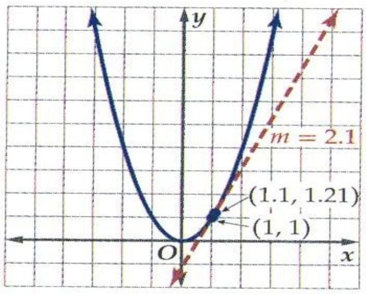
المماس والسرعة المتجهة
Tangent Lines and Velocity

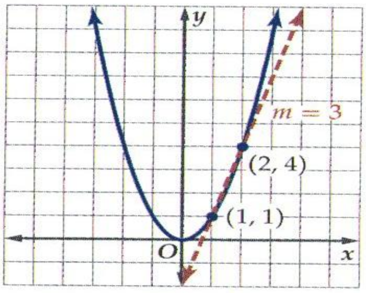
لماذا ؟

عندما يقفز المظلي من ارتفاع 15000 ft، فإن سرعته في اتجاه الأرض تزداد مع مرور الزمن؛ وذلك بسبب تسارع الجاذبية الأرضية، وتستمر سرعته في الازدياد حتى يفتح مظلته عند ارتفاع 2500 ft ، أو عندما يصل إلى السرعة المتجهة القصوى، وهي السرعة المتجهة التي ينعدم عندها التسارع.

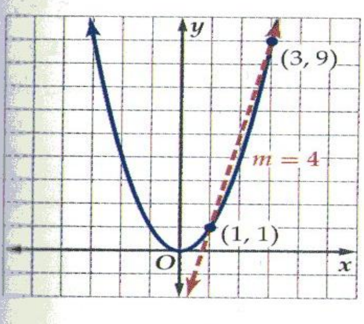
المماسات تعلمت في الدرس 4—2 أن مُعدّل تغيّر منحنى دالة غير خطية يتغير من نقطة إلى أخرى على منحنى الدالة، ولا يوجد مُعدّل تغيّر ثابت، وفي هذه الحالة يمكن حساب متوسط مُعدّلات تغيّر الدالة على فترة باستعمال القاطع. ففي التمثيلات البيانية أدناه لمنحنى $y = x^2$ والقاطع الذي يقطعه مارًا بالنقطة $(1, 1)$ ، وبنقطة أخرى مثل $(3, 9)$ ، أو $(2, 4)$، أو $(1.1, 1.21)$ ، تجد أن القاطع يتخذ أوضاعًا مختلفة يتغير خلالها ميله.



الشكل (1)

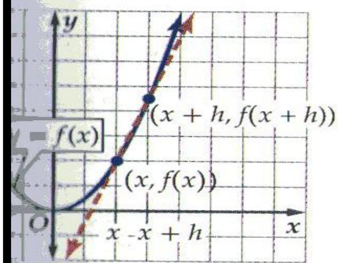


الشكل (2)



الشكل (3)

لاحظ أنه كلما قصُر طولُ الفترة بين نقطتي التقاطع ، زادت دِقّةُ تقريب ميل القاطع لميل المنحنى الحقيقي عند نقاط تلك الفترة. إذا واصلنا تقصير الفترة إلى درجة تكون فيها نقطتا التقاطع متطابقتين تقريبًا ، فإننا نحصل على مماس للمنحنى، وهو مستقيم يتقاطع مع المنحنى، ولكنه لا يعبره عند نقطة التماس. ويمكننا حساب ميل المنحنى بشكل تقريبي عند نقطة على المنحنى باستعمال **المماس** عند هذه النقطة كما في الشكل (1) أعلاه. إن ميل المنحنى غير الخطي عند نقطة عليه هو **مُعدّل التغيّر اللحظي** عند تلك النقطة، ويمكن تمثيله بميل مماس المنحنى عند النقطة نفسها.



ولتعريف ميل المماس لمنحنى فإنه يمكننا الرجوع إلى معادلة ميل القاطع المار بالنقطتين $(x, f(x))$ و $(x + h, f(x + h))$ كما في الشكل المجاور، ومنه يمكن كتابة ميل القاطع بالصيغة

$$m = \frac{f(x + h) - f(x)}{(x + h) - x} = \frac{f(x + h) - f(x)}{h}$$

وتُسَمَّى هذه الصيغة **قسمة الفرق**.

فكلما اقتربت النقطة $(x+h, f(x+h))$ من النقطة $(x, f(x))$ ، أي كلما اقتربت قيمة h من صفر، فإن القاطع يقترب من مماس المنحنى عند النقطة $(x, f(x))$، وبالتالي يمكننا حساب ميل المماس على أنه نهاية ميل القاطع عندما $h \to 0$

مفهوم أساسي **مُعدل التغيّر اللحظي**

مُعدّل التغيّر اللحظي للدالة f عند النقطة $(x, f(x))$ هو ميل المماس m عند النقطة $(x, f(x))$ ، ويعطى بالصيغة $m = \lim\limits_{h \to 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h}$ ، بشرط أن تكون النهاية لها وجود.

- أوجدي ميل مماس كل منحنى مما يأتي عند النقطة المعطاة:

1) $(3,9)$ $\quad y = x - 2$

- أوجدي ميل مماس كل منحنى مما يأتي عند النقاط المعطاة:

2) $(-2,12)$ $\quad y = 6 - 3x,$

3) $,(1,3),$ $\quad y = x^2$

4) $(1,0)$ $y = 2x \quad +1$

---

5) $(5,1)$ $y = 4 - x$

---

6) $(3,1)$ $y = \frac{1}{x}$