4^-} f(x) = \infty$ $\lim_{x \to 4^+} f(x) = \infty$

$\lim_{x \to 4} f(x) = \infty$

$\lim_{x \to -6^-} f(x) = \infty$ $\lim_{x \to -6^+} f(x) = -\infty$

$\lim_{x \to -6} f(x) =$ ليس لها وجود

للدالة الممثلة بيانيًا أدناه، قدّر كل نهاية مما يأتي إذا كان لها وجود:



38) $\lim_{x \to 0^-} f(x) = -1$

39) $\lim_{x \to 0^+} f(x) = 4$

40) $\lim_{x \to 0} f(x) =$ لا وجود لها

41) $\lim_{x \to 2^-} f(x) = \infty$

42) $\lim_{x \to 2^+} f(x) = 4$

43) $\lim_{x \to 2} f(x)$ لا وجود لها

ايجاد غاية دالة عند نقطة (جبريا)

$f(x) = \begin{cases} 4x + 1 & ,x>3 \\ x^2 - 3 & x\leq 3 \end{cases}$ ، عند $x = 3$

0.001
0.01
0.1

نزيدهم على العدد ونطرحهم

الحل:

2.9	2.99	2.999	3	3.001	3.01	3.1
5.41	5.94	5.99	6	13.004	13.04	13.4

6 13

$\lim_{x \to 3^-} f(x) = 6$

$\lim_{x \to 3^+} f(x) = 13$

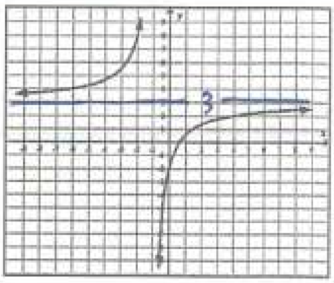
النهاية ليست موجودة

٢ـ سلوك طرفي التمثيل البياني (جبريا وبيانيا)

استعمل التمثيل البياني للدالة التالية لوصف سلوك طرفي التمثيل البياني **ثم عزز إجابتك جبريا**

$$f(x) = \frac{3x - 2}{x + 1}$$

$\frac{3x}{x} = 3$ فقط تحدد الأفقي



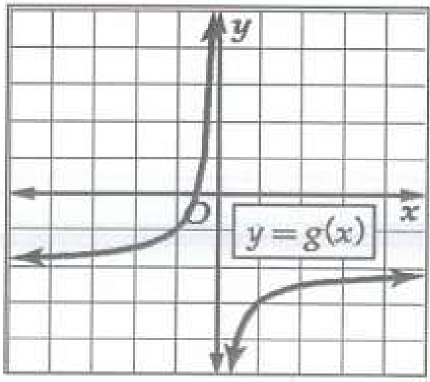
① عندما $x \to \infty ,\ f(x) \to 3$

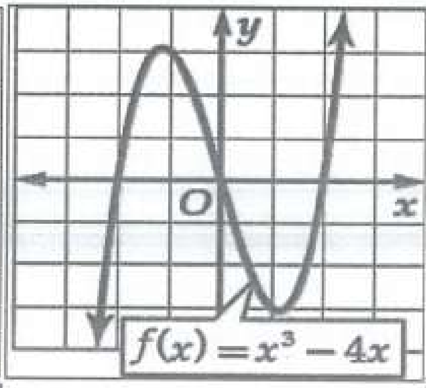
$x \to -\infty ,\ f(x) \to 3$

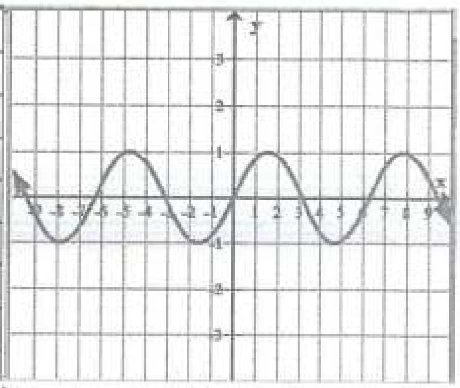
② $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) \to 3$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) \to 3$

Bo.omar90







عندما $x \to \infty ,\ f(x) \to -2$

$x \to -\infty ,\ f(x) \to -2$

$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) \to \infty$

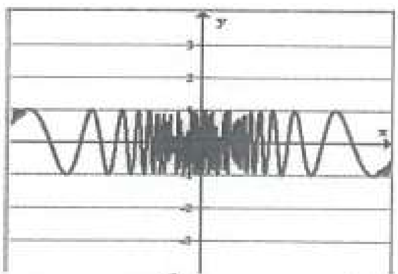
$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) \to -\infty$

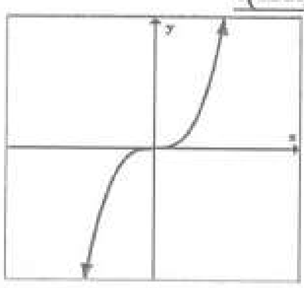
$x \to \infty ,\ f(x) \to \not\emptyset$

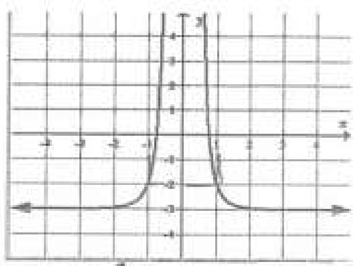
$x \to -\infty ,\ f(x) \to \not\emptyset$

غير ممكن لأنها متذبذبة
سلوك غير ثابتة

تدريب: قدر كل نهاية مما يأتي (إن وجدت):







1) $\lim\limits_{x\to 0} \sin\frac{1}{x} =$ ليست موجودة

2) $\lim\limits_{x\to 0} x^2 \sin x = 0$

3) $\lim\limits_{x\to \infty} \left(\frac{1}{x^4} - 3\right) = -3$

1) $\lim\limits_{x\to \infty} \sin\frac{1}{x} =$ 〃 〃

2) $\lim\limits_{x\to \infty} x^2 \sin x = \infty$

3) $\lim\limits_{x\to -\infty} \left(\frac{1}{x^4} - 3\right) = -3$

1) $\lim\limits_{x\to -\infty} \sin\frac{1}{x} =$ 〃 〃

2) $\lim\limits_{x\to -\infty} x^2 \sin x = -\infty$

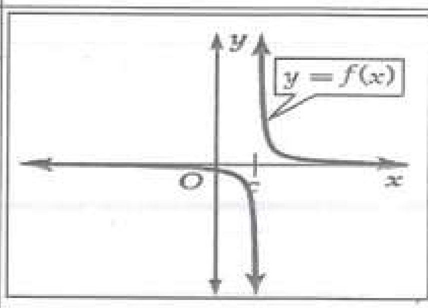
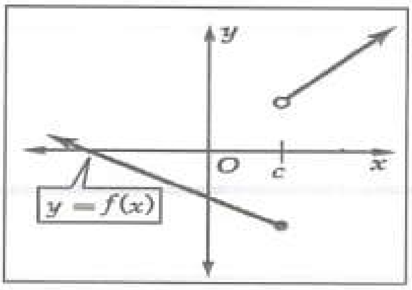
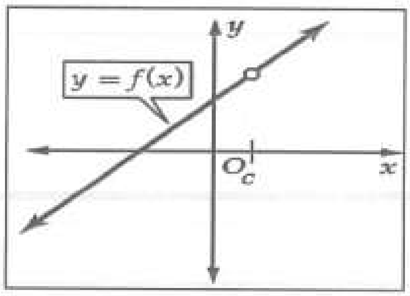
3) $\lim\limits_{x\to 1} \left(\frac{1}{x^4} - 3\right) = -2$

إذا كان كل الاجوبة متشابهة تكون متصلة

١- أن تكون الدالة معرفة عند النقطة
٢- أن تكون النهاية موجودة $\lim_{x\to a} f(x)$
٣- أن تكون النهاية = قيمة الدالة

٣ـ اتصال الدوال وأنواع الانفصال:

س: متى تكون الدالة متصلة عند نقطة؟

١) الانفصال اللانهائي	٢) الانفصال القفزي	٣) الانفصال النقطي (قابل للإزالة)
		
إذا كان الاجوبة ~~في الجدول~~ في الجدول كبيرة جداً $10 \quad 100 \quad 1000$ ، $-10 \quad -100 \quad -1000$ النهاية اليمنى ≠ النهاية اليسرى $\pm\infty$	إذا اختلف اليمين عن اليسار يكون انفصال قفزي كما هو في سؤال ① $\lim_{x\to a^-} \neq \lim_{x\to a^+}$	إذا كان اليمين تساوي اليسار ولكن يختلف مع الجواب الاساسي النهاية اليمنى = النهاية اليسرى ولا تساوي القيمة

١- ابحث اتصال الدوال التالية عند قيم x المعطاة، وبرر إجابتك باستعمال اختبار الاتصال. وإذا كانت الدالة غير متصلة، فبين نوع الانفصال هل هو لا نهائي، قفزي، أم قابل للإزالة.

$f(x)=\begin{cases}2x-1 & ,x>4\\ x^2-5 & x\le 4\end{cases}$ ، عند $x=4$.

ـ الحل ـ

$f(4)=4^2-5=11$

هذه نعوضها في الثاني لانها $x\le4$ — هذه نعوضها في الأول لانها $x>4$

3.9	3.99	3.999	4	4.001	4.01	4.1
10.21	10.92	10.992	11	7.002	7.02	7.2

11 — 7

$\lim_{x\to 4^-} f(x)=11$

$\lim_{x\to 4^+} f(x)=7$

$\lim_{x\to 4^-} f(x)=11 \neq \lim_{x\to 4^+} f(x)=7$

النهاية ليس لها وجود

الدالة منفصلة (قفزي)

٢- ابحث اتصال الدوال التالية عند قيم x المعطاة، وبرر إجابتك باستعمال اختبار الاتصال. وإذا كانت الدالة غير متصلة، فبين نوع الانفصال هل هو (لا نهائي، قفزي، أم قابل للإزالة.)

١) $f(x) = \frac{1}{(x+4)^2}$ ، عند $x = -4$.

$f(x) = \frac{1}{0 = (x+4)^2}$ = غير معرف

x	-4.1	-4.01	-4.001	-4	-3.999	-3.99	-3.9
y	100	10000	10^5	$\emptyset$	10^5	10000	100

منفصلة الدالة لا نهائية

٣- ابحث اتصال الدوال التالية عند قيم x المعطاة، وبرر إجابتك باستعمال اختبار الاتصال. وإذا كانت الدالة غير متصلة، فبين نوع الانفصال هل هو لا نهائي، قفزي، أم قابل للإزالة.

١) $f(x) = \frac{x^2+3x-10}{x+5}$ عند $x = -5$.

$f(-5) = \frac{(-5)^2+3(-5)-10}{-5+5} = \emptyset$

-5.1	-5.01	-5.001	-5	-4.999	-4.99	-4.9
-7.1	-7.01	-7.001	$\emptyset$	-6.999	-6.99	-6.9

-7   -7

$x + 5 = 0$

$x = -5$

$R / \{-5\}$

الدالة غير معرفة لأنها عند النقطة غير معرفة

∴ منفصلة

$\lim_{x \to -7^-} = \lim_{x \to -7^+} \neq f(x)$

منفصلة الدالة نقطية

انفصال لانقطي

٤- ابحث اتصال الدوال التالية عند قيم x المعطاة، وبرر إجابتك باستعمال اختبار الاتصال. وإذا كانت الدالة غير متصلة، فبين نوع الانفصال هل هو لا نهائي، قفزي، أم قابل للإزالة.

$f(x) = \begin{cases} 2x+14 & ,x>-3 \\ x^2-1 & x\le -3 \end{cases}$ ، عند $x = -3$.

$f(x) = x^2 - 1 = (-3)^2 - 1 = 8$

8 =

-3.1	-3.01	-3.001	-3	-2.999	-2.99	-2.9
8.6	8.06	8.006	8	8.002	8.02	8.2

= 8

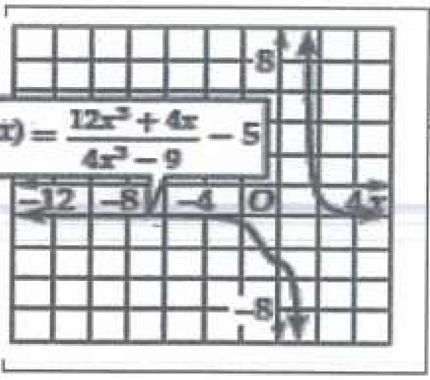
$x^2 - 1$ $2x + 14$

$\lim_{x \to -3^-} f(x) = 8$

$\lim_{x \to 3^+} f(x) = 8$

$\lim_{x \to -3^-} = \lim_{x \to 3^+} = f(x)$

الدالة متصلة



٣ ـ خطوات إيجاد خطوط التقارب الأفقية والرأسية :

١ـ التأكد من وجود (**انفصال نقطي**) من عدمه (تحليل واختصار العامل المش

٢ـ خط تقارب راسي (**انفصال لا نهائي**) (المقام = صفر)

٣ـ خط تقارب افقي (**سلوك طرفي الدالة**) على حسب درجة البسط والمقام

- درجة البسط = درجة المقام   نقسمهم
- درجة البسط اصغر من درجة المقام $y=0$
- درجة البسط اكبر من درجة المقام   لا يوجد

أوجد المجال، وخطوط التقارب الأفقية والرأسية (إن وجدت) لكل دالة مما يأتي:

$$f(x) = \frac{x^2-x-6}{x+4}$$

$x+4=0$ $x=-4$

المجال $R \setminus \{-4\}$

خط التقارب الرأسي x

$x=-4$

خط التقارب الافقي y

لا يوجد

$$f(x) = \frac{3x+2}{1x+1}$$

أولا نحل لكي نختصر

خط التقارب الرأسي

$x=-1$ المجال $R \setminus \{-1\}$

خط التقارب الافقي

$y = \frac{3}{1} = 3$

$$f(x) = \frac{x^2-x-6}{x^2-9}$$

$$\frac{(\cancel{x-3})(x+2)}{(\cancel{x-3})(x+3)}$$

$$\frac{x+2}{x+3}$$

المجال $R \setminus \{3,-3\}$ $x+3=0$, $x=-3$ | $x-3=0$, $x=+3$

خط التقارب الافقي y

$y = \frac{1}{1} = 1$

خط التقارب الرأسي

$x=-3$

$$f(x) = \frac{5x+5}{x^2-3x-4}$$

$$\frac{5(x+1)}{(x-4)(x+1)}$$

المجال $R \setminus \{4,-1\}$

$$\frac{5}{x-4}$$

الرأسي $x=4$

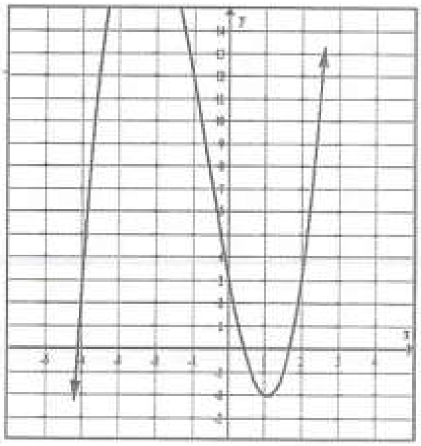
الافقي $y=0$

2-4 القيم القصوى ومتوسط مُعدّل التغيُّر
Extrema and Average Rates of Change

حدد الأعداد الصحيحة المتتالية التي تنحصر بينها أصفار الدالة الحقيقية في الفترة [a,b] :

1) $f(x) = x^3 + 2x^2 - 8x + 3 \quad ; \quad [-6,4]$

-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
-93	-32	3	18	19	12	3	-2	3	24	67



$-5 < x < -4$ يوجد صفر حقيقي

$0 < x < 1$ 〃 〃

$1 < x < 2$ 〃 〃

$f(x) = x^3 + 5x^2 - 4 \quad , \quad [-6\ ,2]$

-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2
-40	-4	12	14	8	0	-4	2	24

$-5 < x < -4$ يوجد صفر حقيقي

$x = -1$ 〃 〃

$0 < x < 1$ 〃 〃

حدّد الأعداد الصحيحة المتتالية التي تنحصر بينها الأصفار الحقيقية لـ $f(x) = x^2 + x + 0.16$ في الفترة $[-3, 3]$.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$	6.16	2.16	0.16	0.16	2.16	6.16	12.16

اذا كان الناتج نفس الجواب ومتتالين
نكتب

يوجد صفر حقيقي

$-1 < x < 0$

٦- متوسط معدل التغير

هو ميل المستقيم الواصل بين نقطتين $m_{\text{sec}} = \dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$

١- أوجد متوسط معدل التغير للدالة مما يأتي في الفترة المعطاة:

$f(x) = 3x^2 + 2x$ $\qquad [\overset{x_1}{3}, \overset{x_2}{7}]$

x_1 الأصغر
x_2 الأكبر

$F(x_2) = f(7) = 3(7)^2 + 2(7) = 161$

$f(x_1) = f(3) = 3(3)^2 + 2(3) = 33$

$m = \dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \dfrac{161 - 33}{7 - 3} = 32$

٢- قذف جسم الى اعلى معطيا الارتفاع بالعلاقة : $d(t) = 16t^2 + 20t + 4$ حيث t الزمن بالثواني و d المسافة التي يقطعها الجسم . اوجد متوسط سرعة الجسم في الفترة من 0.5 sec الى 2sec .

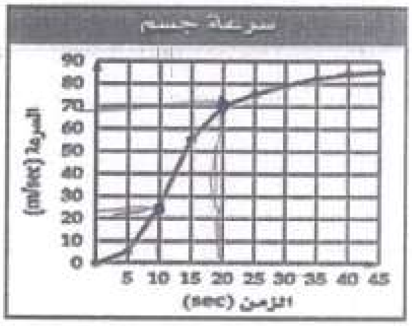
$[\overset{t_1}{0.5}, \overset{t_2}{2}]$

$d(t_2) = 16(2)^2 + 20(2) + 4 = 108$

$d(t_1) = 16(0.5)^2 + 20(0.5) + 4 = 18$

$m = \dfrac{108 - 18}{2 - 0.5} = 60$

٣- أوجد متوسط معدل التغير مستخدما الشكل المقابل في الفترة في[10, 20]



$f(20) = 70$

$f(10) = 25$

$m = \dfrac{70 - 25}{20 - 10} = 4.5$

٤ماذا كان متوسط معدل التغير للدالة: $f(x) = 3x^2 - kx$ في الفترة $[1, 3]$هو 12 أوجد قيمة الثابت k

$m = \dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$

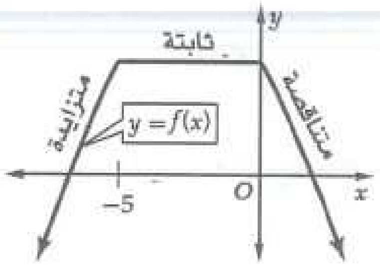
$f(x) = 3x^2 - kx$

$F(3) = 3(3)^2 - k(3) = 27 - 3k$

$f(1) = 3(1)^2 - k(1) = 3 - k$

$\dfrac{12}{1} = \dfrac{27 - 3k - (3 - k)}{3 - 1}$

٧ـ اطراد الدوال

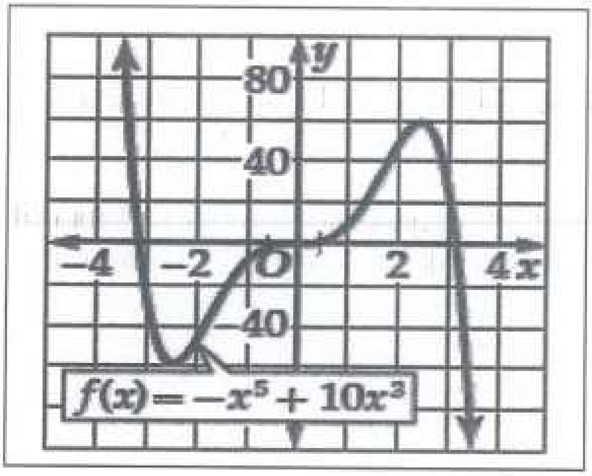


ففي الشكل المجاور إذا تتبعت منحنى $f(x)$، من اليسار إلى اليمين فإنك تلاحظ أن:

من خط x

- $f(x)$ متزايدة في الفترة $(-\infty, -5)$
- ثابتة في الفترة $(-5, 0)$
- متناقصة في الفترة $(0, \infty)$

٨ـ القيم القصوى



مستخدما التمثيل البياني اوجد ما يأتي :

(١) المجال = R

(٢) المدى = R

(٣) فترات التزايد والتناقص لاقرب 0.5

$(-\infty, -2.5) \cup (2.5, \infty)$ متناقصة

$(-2.5, 2.5)$ متزايدة

(٤) القيم القصوى ونوعها :

$x = 2.5$ $(2.5, 60)$. قيمة عظمى محلية

$x = -2.5$ $(-2.5, -60)$ قيمة صغرى محلية

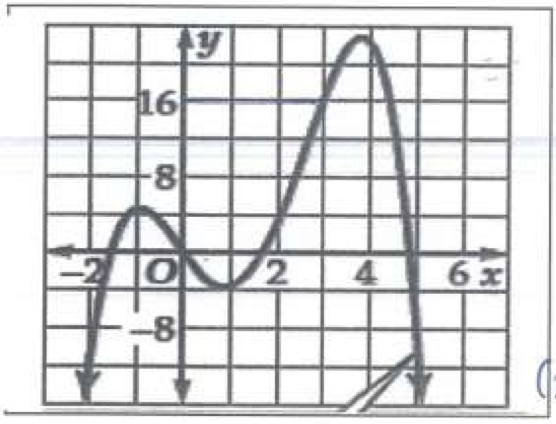
ولا توجد قيم قصوى مطلقة

(٥) دراسة سلوك طرفي الدالة

$x \to \infty$, $f(x) \to -\infty$

$x \to -\infty$, $f(x) \to \infty$

-#1-# مستخدما التمثيل البياني التالي للدالة $f(x)$ اوجد ما يأتي :



(١) القيم القصوى ونوعها :

لا يوجد قيمة صغرى مطلقة ، قيمة عظمى مطلقة $x = 3.5$

قيمة عظمى محلية $x = -1$

قيمة صغرى محلية $x = 1$

(٢) فترات التزايد والتناقص:

تزايد $(-\infty, -1)$

تناقص $(-1, 1)$

تزايد $(1, 3.5)$ تناقص $(3.5, \infty)$

(٣) دراسة سلوك طرفي الدالة

$x \to \infty , f(x) \to -\infty$

$x \to -\infty , f(x) \to -\infty$

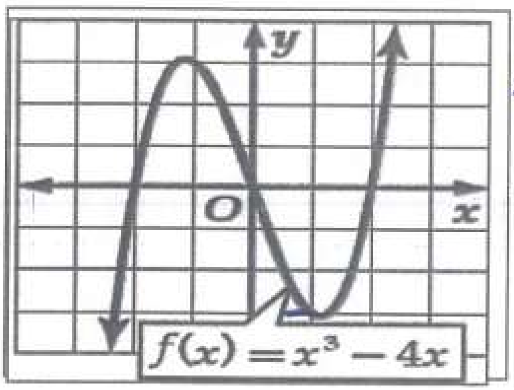
(٤) المدى $(-\infty, 23]$ (٥) المجال R

$\{y / y \leq 23 , y \in R\}$

(٥) متوسط معدل التغير للدالة في الفترة [3 , 2]

$$M = \frac{16 - 4}{3 - 2} = 12$$

#2#*مستخدما التمثيل البياني التالي للدالة $f(x)$ اوجد ما يأتي :



(١) القيم القصوى ونوعها :

عظمى محلية $x = -1.5$

صغرى محلية $x = 1.5$

لا توجد قيمة قصوى مطلقة

(٢) فترات التزايد والتناقص:

تزايد $(-\infty, -1.5)$

تناقص $(-1.5, 1.5)$

تزايد $(1.5, \infty)$

(٣) دراسة سلوك طرفي الدالة

$x \to \infty , f(x) \to \infty$

$x \to -\infty , f(x) \to -\infty$

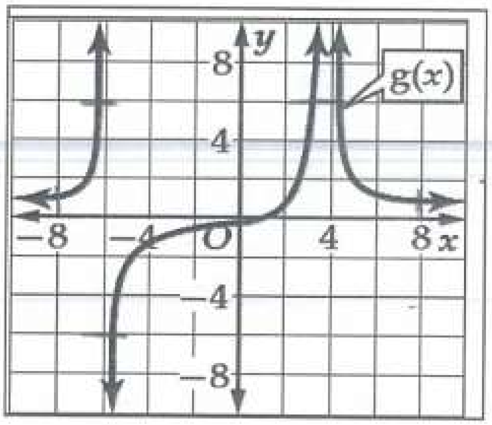
(٤)خطوط التقارب ونوعها (ان وجدت)

لا يوجد

(٥) متوسط معدل التغير للدالة في الفترة [1 , 2-]

$$M = \frac{-3 - 0}{1 - -2} = \frac{-3}{3} = -1$$

-٣- مستخدما التمثيل البياني التالي للدالة f(x) اوجد ما يأتي :



(١) القيم القصوى ونوعها :

لا يوجد قيم قصوى

(٢) فترات التزايد والتناقص:

تزايد من $(1, \infty)$

تزايد من (∞, ∞)

تناقص من $(\infty, 1)$

(٣) دراسة سلوك طرفي الدالة

$x \to \infty , f(x) \to \infty$

$x \to -\infty , f(x) \to -\infty$

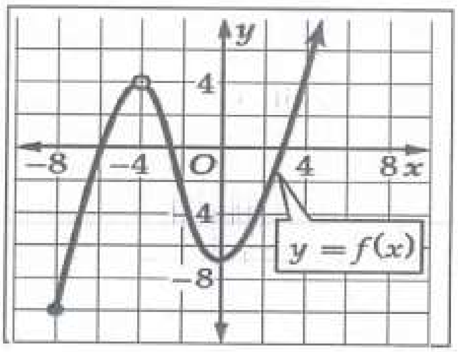
(٤)خطوط التقارب ونوعها (ان وجدت)

لا يوجد

(٥) الاتصال (او حدد نوع الانفصال)

انفصال لا نهائي

#٤ مستخدما التمثيل البياني التالي للدالة f(x) اوجد ما يأتي :



(١) المجال = $\{x / x \geq -8 , x \in R\} \setminus \{-4\}$

(٢) المدى = $\{y / y \ngeq -10 , y \in R\}$

(٣) أصفار الدالة: $\{-6 , -3 , 3\}$

(٤) فترات التزايد والتناقص:

تزايد $(-8 , -4.1)$

تناقص $(-3.9 , 0)$

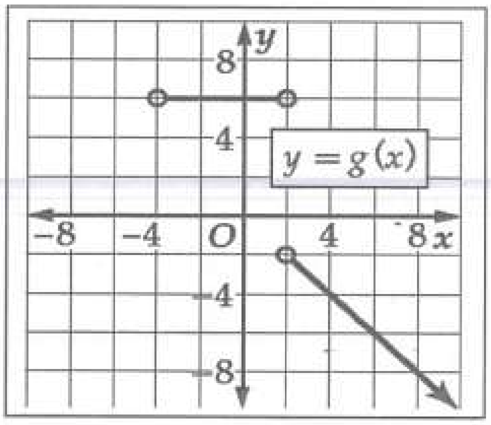
تزايد $(0 , \infty)$

(٥) دراسة سلوك طرفي الدالة

(٦) قيمة مما ياتي : f(-8) = -10 f(-4) = لا يوجد

(٧) الاتصال (او حدد نوع الانفصال)

انفصال لا نهائي



-#5- مستخدما التمثيل البياني التالي للدالة g(x) اوجد ما يأتي :

(١) المجال = $\{x / x \geq -4 , x \in R\} \setminus \{2\}$

(٢) المدى = $\{y / y < -2 , y = 6 , y \in R\}$

(٣) فترات التزايد والتناقص::

ثابتة من $(-4 , 2)$

متناقصة من $(2 , +\infty)$

(٨) دراسة سلوك طرفي الدالة

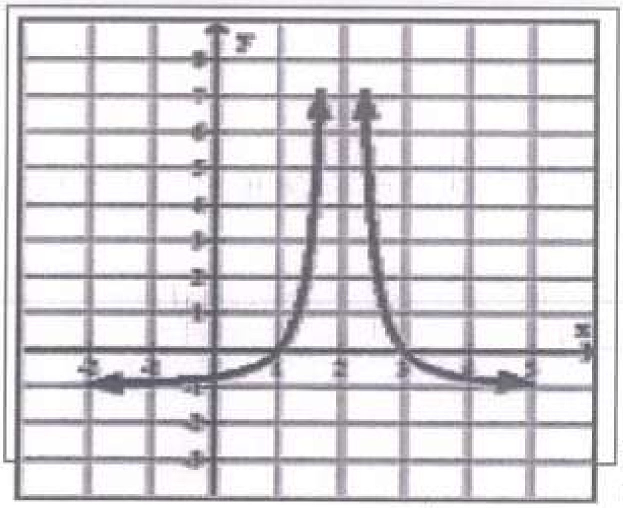
$x \to \infty , f(x) \to -\infty$

$x \to -\infty , f(x) \to$ لا يوجد

(١٠) قيمة مما ياتي : g(-2) = 6 g(2) = لا يوجد

(١٢) الاتصال (او حدد نوع الانفصال)

الانفصال القفزي



#6 مستخدما التمثيل البياني التالي للدالة f(x) اوجد ما يأتي

(١) المجال = $R \setminus \{2\}$

(٢) المدى = $\{y / y > -1 , y \in R\}$

(٣) مقطع **y** : = -0.75

(٤) القيم القصوى ونوعها : -1 صغرى مطلقة

لا يوجد قيمة قصوى محلية و صغرى مطلقة

(٥) فترات التزايد والتناقص:

تزايد $(-1 , 1.9)$

تناقص $(2.1 , 4)$

(٦) دراسة سلوك طرفي الدالة

$x \to \infty , f(x) \to \infty$

$x \to -\infty , f(x) \to$ لا يوجد

(٧) الاتصال (او حدد نوع الانفصال)

انفصال لا نهائي

(٨) خطوط التقارب الافقية والراسية

خطوط التقارب الرأسية $x = 2$

خطوط التقارب الافقية $y = -1$

3-2 حساب النهايات جبريًا
Evaluating Limits Algebraically

$\lim_{x \to 0^-} f(x)$ $= -1$

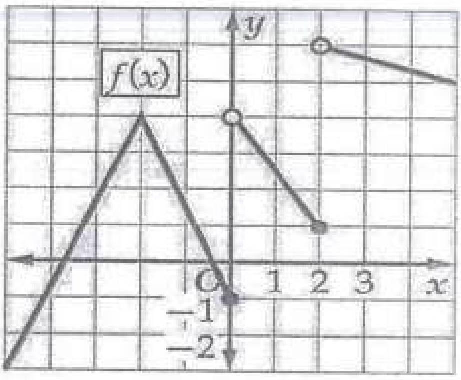
$\lim_{x \to 0^+} f(x)$ $= 4$

$\lim_{x \to 0} f(x)$ ليس لها وجود

$\lim_{x \to 2^-} f(x)$ $= 1$

$\lim_{x \to 2^+} f(x)$ $= 6$

$\lim_{x \to 1} f(x)$ $= 2.5$



احسب كل نهاية مما يأتي :

1) $\lim_{x \to 2}(3x^2 - 5x + 7) =$

$= 3(2)^2 - 5(2) + 7 = 9$

2) $\lim_{x \to 5}\sqrt{x^2 - 2} =$

$= \sqrt{(5)^2 - 2}$

$= \sqrt{23}$

---

3) $\lim_{x \to -5}\left(\frac{x^2 + 3x - 6}{x - 4}\right) =$

$\left(\frac{(-5)^2 + 3(-5) - 6}{(-5) - 4}\right)$

4) $\lim_{x \to -1}(4x^6 + 3x^5 - x) =$

$= 4(-1)^6 + 3(-1)^5 - (-1) =$

أوجد قيمة المجهول k فيما يلي:

2) $\lim_{x \to k}(x^2 + 3x) = 70$

$= k^2 + 3k = 70$

$= k^2 + 3k - 70 = 0$

$(k - 7)(k + 10) = 0$

$k = 7 \quad | \quad k = -10$

3) $\lim_{x \to 1}\frac{x^3 + k}{kx - 5} = \frac{1}{3}$

$= \frac{(1)^3 + k}{k \cdot - 5} = \frac{1}{3}$

$3 + 3k = k - 5$

$3k - k = -3 - 5$

$2k = -8$

$k = \frac{-8}{2} = -4$

احسب النهايات التالية:

لما يكون الجواب $\frac{0}{0}$ يجب أن تحلل

1) $\lim_{x\to 3} \dfrac{x^2-9}{x^2-3x} =$

$\dfrac{3^2-9}{3^2-3(3)} = \dfrac{0}{0}$

$= \dfrac{(x-3)(x+3)}{x(x-3)}$

$= \dfrac{x+3}{x} = \dfrac{3+3}{3} = 2$

2) $\lim_{x\to -2} \dfrac{x^2-5x-14}{5x+10}$ بالتعويض ب -2 $= \frac{0}{0}$

$= \dfrac{(x-7)(x+2)}{5(x+2)}$

$= \dfrac{x-7}{5}$

$= \dfrac{-2-7}{5} = -\dfrac{9}{5}$

3) $\lim_{x\to 2} \dfrac{x^3-8}{x^3-4x} = \dfrac{0}{0}$

$\dfrac{(x-2)(x^2+2x+4)}{x(x^2-4)}$

$\dfrac{(x-2)(x^2+2x+4)}{x(x-2)(x+2)}$

$= \dfrac{2^2+2(2)+4}{2(2+2)} = \dfrac{12}{8} = \dfrac{3}{2}$

4) $\lim_{x\to 25} \dfrac{x-25}{\sqrt{x}-5} = \dfrac{0}{0}$

$\dfrac{x-25}{\sqrt{x}-5} \cdot \dfrac{\sqrt{x}+5}{\sqrt{x}+5}$

$= \dfrac{(x-25)(\sqrt{x}+5)}{(x-25)} = \sqrt{x}+5 = \sqrt{25}+5 = 10$

5) $\lim_{x\to 3} \dfrac{\sqrt{x+6}-3}{9-x^2} = \dfrac{0}{0}$

$\dfrac{\sqrt{x+6}-3}{-(x^2-9)} \cdot \dfrac{\sqrt{x+6}+3}{\sqrt{x+6}+3}$

$\dfrac{x+6-9 = \cancel{x-3}}{-(\cancel{x-3})(x+3)(\sqrt{x+6}+3)} = \dfrac{x-3}{-(x-3)(x+3)(\sqrt{x+6}+3)}$

$= \dfrac{1}{-(x+3)(\sqrt{x+6}+3)} = \dfrac{1}{-(3+3)(\sqrt{x+6}+3)} = \dfrac{-1}{36}$

6) $\lim_{x\to -3} \dfrac{x^2-3|x|}{7x+21}$

$\dfrac{x^2-3(-x)}{7x+21}$

$= \dfrac{x^2+3x}{7x+21}$

$= \dfrac{x(x+3)}{7(x+3)} = \dfrac{x}{7} = \dfrac{-3}{7}$

7) $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{x+9}-3}{x} = \dfrac{0}{0}$

$\dfrac{\sqrt{x+9}-3}{x} \cdot \dfrac{\sqrt{x+9}+3}{\sqrt{x+9}+3}$

$\dfrac{x+9-9}{(x)(\sqrt{x+9}+3)} = \dfrac{\cancel{x}}{(\cancel{x})(\sqrt{x+9}+3)}$

$\dfrac{1}{(\sqrt{x+9}+3)} = \dfrac{1}{6}$

8) $\lim_{x\to 5} \left(\dfrac{x^2-4x}{x^2-25} - \dfrac{5}{x^2-25} \right) = \dfrac{0}{0}$

$\lim_{x\to 5} = \dfrac{x^2-4x-5}{x^2-25}$

$\dfrac{(x-5)(x+1)}{(x-5)(x+5)}$

$\dfrac{5+1}{5+5} = \dfrac{3}{5}$

نقسم على اكبر اسس في حالة وجود ∞

9) $\lim_{x\to4}\frac{(x^3-4x^2)+(2x-8)}{5x-20}$

$\lim_{x\to4}\frac{x^2(x-4)+2(x-4)}{5(x-4)}$

$\lim_{x\to4}\frac{\cancel{(x-4)}(x^2+2)}{5\cancel{(x-4)}}$

$\lim_{x\to4}=\frac{4^2+2}{5}=\frac{18}{5}$

10) $\lim_{x\to-\infty}\frac{3x^3-4}{8-x^2-12x^3}=$

$\lim_{x\to-\infty}\frac{\frac{3x^3}{x^3}-\frac{4}{x^3}}{\frac{8}{x^3}-\frac{x^2}{x^3}-\frac{12x^3}{x^3}}$

$\lim_{x\to\infty}\frac{3-\frac{4}{x^3}}{\frac{8}{x^3}-\frac{1}{x}-12}=\frac{3}{-12}=-\frac{1}{4}$

كـ تشابه

11) $\lim_{x\to-\infty}\frac{3x^2-4x^5}{8x-4x^2}=$

$\lim_{x\to\infty}\frac{\cancel{\frac{3}{x^3}}-4}{\cancel{\frac{8}{x^4}}-\cancel{\frac{4}{x^3}}}$

$-\infty$

$\frac{-4}{0}=-\infty$

مختصر

$\frac{-4x^5}{-4x^2}=x^3=(-\infty)^3=-\infty$

12) $\lim_{x\to\infty}\frac{4x-5}{8x^5+x^2}=$

$\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{4x}{x^5}-\frac{5}{x^5}}{8+\frac{x^2}{x^5}}$

$\lim_{x\to\infty}\frac{\cancel{\frac{4}{x^4}}-\cancel{\frac{5}{x^5}}}{8+\cancel{\frac{1}{x^3}}}$

$\frac{0}{8}=0$

$\lim_{x\to-2}\begin{cases}x-3, & x\le-2\\2x-1, & x>-2\end{cases}$

$\lim_{x\to-2^+}2x-1=2(-2)-1=-5$

$\lim_{x\to-2^-}x-3=-2-3=-5$

$\therefore\lim_{x\to-2}f(x)=-5$

اذا كانت غير متساوية الارقام

~~[illegible]~~

ليس لها وجود

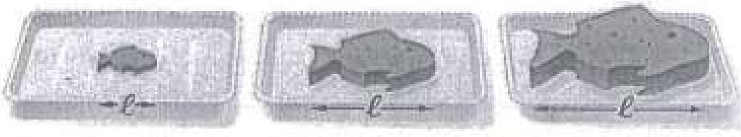
14) $\lim_{x\to0}\frac{\sin8x}{2x}=\frac{8}{2}=4$

-0.01	-0.001	0	0.001	0.01
0.069	0.069	∅	0.069	0.069

0.07   0.07

إسفنج: تحتوي مادة هلامية على حيوان الإسفنج، وعند وضع المادة الهلامية في الماء، فإن حيوان الإسفنج يبدأ بامتصاص الماء والتضخم. ويمكن تمثيل ذلك بـ $\ell(t) = \frac{105t^2}{10 + t^2} + 25$، حيث ℓ طول حيوان الإسفنج بالمليمترات بعد t ثانية من وضعه في الماء. (مثال 6)

$\ell(0) = \frac{105(0)^2}{10+(0)^2} + 25 = 25$



a) ما طول حيوان الإسفنج قبل وضعه في الماء؟ $t=0$

b) ما نهاية الدالة عندما $t \to \infty$؟

$\lim_{t \to \infty} \frac{105t^2}{10+t^2} + 25$

c) وضّح العلاقة بين نهاية الدالة ℓ وطول حيوان الإسفنج.

$\sim \frac{\frac{105t^2}{t^2}}{\frac{10}{t^2} + \frac{t^2}{t^2}} + 25 = \frac{105}{\frac{10}{t^2}+1} + 25 = 105 + 25 = 130$

تدريب على اختبار معياري

61) قيمة $\lim_{h \to 0} \frac{2h^3 - h^2 + 5h}{h}$؟

F 3   H 5

G 4   J ليس لها وجود.

$\frac{h(2h^2 - h + 5)}{h} = 5$

62) ما القيمة التي تقترب منها $g(x) = \frac{x + \pi}{\cos(x + \pi)}$ عندما تقترب x من 0؟

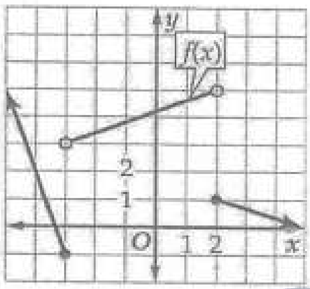
A $-\pi$ C $-\frac{1}{2}\pi$

B $-\frac{3}{4}$ D 0

$\frac{x+\pi}{\cos(x+\pi)}$

$\frac{0+\pi}{\cos(\pi)} = \frac{\pi}{-1} = -\pi$

63) باستعمال التمثيل البياني للدالة f أدناه، ما قيمة $\lim_{x \to 2^+} f(x)$؟



F 0   H 1   G 5   J ليس لها وجود

الاشتقاق

الاشتقاق باستخدام التعريف | الاشتقاق باستخدام القواعد | تطبيقات على الاشتقاق

تعريف المشتقة: وهي ميل المماس لمنحنى الدالة f عند أي نقطة عليه:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

تدريب: أوجد باستخدام التعريف مشتقة $f(x)$ ، ثم احسب قيمتها عند النقطة المعطاة

2) $f(x) = x^2 - 4x \quad ; \quad (2, -4)$

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$\lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^2 - 4(x+h) - (x^2 - 4x)}{h}$$

$$\lim_{h \to 0} \frac{\cancel{x^2} + 2xh + h^2 - \cancel{4x} - 4h - \cancel{x^2} + \cancel{4x}}{h}$$

إلى ماعنده h نحذفه

$$\lim_{h \to 0} \frac{\cancel{h}(2x + h - 4)}{\cancel{h}} = 2x + 0 - 4 = 2x - 4$$

2) $f(t) = \dfrac{1}{t+3} \quad ; t = 1$

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(t+h) - f(t)}{h}$$

$$\lim_{h \to 0} \frac{\frac{1}{t+h+3} - \frac{1}{t+3}}{h} = \frac{\frac{t+3-(t+h+3)}{(t+h+3)(t+3)}}{h}$$

$$= \frac{\frac{\cancel{t}+\cancel{3} - \cancel{t} - \cancel{h} - \cancel{3}}{(t+h+3)(t+3)}}{\cancel{h}} = \frac{-1}{(t+3)(t+3)} = \frac{-1}{(t+3)^2}$$

- أوجد باستخدام التعريف ميل المماس للمنحنى $f(x)=\sqrt{x+4}$ عند أي نقطة واقعة عليه .

أوجد باستخدام التعريف ميل المماس للدالة f(x) ، ثم احسب قيمتها عند النقطة المعطاة

2) $f(x)=4x^2-1$; at $x=2$

$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{4(x+h)^2 - 1}{h}$

$\lim_{h\to \boxed{0}} \frac{(4x+4h)^2 - 1}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{4x^2+8xh+4h^2-1}{h}$

$= 4x^2+8x-1$

$4(2)^2+8(2)+4(0)^2-1 = 31$

$\frac{4(x+h)^2-1-(4x^2-1)}{h}$

$\frac{4(x^2+2xh+h^2)\cancel{-1}-4x^2\cancel{+1}}{h} = \frac{\cancel{4x^2}+8xh+4h^2}{h}$

$8x=\boxed{16}$ $\quad \frac{8xh+4h^2}{h} = \frac{\cancel{h}(8x+4h)}{\cancel{h}}$

3-4 المشتقة
Derivative

أوجد المشتقة الأولى للدوال التالية:

1) $f(x) = 7 - x + 2x^3$;

$0 - 1 + 2 \times 3 x^{3-1}$

$f'(x) = 0 - 1 + 6x^2$

2) $f(x) = 3x + 2\sqrt{x}$;

f'

y'

$\frac{dy}{dx}$

$= 3 + 2x^{\frac{1}{2}}$

$f'(t) = 3 + 1x^{-\frac{1}{2}}$

$= 3 + \frac{1}{\sqrt{x}}$

$h(t) = 5t(2t - 16t^2 - 2)$

$10t^2 - 80t^3 - 10t$

$h'(t) = 20t - 240t^2 - 10$

$h(t) = (2t + t^2)(3t)$

$= 6t^2 + 3t^3$

$h'(t) = 12t + 9t^2$

إذا علم أن ميل المماس للمنحنى هو المشتقة الأولى للدالة، فأوجد ميل المماس للمنحنى عندما $x=1$

. $f(x) = 5x^4 + \frac{5}{x^4} + \frac{x^4}{5} + \sqrt[4]{x^5} + \sqrt[5]{4}$

ميل المماس = المشتقة الأولى

$f'(x) = 20x^3 - 20x^{-5} + \frac{4x^3}{5} + \frac{5}{4}x^{\frac{1}{4}} + 0$

$= 20(1)^3 - 20(1)^{-5} + \frac{4(1)^3}{5} + \frac{5}{4}(1)^{\frac{1}{4}} + 0$

إذا كان $f(x) = \frac{x^3}{3} - 3x^2 + 5$

فحل المعادلة: $f'(x) = 0$

$\frac{3x^2}{3} - 6x + 0 = 0$

$x^2 - 6x$

$x(x - 6)$

$x = 0$ | $x = 6$

٢) إذا كان $f(x) = x^3 + ax - 2$ فأوجد

قيمة a التي تحقق $f'(-1) = 5$

$3x^2 + a - 0$

$f'(-1) = 3(-1)^2 + a = 5$

$a = 5 - 3(-1)^2$

$a = 2$

١ـأوجد المشتقة الثالثة لما يأتي:

1) $f(x) = x^5 - 4x^3 + 5x - \cancel{8}$

$f'(x) = 5x^4 - 12x^2 + \cancel{5}$

$f''(x) = 20x^3 - 24x$

$f'''(x) = 60x^2 - 24$

2) $\overset{f(x)}{y} = 3t^{-2} - 5t^4 + \cancel{\sqrt[3]{-2}}$

$f'(t) = -6t^{-3} - 20t^3 + 0$

$f''(t) = 18t^{-4} - 60t^2$

$f'''(x) = -64t^{-5} - 120t$

٢ـتمثل $h(t) = 55t - 16t^2$ الارتفاع بالأقدام بعد t ثانية لكرة قذفت راسيا إلى أعلى. أوجد معادلة السرعة المتجهة اللحظية عند أي زمن t .

السرعة = مشتقة المسافة - للزمن

$h'(t) = 55 - 32t$

٣ـ: تعطي المسافة التي يقطعها جسم بالسنتيمترات بعد t بـ $s(t) = 18t - t^3 - 1$

أوجد مقدار السرعة والتسارع عند $t=2sec$.

السرعة $= 18 - 3t^2 = v = 18 - 3(2)^2 = 6$

التسارع $= a = -6t = -6(2) = -12$

٤ـ: تعطي المسافة التي يقطعها جسم بالسنتيمترات بعد t بـ $s(t) = 18t - t^3 + 3t^2 - 6$

أوجد مقدار السرعة الحركة عندما يكون التسارع $12\ m/sec$

السرعة $v = 18 - 3t^2 + 6t$

التسارع $a = \dfrac{-6t + 6}{-6} = \dfrac{12 - 6}{-6}$

$t = -1$

$\therefore v = 18 - 3(-1) + 6(-1) =$

٥: استعمل الاشتقاق إيجاد النقاط الحرجة لكل مما يأتي، ثم أوجد نقاط القيم العظمى والصغرى لكل دالة في الفترة المعطاة:

$f(x) = 2x^2 + 8x \quad : [-5.0]$

$2)\ f(t) = t^3 - 12t^2 + 5\ ; \quad [-1,5]$

$f'(x) = 4x + 8 = 0$ بعد المشتقة نحل المعادلة

$4x = -8$

$\boxed{x = -2}$ توجد نقطة حرجة عند

اذا كان -2 موجودة في $[-5,0]$ نقول

$f(-5) = 2(-5)^2 + 8(-5) = 10$ قيمة عظمى

$f(-2) = 2(-2)^2 + 8(-2) = -12$ قيمة صغرى

هنا اذا كانت نقطة حرجة نكتبها

$f(0) = 2(0)^2 + 8(0) = 0$

$f'(t) = 3t^2 - 24t$

$3t^2 - 24t = 0$

$t(3t - 24)$

$t = 0 \quad | \quad 3t - 24 = 0$

$\frac{3t}{3} = \frac{24}{3}$

$t = 8$

غير موجودة

نقاط حرجة $(0,5)$ $(8, -)$

٦ـ مثل $h(t) = 20t^2 - 160t + 330$ ارتفاع سعد بالأقدام أثناء مشاركته في قفزة البنجي، حيث الزمن بالثواني. في الفترة $[0,6]$. أوجد أقصى وأدنى ارتفاع يبلغه سعد في هذه الفترة.

$h'(t) = 40t - 160$

$40t - 160 = 0$

$\frac{40t}{40} = \frac{160}{40}$

$\boxed{t = 4}$

توجد نقطة حرجة عند

نقطة حرجة $(4,10)$

$h(t) = 20t^2 - 160t + 330$

$h(0) = 20(0)^2 - 160(0) + 330 = 330$

$h(4) = 20(4)^2 - 160(4) + 330 = 10$

$h(6) = 20(6)^2 - 160(6) + 330 = 90$

21) **رياضة:** ارجع إلى فقرة "لماذا؟" في بداية الدرس. افرض أن $h(t) = 65t - 16t^2 + 5$ تمثل ارتفاع الكرة h بالأقدام بعد t ثانية عندما $0 \leq t \leq 4$. (مثال 5)

a) أوجد $h'(t)$.

b) أوجد نقاط القيم العظمى والصغرى لمسار الكرة في الفترة $[0, 4]$.

c) هل يمكن لأحمد ركل الكرة لتصل إلى ارتفاع 70ft ؟

مشتقة حاصل الضرب

إذا كانت $f(x) = u(x).v(x)$ فإن مستقتها :

$$f'(x) = u(x).v'(x) + v(x).u'(x)$$

أوجد مشتقة ما يأتي:

$f(x) = (4x+3)(x^2+9)$

$u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$

$f'(x) = (4)(x^2+9) + (2x)(4x+3)$

$f(x) = 4x^2 + 36 + 8x + 6x$

$f'(x) = 4x^2 + 14x + 36$

2) $h(x) = (3x^4+2x)(5-3x) \quad ; \; x = -1$

نكتب القانون

ثم نوزع

ثم نختصر

ثم نعوض

$f'(x) = (12x^3+2)(5-3x) + -3(3x^4+2x)$

$= 60x^3 - 36x^4 + 10 - 6x - 9x^4 - 6x$

$= -45x^4 + 60x^3 - 12x + 10$

$= -45(-1)^4 + 60(-1)^3 - 12(-1) + 10 = -83$

مشتقة خارج القسمة

إذا كان $f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$ فإن مشتقتها:

$$f'(x) = \frac{v(x).u'(x) - u(x).v'(x)}{[v(x)]^2}$$

أوجد مشتقة ما يأتي:

1) $f(x) = \frac{2x-3}{3x-2} \quad ; \; x = 2$

$f'(x) = \frac{2(3x-2) - 3(2x-3)}{(3x-2)}$

$= \frac{6x - 4 - 6x + 9}{(3x-2)^2}$

$= \frac{5}{(3x-2)^2} = \frac{5}{(3(2)-2)^2}$

Bo.omar90

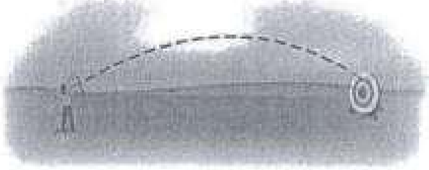
2) $f(m) = \frac{5m^2-3m}{3m+1} \quad ; m = -1$

$f'(m) = \frac{(10m-3)(3m+1) - (3)(5m^2-3m)}{(3m+1)^2}$

$= \frac{30m^2 + 10m - 9m - 3 - 15m^2 + 9m}{(3m+1)^2}$

$\frac{15m^2 + 10m - 3}{(3m+1)^2} =$

55) **رماية:** أطلق محمد سهمًا بسرعة 35 ft/sec باتجاه هدف . افرض أن ارتفاع السهم h بالأقدام بعد t ثانية من إطلاقه مُعطى بِـ $h(t) = -16t^2 + 35t + 1.5$. (الدرس 3-3)



a) اكتب تعبيرًا يمثّل السرعة المتجهة اللحظية $v(t)$ للسهم .

b) ما سرعة السهم بعد 0.5/sec من إطلاقه؟

c) متى يصل السهم إلى أقصى ارتفاع؟

d) ما أقصى ارتفاع يصل إليه السهم؟

---

51) **حيوانات:** يُعطى عدد الحيوانات P في محميّة طبيعية بالمئات بعد t سنة بـ $P(t) = \dfrac{40t^3 + 48t + 100}{5t^3 - 70t - 95}$. (الدرس 3-1)

a) أوجد العدد التقريبي للحيوانات في المحميّة بعد 5 سنوات.

b) ما أقصى عدد ممكن للحيوانات في المحميّة؟

54) **صواريخ:** أُطلق صاروخ رأسيًا لأعلى بسرعة 150 ft/sec. افرض أن ارتفاع الصاروخ $h(t)$ بالأقدام بعد t ثانية ومعطى بِـ $h(t) = -16t^2 + 150t + 8.2$. (الدرس 3-3)

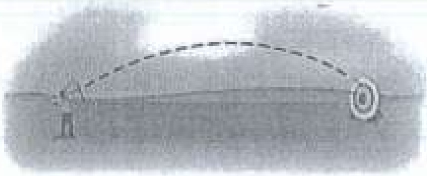
a) اكتب تعبير يمثل السرعة المتجهة اللحظية $v(t)$ للصاروخ.

b) ما سرعة الصاروخ بعد 1.5 sec من إطلاقه؟

c) متى يصل الصاروخ إلى أقصى ارتفاع؟

d) ما أقصى ارتفاع يصل إليه الصاروخ؟

55) **رماية:** أطلق محمد سهمًا بسرعة 35 ft/sec باتجاه هدف . افرض أن ارتفاع السهم h بالأقدام بعد t ثانية من إطلاقه مُعطى بـ $h(t) = -16t^2 + 35t + 1.5$. (الدرس 3-3)



a) اكتب تعبيرًا يمثِّل السرعة المتجهة اللحظية $v(t)$ للسهم .

b) ما سرعة السهم بعد 0.5/sec من إطلاقه؟

c) متى يصل السهم إلى أقصى ارتفاع؟

d) ما أقصى ارتفاع يصل إليه السهم؟

---

51) **حيوانات:** يُعطى عدد الحيوانات P في محميَّة طبيعية بالمئات بعد t سنة بـ $P(t) = \dfrac{40t^3 + 48t + 100}{5t^3 - 70t - 95}$ ، (الدرس 1-3)

a) أوجد العدد التقريبي للحيوانات في المحميَّة بعد 5 سنوات.

b) ما أقصى عدد ممكن للحيوانات في المحمية؟

---

54) **صواريخ:** أُطلق صاروخ رأسيًا لأعلى بسرعة 150 ft/sec. افرض أن ارتفاع الصاروخ $h(t)$ بالأقدام بعد t ثانية ومعطى بـ $h(t) = -16t^2 + 150t + 8.2$. (الدرس 3-3)

a) اكتب تعبير يمثل السرعة المتجهة اللحظية $v(t)$ للصاروخ.

b) ما سرعة الصاروخ بعد 1.5 sec من إطلاقه؟

c) متى يصل الصاروخ إلى أقصى ارتفاع؟

d) ما أقصى ارتفاع يصل إليه الصاروخ؟