يعتمد هذا النموذج للتصحيح

مملكة البحرين

وزارة التربية والتعليم

إدارة الامتحانات/ قسم الامتحانات

نموذج الإجابة

امتحان الدور الثاني للتعليم الثانوي للعام الدراسي 2014 - 2015 م

اسم المقرر : الرياضيات 6 — **المسار : توحيد المسارات**

رمز المقرر: ريض 366 — **الزمن : ساعتان**

أجب عن جميع الأسئلة الآتية وعددها (7) ، مبينًا خطوات حلك في جميع الأسئلة ما عدا السؤال الأول.

السؤال الأول : اختر رمز الإجابة الصحيحة في كل مما يأتي ، علمًا بأنه توجد إجابة صحيحة واحدة من بين البدائل الأربع التي تلي كل فقرة .

10 درجات

1) إذا كان $z = y + 3$ ، وكان $\frac{dz}{dx} = 5$ ، فما قيمة $\frac{dy}{dx}$ عندما $z = 2$ ؟

A) 5   B) 10   C) 20   D) 25

2) إذا كان $y = \cos x$ ، فما قيمة $\frac{d^4y}{dx^4}$ عندما $x = \pi$ ؟

A) 1   B) 0   C) $\frac{-1}{2}$ D) -1

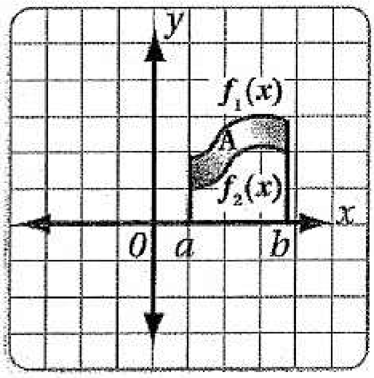
3) قذف جسم رأسيًا إلى أعلى، وكانت العلاقة بين ارتفاعه s بالأمتار عن سطح الأرض والزمن t بالثواني هي $s = 96t - 16t^2$ ، فما أقصى ارتفاع يصل إليه الجسم ؟

A) 80 m   B) 96 m   C) 144 m   D) 288 m

4) إذا كان $y = \int_2^4 \sqrt[3]{x^4+1}\ dx$ ، فما قيمة $\frac{dy}{dx}$ عندما $x = 3$ ؟

A) $\sqrt[3]{5}$ B) 0   C) $\frac{1}{2}$ D) $\frac{1}{3}$

5) اعتمادًا على الشكل المجاور، إذا كانت مساحة سطح المنطقة A المحصورة بين منحنى f_1 ومنحنى f_2 في $[a , b]$ تساوي 3 وحدات مربعة ، فما قيمة $\int_b^a (f_1 - f_2)(x)\ dx$ ؟



A) 3   B) -3 C) -9 D) 9

15

13 درجة

السؤال الثاني:

7

1) أوجد معادلة المماس لمنحنى $x^2 - 3y^2 = 2xy$ ، عند $(3,1)$ الواقعة على المنحنى.

الحل:

$$2x - 6y\frac{dy}{dx} = 2x\frac{dy}{dx} + 2y \quad ②$$

$$\frac{dy}{dx}(2x + 6y) = 2x - 2y \quad ①$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2x - 2y}{2x + 6y} \quad ①$$

$$m = \frac{dy}{dx}\Big|_{(3,1)} = \frac{6-2}{6+6} ① = \frac{1}{3} \quad ①$$

$\therefore$ معادلة المماس هي $y - 1 = \frac{1}{3}(x - 3)$ ①

6

2) إذا كان $g'(x) = x^2$ ، $f(x) = \sin 4x$ ، فأوجد $(g \circ f)'(\frac{\pi}{16})$.

الحل:

$$(g \circ f)'(x) = g'(f(x))(f'(x)) \quad ②$$

$$= (\sin 4x)^2 (4\cos 4x) \quad ②$$

$$(g \circ f)'(\frac{\pi}{16}) = (\sin\frac{\pi}{4})^2 (4\cos\frac{\pi}{4})$$

$$= (\frac{\sqrt{2}}{2})^2 (4 \times \frac{\sqrt{2}}{2}) \quad ①$$

$$= \frac{2}{4} \times \frac{4\sqrt{2}}{2}$$

$$= \sqrt{2} \quad ①$$

18 درجة

السؤال الثالث:

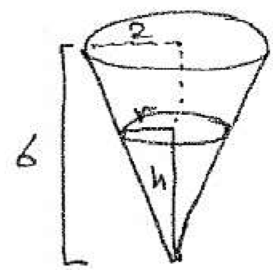
8

1) وعاء زجاجي على شكل مخروط قائم رأسه إلى أسفل ، طول قطر قاعدته $4\ in$ ، وارتفاعه $6\ in$ ، يُصبّ فيه الماء من أعلى بمعدل $3\ in^3/\min$ ، فيما يتسرب من رأسه الماء بمُعدّل $1\ in^3/\min$.

أوجد معدّل التغيّر في ارتفاع الماء في الوعاء الزجاجي عند اللحظة التي يكون ارتفاع الماء يساوي 3 in ،

علمًا بأن حجم المخروط القائم الذي طول نصف قطر قاعدته r ، وارتفاعه h يعطى بالعلاقة : $V=\frac{\pi}{3}r^2h$

الحل:



$$\frac{r}{h}=\frac{2}{6} \Rightarrow r=\frac{h}{3} \quad ① ①$$

$$\therefore V=\frac{\pi}{3}\left(\frac{h}{3}\right)^2(h) = \frac{\pi}{27}h^3 \quad ① ①$$

$$\frac{dV}{dt}=3\times\frac{\pi}{27}\times h^2\times\frac{dh}{dt} \quad ①$$

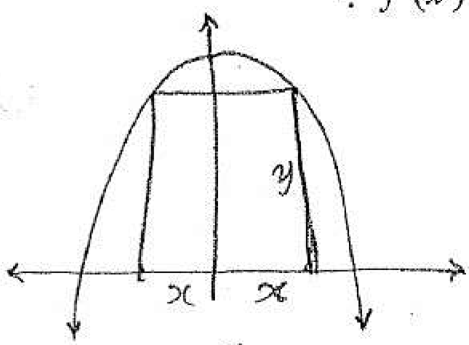
$$3-1 = \frac{\pi}{9}\times 3^2\times\left.\frac{dh}{dt}\right|_{h=3} \quad ① ①$$

$$\therefore \left.\frac{dh}{dt}\right|_{h=3}=\frac{2}{\pi}\ in/s \quad ①$$

10

2) أوجد بُعديّ المستطيل الذي مساحة سطحه أكبر ما يمكن ، والذي يمكن رسمه فوق المحور x بحيث تكون إحدى قاعدتيه على المحور x ، والرأسان الآخران على منحنى $f(x)=27-x^2$.

الحل:



$$A = 2xy \quad ①$$

$$A = 2x(27-x^2)$$

$$A = 54x-2x^3 \quad ①$$

$$A' = 54-6x^2 \quad ①$$

$$54-6x^2=0 \quad ①$$

$$\Rightarrow x^2=9 \quad ① \Rightarrow x=3 \quad ① ①$$

$$y=27-9=18$$

$$A''=-12x$$

$$\left.A''\right|_{x=3}=-36<0 \quad ①$$

$\therefore$ A أكبر ما يمكن عندما $x=3$ ، $y=18$ ①

$\therefore$ الطول $=18$ ، العرض $=6$ ①

اذا كتب العلاقة
$A=xy$
و أكمل الحل بشكل صحيح
وتوصل إلى أن
$x=3$ ، $y=18$
يخسر درجة واحدة
فقط .

18 درجة

السؤال الرابع:

إذا كانت $f(x) = (x-1)^3$،

1) أوجد فترات التزايد وفترات التناقص للدالة f (إن وجدت).

2) أوجد القيم العظمى والقيم الصغرى المحلية للدالة f (إن وجدت).

3) أوجد فترات التقعُّر إلى أعلى وفترات التقعُّر إلى أسفل ونقاط الانقلاب للدالة f (إن وجدت).

4) مثّل الدالة f بيانيًا بصورة تقريبية في المستوى الإحداثي أدناه.

الحل:

$f'(x) = 3(x-1)^2$ (1)

$3(x-1)^2 = 0$ (1)

$\Rightarrow x-1=0$ ($\frac{1}{2}$)

$\Rightarrow x=1$ ($\frac{1}{2}$)

إشارة f' (٣)

+ + + + +   1   + + + + +

$f''(x) = 6(x-1)$ (1)

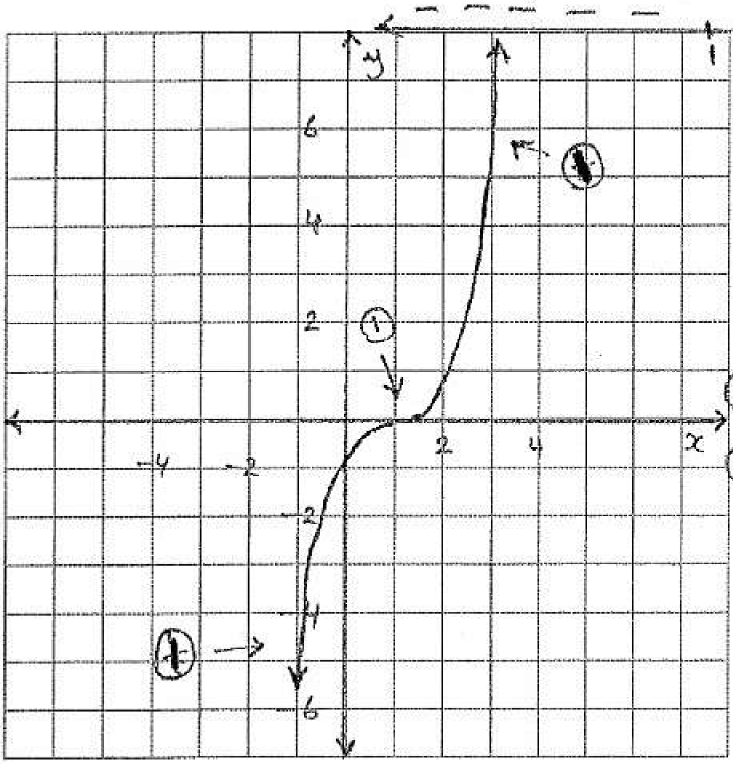
$6(x-1)=0$ (1)

$\Rightarrow x-1=0$ ($\frac{1}{2}$)

$\Rightarrow x=1$ ($\frac{1}{2}$)

إشارة f'' (٣)

− − − − −   1   + + + + +



١) f متزايدة في $(-\infty, \infty)$ (1)

٢) لا يوجد قيم عظمى محلية (1)

ولا يوجد قيم صغرى محلية (1)

٣) f مقعرة إلى أسفل في $(-\infty, 1]$ ($\frac{1}{2}$)

ومقعرة إلى أعلى في $[1, \infty)$ ($\frac{1}{2}$)

$(1, 0)$ نقطة انقلاب (1)

16 درجة

السؤال الخامس:

1) أوجد كلاً مما يأتي:

5 A) $\int \sec^5 x \tan x \; dx$

الحل:

$$= \int \sec^4 x \cdot \sec x \tan x \; dx \quad ②$$

$$= \frac{1}{5} \sec^5 x + c \quad ② \; ①$$

6 B) $\int \frac{x^2+1}{\sqrt[3]{x}} dx , x \neq 0$

الحل:

$$= \int (x^2+1)(x^{-\frac{1}{3}}) \, dx \quad ①$$

$$= \int (x^{\frac{5}{3}} + x^{-\frac{1}{3}}) \, dx \quad ②$$

$$= \frac{3}{8} x^{\frac{8}{3}} + \frac{3}{2} x^{\frac{2}{3}} + c \quad ① \; ① \; ①$$

5 2) يتحرك جسيم من السكون في خط مستقيم بدءًا من نقطة ثابتة O ، بحيث كان تسارعه $a \;\; \text{m}/\sec^2$ يعطى بالعلاقة $a = 6\sin 4t$ ، حيث t الزمن بالثواني . أوجد سرعة الجسم عند $t = \frac{\pi}{4} \sec$.

الحل:

$$v = \int a \, dt = \int 6 \sin 4t \, dt \quad ①$$

$$= -\frac{3}{2} \cos 4t + C \quad ①$$

وعندما $v=0$ ، فإن $t=0$ ½

$$\Rightarrow 0 = -\frac{3}{2} \cos(0) + C \quad ½$$

$$\Rightarrow C = \frac{3}{2} \quad ½$$

$$\therefore v = -\frac{3}{2} \cos 4t + \frac{3}{2} \quad ½$$

$$v\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{3}{2} \cos 4\left(\frac{\pi}{4}\right) + \frac{3}{2} \quad ½$$

$$= -\frac{3}{2} \times -1 + \frac{3}{2} \quad ½ \quad = 3 \;\; m/sec$$

14 درجة

السؤال السادس:

5

1) إذا كانت $f(x)=9x|2-x|, x\in[-3,3]$ ، فاحسب $\int_{-1}^{1} f(x)dx$

الحل:

$$|2-x| = \begin{cases} 2-x, & x \geq 2 \\ x-2, & x < 2 \end{cases} \quad ①$$

$$\therefore \int_{-1}^{1} f(x)\,dx = \int_{-1}^{1} 9x(x-2)\,dx \quad ①$$

$$= \int_{-1}^{1} (9x^2 - 18x)\,dx \quad \tfrac{1}{2}$$

$$= 3x^3 - 9x^2 \Big]_{-1}^{1} \quad ①$$

$$= (3-9) - (-3-9) = 6 \quad ① \quad \tfrac{1}{2}$$

9

2) أوجد مساحة سطح المنطقة المحصورة بين منحنى $y = 2x - x^2$ ، والمستقيم $y = -3$.

الحل:

$$2x - x^2 = -3 \quad ①$$

$$\Rightarrow x^2 - 2x - 3 = 0$$

$$\Rightarrow (x+1)(x-3) = 0 \quad ①$$

$$\Rightarrow x = -1 \;\; \tfrac{1}{2} \quad \text{or} \quad x = 3 \;\; \tfrac{1}{2}$$

$$A = \int_{-1}^{3} [(2x - x^2) - (-3)]\,dx \quad ② , \quad 2x - x^2 \geq -3 \;\; \forall\, x \in [-1, 3]$$

$$= \int_{-1}^{3} (2x - x^2 + 3)\,dx \quad 1\tfrac{1}{2}$$

$$= \left(x^2 - \frac{x^3}{3} + 3x\right)\Big]_{-1}^{3} \quad 1\tfrac{1}{2}$$

$$= (9 - 9 + 9) - \left(1 + \frac{1}{3} - 3\right) \quad ①$$

$$= \frac{32}{3} \;\; (\text{وحدة مربعة}) \quad ①$$

11 درجة

السؤال السابع:

احسب قيمة $\int_0^{\frac{5}{3}} \frac{1}{9x^2+25}\, dx$

الحل:

ليكن $f(x) = \frac{1}{9x^2+25}$ ①

وبفرض أن $x = \sqrt{\frac{25}{9}} \tan\theta = \frac{5}{3}\tan\theta = g(\theta)$ ①

$\Rightarrow dx = \frac{5}{3}\sec^2\theta = g'(\theta)$ ①

وعندما $x = \frac{5}{3}$ ، فإن ①

$\frac{5}{3}\tan\theta = \frac{5}{3}$

$\Rightarrow \tan\theta = 1 \Longrightarrow \theta = \frac{\pi}{4}$

وعندما $x=0$ ، فإن ①

$\frac{5}{3}\tan\theta = 0$

$\Rightarrow \tan\theta = 0 \Longrightarrow \theta = 0$

∴ لكل $\theta \in [0, \frac{\pi}{4}]$ ، يكون $x \in [0, \frac{5}{3}]$

$$\therefore \int_0^{\frac{5}{3}} f(x)\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{9(\frac{5}{3}\tan\theta)^2+25}\cdot\frac{5}{3}\sec^2\theta\, d\theta \quad ①$$

$$= \frac{5}{3}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sec^2\theta}{25\tan^2\theta+25}\, d\theta \quad ①$$

$$= \frac{5}{3}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sec^2\theta}{25(\tan^2\theta+1)}\, d\theta \quad ①$$

$$= \frac{5}{3}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sec^2\theta}{25\sec^2\theta}\, d\theta \quad ① \quad = \frac{1}{15}\int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta \quad \frac{1}{2}$$

$$= \frac{1}{15}\,\theta\Big]_0^{\frac{\pi}{4}} \quad \frac{1}{2} \quad = \frac{1}{15}\times\frac{\pi}{4} - 0 \quad \frac{1}{2} \quad = \frac{\pi}{60} \quad \frac{1}{2}$$

﴿انتهت الإجابة﴾

تراعى الحلول الأخرى إن وجدت