

تم تحميل هذا الملف من موقع المناهج البحرينية



* للحصول على أوراق عمل لجميع الصفوف وجميع المواد اضغط هنا

<https://almanahj.com/bh>

* للحصول على أوراق عمل لجميع مواد الصف الثاني عشر اضغط هنا

<https://almanahj.com/bh/12>

* للحصول على جميع أوراق الصف الثاني عشر في مادة رياضيات وجميع الفصول, اضغط هنا

<https://almanahj.com/bh/12>

* للحصول على أوراق عمل لجميع مواد الصف الثاني عشر في مادة رياضيات الخاصة بـ اضغط هنا

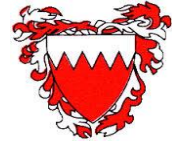
<https://almanahj.com/bh/12>

* لتحميل كتب جميع المواد في جميع الفصول للـ الصف الثاني عشر اضغط هنا

<https://almanahj.com/bh/grade12>

[almanahjbhbot/me.t//:https](https://t.me/almanahjbhbot)

للتحدث إلى بوت على تلغرام: اضغط هنا



مملكة البحرين – وزارة التربية والتعليم – مدرسة الرفاع الشرقي الثانوية للبنين – قسم الرياضيات

كراسة التدريبات الشاملة

رياض ٣٦٤

عزيزي الطالب : كراسة التدريبات لا تغني عن الكتاب المدرسي وانما هي داعمة ومساندة للتعليم والتعلم	
اسم الطالب	
الشعبة	

مفهوم أساسي

المتطابقات المثلثية لضعف الزاوية

المتطابقات الآتية صحيحة لقيم θ جميعها:

$$\sin 2\theta = 2 \sin \theta \cos \theta$$
$$\cos 2\theta = \cos^2 \theta - \sin^2 \theta$$
$$\cos 2\theta = 2 \cos^2 \theta - 1$$
$$\cos 2\theta = 1 - 2 \sin^2 \theta$$
$$\tan 2\theta = \frac{2 \tan \theta}{1 - \tan^2 \theta}$$


١- المتطابقات النسبية

$$\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} ; \cos \theta \neq 0$$

$$\cot \theta = \frac{\cos \theta}{\sin \theta} ; \sin \theta \neq 0$$

٢- متطابقات المقلوب

$$\csc \theta = \frac{1}{\sin \theta} ; \sin \theta \neq 0$$

$$\sec \theta = \frac{1}{\cos \theta} ; \cos \theta \neq 0$$

$$\cot \theta = \frac{1}{\tan \theta} ; \tan \theta \neq 0$$

$$\sin \theta = \frac{1}{\csc \theta} ; \csc \theta \neq 0$$

$$\cos \theta = \frac{1}{\sec \theta} ; \sec \theta \neq 0$$

$$\tan \theta = \frac{1}{\cot \theta} ; \cot \theta \neq 0$$

٣- متطابقات فيثاغورث

$$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$$

$$1 + \tan^2 \theta = \sec^2 \theta$$

$$1 + \cot^2 \theta = \csc^2 \theta$$

٤- متطابقات الزاويتين المتتامتين (مجموعهما ٩٠)

$$\sin \left(\frac{\pi}{2} - \theta \right) = \cos \theta$$

$$\sec \left(\frac{\pi}{2} - \theta \right) = \csc \theta$$

$$\tan \left(\frac{\pi}{2} - \theta \right) = \cot \theta$$

$$\cos \left(\frac{\pi}{2} - \theta \right) = \sin \theta$$

$$\csc \left(\frac{\pi}{2} - \theta \right) = \sec \theta$$

$$\cot \left(\frac{\pi}{2} - \theta \right) = \tan \theta$$

٥- متطابقات الدوال الزوجية والفردية

$$\sin(-\theta) = -\sin(\theta)$$

$$\cos(-\theta) = \cos(\theta)$$

$$\tan(-\theta) = -\tan(\theta)$$

$$\csc(-\theta) = -\csc(\theta)$$

$$\sec(-\theta) = \sec(\theta)$$

$$\cot(-\theta) = -\cot(\theta)$$

٦- متطابقات المجموع والفرق

$$\tan(A \pm B) = \frac{\tan(A) \pm \tan(B)}{1 \mp \tan(A)\tan(B)}$$

$$\sin(A \pm B) = \sin(A)\cos(B) \pm \cos(A)\sin(B)$$

$$\cos(A \pm B) = \cos(A)\cos(B) \mp \sin(A)\sin(B)$$

٨- متطابقات نصف الزاوية

$$\sin \frac{\theta}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \theta}{2}}$$

$$\cos \frac{\theta}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos \theta}{2}}$$

$$\tan \frac{\theta}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \theta}{1 + \cos \theta}}$$

٧- متطابقات ضعف الزاوية

$$\sin(2\theta) = 2\sin\theta\cos\theta$$

$$\cos(2\theta) = \begin{cases} \cos^2 \theta - \sin^2 \theta \\ 2\cos^2 \theta - 1 \\ 1 - 2\sin^2 \theta \end{cases}$$

$$\tan(2\theta) = \frac{2\tan\theta}{1 - \tan^2 \theta}$$

سلطان مع الامنيات بالتوفيق للجميع وتحيات أ / محمود عاشور

(١) أوجد القيمة الفعلية لـ $\sin \theta$ إذا كان $\cos \theta = \frac{5}{13}$ ،
 $270^\circ < \theta < 360^\circ$.

(٢) أوجد القيمة الفعلية لـ $\sec \theta$ إذا كان $\sin \theta = -\frac{2}{7}$ ، $180^\circ < \theta < 270^\circ$.

(٣) أوجد القيمة الفعلية لـ $\tan \theta$ إذا كان $\sin \theta = \frac{1}{2}$ ، $90^\circ < \theta < 180^\circ$.

(٤) أوجد القيمة الفعلية لـ $csc\theta$ إذا كان $cot\theta = \frac{1}{4}$ ، $180^\circ < \theta < 270^\circ$.

(٥) أوجد القيمة الفعلية لكل من $sin\theta$, $cot\theta$ إذا كان $sec\theta = -3$ ، $180^\circ < \theta < 270^\circ$.

(٦) أوجد القيمة الفعلية لـ $sec3A$ إذا كان $sin3A = -\frac{5}{13}$ ، $60^\circ < A < 90^\circ$.

1) $\frac{\cos \theta \sec \theta}{\cot \theta}$

2) $\sec^2 6\theta - \tan^2 6\theta$

3) $\cot\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) (1 - \sin^2 \theta)$

4) $(1 + \cot^2 \theta)(1 - \cos^2 \theta)$

5) $(\csc^2 \theta - 1)(\sec^2 \theta - 1)$

6) $\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) \cot \theta$

7) $\sin\left(\frac{\pi}{2} - B\right) \sec B$

8) $(1 - \sin 3\theta)(1 + \sin 3\theta)$

$$9) \frac{1 - \sin^2 6\theta}{\sin^2 6\theta}$$

$$10) \frac{1}{\tan^2 \theta} - \frac{\sec^2 \theta}{\tan^2 \theta}$$

$$11) \frac{18 - 18 \sin^2 B}{6 \sec B}$$

$$12) \frac{\tan B \cot^2 \theta + \cot\left(\frac{\pi}{2} - B\right)}{1 - \sin^2 B}$$

$$13) \frac{\cos(-5\theta)}{\sin(-5\theta)}$$

$$14) \frac{\sec A}{\sin A} (1 - \cos^2 A)$$

$$15) \frac{\tan^2 \theta \csc^2 \theta - 1}{\sec^2 \theta}$$

$$16) \frac{\tan\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)\sec\theta}{1-\csc^2\theta}$$

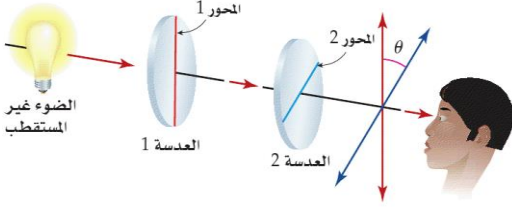
$$17) \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)-1}{1+\sin(-\theta)}$$

$$18) \frac{\sec(-\theta)\sin\theta+\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)}{1+\sec\theta}$$

$$19) \frac{20-20\sin^2\theta}{10\cos^2\theta-10}$$

(٢٠) اعد كتابة $\cot^2\theta - \tan^2\theta$ بدلالة $\sin\theta$

- ٢١) يمكن حساب شدة الضوء المار من عدستين متلاصقتين في نظارة شمسية باستعمال الصيغة $I = I_0 - \frac{I_0}{\csc^2 \theta}$ حيث I_0 شدة الضوء القادم من العدسة الأولى، و I شدة الضوء الخارجة من العدسة الثانية، θ الزاوية بين محوري العدستين.
- (أ) أوجد شدة الضوء بدلالة $\cos \theta$.
 (ب) احسب شدة الضوء إذا كانت $\theta = 30^\circ$.



(٢٢) إذا كان $\sin x = m$ ، $0^\circ < x < 90^\circ$ ، فأثبت أن: $\tan x = \frac{m\sqrt{1-m^2}}{1-m^2}$ ؟

عند تبسيط كل من التعابير الآتية، هل تحصل على 1 أم -1 ؟ وضح إجابتك.

(35) $\cot(-\theta) \tan(-\theta)$ (36) $\sin \theta \csc(-\theta)$

(37) $\sin^2(-\theta) + \cos^2(-\theta)$ (38) $\sec(-\theta) \cos(-\theta)$

(39) $(\sec^2(-\theta) - \tan^2(-\theta))$ (40) $\cot(-\theta) \cot\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$

(41) $\cos(-\theta) \sec \theta$ (42) $\sin(-\theta) \csc \theta$

(١) أثبت صحة المتطابقات الآتية:

1) $\sin^2 \theta = (1 - \cos \theta)(1 + \cos \theta)$

2) $\sec \theta \sin \theta \cot \theta = 1$

3) $1 + \csc^2 \theta \cos^2 \theta = \csc^2 \theta$

4) $\tan \theta = \frac{\sec \theta}{\csc \theta}$

5) $\sin^2 \theta + \tan^2 \theta \sin^2 \theta = \tan^2 \theta$

6) $\cos^2 \theta + \tan^2 \theta \cos^2 \theta = 1$

7) $\cos \theta \cos(-\theta) - \sin \theta \sin(-\theta) = 1$

8) $\csc \theta + \cot \theta = \frac{1 + \cos \theta}{\sin \theta}$

$$9) \tan\theta(\tan\theta + \cot\theta) = \sec^2 \theta$$

$$10) \cot\theta + \tan\theta = \frac{\sec^2 \theta}{\tan\theta}$$

$$11) \frac{\tan\theta + \cot\theta}{\tan\theta \cot\theta} = \tan\theta + \cot\theta$$

$$12) \sec\theta \csc\theta = \tan\theta + \cot\theta$$

$$13) \sec^2 \theta + \csc^2 \theta = \sec^2 \theta \csc^2 \theta$$

$$14) \csc\theta - \sin\theta = \cot\theta \cos\theta$$

$$15) \frac{\cos \theta}{1 - \sin \theta} = \frac{1 + \sin \theta}{\cos \theta}$$

$$16) \cot \theta (1 - \cos \theta) = \frac{\cos \theta \cdot \sin \theta}{(1 + \cos \theta)}$$

$$17) \csc \theta - 1 = \frac{\cot^2 \theta}{\csc \theta + 1}$$

$$18) 1 - \tan^4 \theta = 2 \sec^2 \theta - \sec^4 \theta$$

$$19) \frac{\sin^4 \theta - \cos^4 \theta}{\cos^2 \theta - \sin^2 \theta} = -1$$

$$20) \frac{1 - \sin \theta}{1 + \sin \theta} = (\sec \theta - \tan \theta)^2$$

$$21) \frac{1 + \tan \theta}{\sin \theta + \cos \theta} = \sec \theta$$

(٣) اختر الإجابة فيما يأتي:

(أ) أي مما يأتي لا يكافئ $\cos \theta$ ، حيث $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ ؟

$$\frac{\sin \theta}{\csc \theta} + \frac{\cos \theta}{\sec \theta} \quad \text{C} \quad \tan^2 \theta (1 - \csc^2 \theta) \quad \text{A}$$

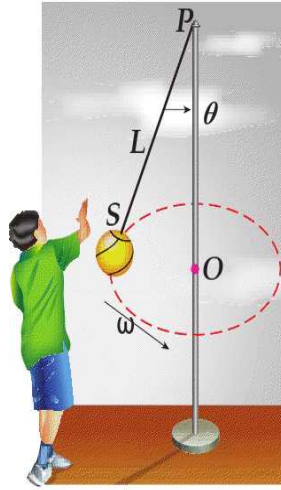
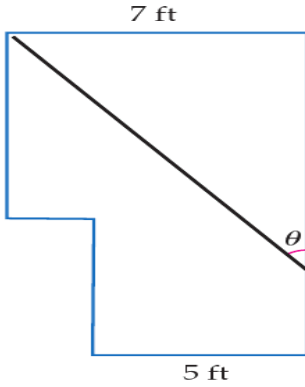
$$(1 - \sin^2 \theta) (1 + \tan^2 \theta) \quad \text{D} \quad \frac{\cot \theta}{\cos \theta} - \csc \theta \quad \text{B}$$

(ب) أي مما يأتي يكافئ 1 ، حيث $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ ؟

$$\cot \theta \sin \theta \quad \text{C} \quad \frac{\cos \theta}{\cos^2 \theta + \sin^2 \theta} \quad \text{A}$$

$$\tan \theta \csc \theta \quad \text{D} \quad \frac{1 - \sin^2 \theta}{\cos \theta} \quad \text{B}$$

(١) اشتق بعض الطلبة صيغة لمعرفة أطول سلم يمكن أن يحمل أفقياً ليتلائم مع زاوية ممر عرضه 5 ft إلى ممر آخر عرضه 7 ft. فوجدوا أنه يعطى بالصيغة: $l(\theta) = \frac{7\sin\theta + 5\cos\theta}{\sin\theta\cos\theta}$ وعندما قام معلمهم بإيجاد صيغة أخرى وجد أن: $l(\theta) = 7\sec\theta + 5\csc\theta$. هل الصيغتان متكافئتان؟



(٢) يُبين الشكل المجاور إحدى الألعاب. عندما تدور الكرة حول العمود، فإنها تكون مع الحبل شكلاً مخروطياً. إذا علمت أن العلاقة بين طول الحبل L ، والزاوية المحصورة بين الحبل والعمود تُعطى بالصيغة: $L = \frac{g \sec \theta}{\omega^2}$ ، فهل الصيغة $L = \frac{g \tan \theta}{\omega^2 \sin \theta}$ هي أيضاً تمثل العلاقة بين L ، θ ؟

(٢) إذا كان $x = \frac{1}{2} \tan \theta$ ، حيث $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$ ، فاكتب $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1+4x^2}}$ بدلالة $\sin \theta$ فقط.

1) $\sin 75^\circ$	2) $\sec(105)$
3) $\sin(-195)$	8) $\tan(705)$
$\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right)$	$\csc\left(\frac{\pi}{12}\right)$

$\cos 37^\circ \cos 7^\circ + \sin 37^\circ \sin 7^\circ$	$\cos\left(\frac{\pi}{3} - 4\theta\right) \cos \theta - \sin\left(\frac{\pi}{3} - 4\theta\right) \sin \theta$
$\sin 18 \cos 12 + \cos 18 \sin 12$	$\cos 20 \cos 10 - \cos 70 \cos 80$
$\frac{\tan(40 + A)^\circ - \tan(10 + A)^\circ}{1 + \tan(40 + A)^\circ \tan(A + 10)^\circ}$	$\frac{1 - \tan 25^\circ \tan 20^\circ}{\tan 25^\circ + \tan 20^\circ}$

٢١- أوجد بدون الآلة الحاسبة القيمة الفعلية :

1) $\sin(364^\circ) \times \cos(364^\circ) \times \tan(364^\circ) \times \cot(364^\circ) \times \csc(364^\circ) \times \sec(364^\circ)$

2) $\sin(1^\circ) \times \sin(2^\circ) \times \sin(3^\circ) \times \dots \times \sin(2019^\circ) \times \sin(2020^\circ)$

3) $\tan(1^\circ) \times \tan(2^\circ) \times \tan(3^\circ) \times \dots \times \tan(88^\circ) \times \tan(89^\circ)$

(٢) أثبت صحة ما يلي:

$$1) \cos(\theta + 60^\circ) = \sin(30^\circ - \theta)$$

(١) أثبت صحة

$$3) \tan(\theta + 45) = \frac{1 + \tan\theta}{1 - \tan\theta}$$

$$5) \cos\left(\frac{3\pi}{2} - \theta\right) = -\sin\theta$$

$$6) \tan\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) = -\cot\theta$$

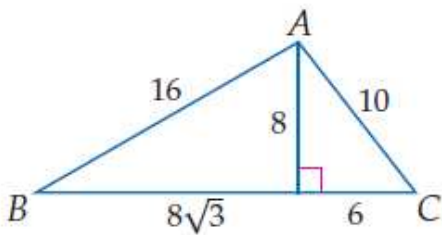
7) $\sin 24^\circ + \cos 54^\circ = \cos 6^\circ$

8) $\cos\left(\theta + \frac{\pi}{3}\right) \cos \frac{2\pi}{3} - \sin\left(\theta + \frac{\pi}{3}\right) \sin \frac{2\pi}{3} = -\cos \theta$

9) $\cos(\theta + 40) \cos(\theta - 50) + \sin(\theta + 40) \sin(\theta - 50)$

ابسط صورة للتعبير

اوجد القيمة الفعلية لجيب تمام الزاوية BAC بدون الالة الحاسبة ثم اوجد قياسها



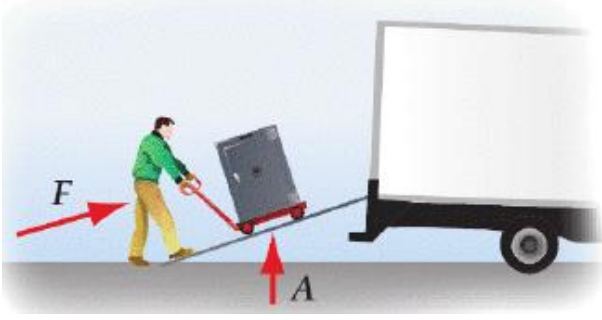
$$10) \quad \sin(A + B) = \frac{\tan A + \tan B}{\sec A \sec B}$$

$$11) \quad \sec(A - B) = \frac{\sec A \sec B}{1 + \tan A \tan B}$$

اثبت صحة المتطابقات

اشتق المتطابقة $\cot(A + B)$ بدلالة كل من $\cot A$, $\cot B$

(٢) في الشكل أدناه، إذا كان مقدار القوة اللازمة F ، والضرورة لإبقاء الخزانة ثابتة على المنحدر تعطى بالعلاقة $F = \frac{W(\sin A + \mu \cos A)}{\cos A - \mu \sin A}$ ، حيث W هو وزن الخزانة، و $\mu = \tan \theta$. فأثبت أن: $F = W \tan(A + \theta)$.



(١) يمر تيار كهربائي متردد في إحدى الدوائر الكهربائية، ويمكن استعمال الصيغة $c = 5 \sin(255t)$ لحساب شدة التيار c ، بالأمبير بعد مرور t ثانية.
(أ) أعد كتابة الصيغة باستعمال مجموع زاويتين. (ب) أوجد شدة التيار بعد مرور 1 sec .

المتطابقات المثلثية لضعف الزاوية

مفهوم أساسي

المتطابقات الآتية صحيحة لقيم θ جميعها:

$$\begin{aligned} \sin 2\theta &= 2 \sin \theta \cos \theta & \cos 2\theta &= \cos^2 \theta - \sin^2 \theta & \tan 2\theta &= \frac{2 \tan \theta}{1 - \tan^2 \theta} \\ \cos 2\theta &= 2 \cos^2 \theta - 1 \\ \cos 2\theta &= 1 - 2 \sin^2 \theta \end{aligned}$$

(١) إذا كان $\sin \theta = \frac{12}{13}$ ، $90^\circ < \theta < 180^\circ$ ، فأوجد مستعملا المتطابقات القيمة الفعلية لـ:

1) $\sin 2\theta$

2) $\cos 2\theta$

3) $\tan 2\theta$

(١) إذا كان $\cos \theta = \frac{-3}{5}$ ، $270^\circ < \theta < 360^\circ$ ، فأوجد مستعملا المتطابقات القيمة الفعلية لـ:

1) $\cot 2\theta$

2) $\sec 2\theta$

المتطابقات الآتية صحيحة لقيم θ جميعها:

$$\sin \frac{\theta}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \theta}{2}} \quad \cos \frac{\theta}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos \theta}{2}} \quad \tan \frac{\theta}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \theta}{1 + \cos \theta}}, \cos \theta \neq -1$$

(٣) إذ كان $180^\circ < \theta < 270^\circ, \tan \theta = \frac{8}{15}$ فأوجد مستعملاً المتطابقات القيمة الفعلية لـ :

1) $\sin \frac{\theta}{2}$

2) $\cos \frac{\theta}{2}$

3) $\cot \frac{\theta}{2}$

أوجد القيمة الفعلية لـ $\sin \frac{\theta}{2}$ ، علمًا بأن $\sin \theta = \frac{2}{3}$ ، θ تقع في الربع الثاني.

(١) بدون استعمال الآلة الحاسبة، أوجد القيمة الفعلية لما يأتي:

1) $\sin 67.5^\circ$

2) $\tan \frac{5\pi}{12}$

3) $2\sin 15^\circ \cos 15^\circ$

4) $2\cos^2 22.5^\circ - 1$

5) $\frac{2\tan 67.5^\circ}{1-\tan^2 67.5^\circ}$

6) $1 - 2\sin^2 \frac{7\pi}{12}$

$\frac{\tan 68 - \cot 67}{1 + \tan 68 \tan 23} = 1$	$\frac{2 \sin 67.5 \cos 67.5}{\cos 40 \cos 10 + \sin 40 \sin 10} = \frac{\sqrt{3}}{6}$
$\frac{\tan 25 - \tan 175^\circ}{1 + \tan 25 \cdot \tan 175} = \frac{\sqrt{3}}{3}$	$\frac{\sin 50}{1 + \cos 50} = \tan 25^\circ$
$\frac{2 \tan 112.5}{1 - \tan^2 112.5} = 1$	$\frac{\cos 55 \sin 15 - \sin 55 \cos 15}{2 \cos^2 25 - 1} = -1$

$(2) \sin 25 + \cos 55 = \cos 5$	$(1) \sin 40 = 8 \sin 5 \cos 5 \cos 10 \cos 20$
$\frac{1 + \cos \theta + \cos 2\theta}{\sin \theta + \sin 2\theta} = \cot \theta$	$\frac{\sin 35 + \sin 70}{1 + \cos 35 + \cos 70} = \tan 35^\circ$
$\sin^2 \theta = \frac{1}{2}(1 - \cos 2\theta)$	$4) \tan 50^\circ = \frac{1 + \tan 5^\circ}{1 - \tan 5^\circ}$

(١) أثبت صحة ما يلي:

$$1) \frac{\sin 4\theta}{\sin \theta} = 4\cos \theta \cos 2\theta$$

$$2) \sin 8\theta = 8\sin \theta \cos \theta \cos 2\theta \cos 4\theta$$

$$3) (\sin \theta + \cos \theta)^2 = 1 + \sin 2\theta$$

$$4) \cos^4 \theta - \sin^4 \theta = \cos 2\theta$$

$$5) \frac{\sin 2\theta}{1 - \cos 2\theta} = \cot \theta$$

$$6) \frac{\sin 8\theta}{1 + \cos 8\theta} = \tan 4\theta$$

$$7) \frac{\cos 2\theta}{1 + \sin 2\theta} = \frac{\cos \theta - \sin \theta}{\cos \theta + \sin \theta} = \frac{\cot \theta - 1}{\cot \theta + 1}$$

$$8) \sin 3\theta = 3 \sin \theta - 4 \sin^3 \theta$$

$$9) \tan 2\theta = \frac{2}{\cot \theta - \tan \theta}$$

$$10) \frac{1 - \tan^2 \theta}{1 + \tan^2 \theta} = \cos 2\theta$$

$$11) \tan \frac{\theta}{2} = \frac{\sin \theta}{1 + \cos \theta}$$

$$(2) \text{ إذا كان } \sin \theta + \cos \theta = \frac{7}{5} \text{ فأثبت أن: } \sin 2\theta = \frac{24}{25} .$$

(٣) إذا كان $\tan\theta_1 = \frac{1}{3}$, $\tan\theta_2 = \frac{1}{7}$ حيث $0 < \theta_1, \theta_2 < 90$. فأثبت أن: $\tan(2\theta_1 + \theta_2) = 1$.

$$\cot \theta + \sec \theta = \frac{\cos^2 \theta + \sin \theta}{\sin \theta \cos \theta}$$

$$\sec 2\theta + \tan 2\theta = \frac{\cos \theta + \sin \theta}{\cos \theta - \sin \theta}$$

(١) أوجد مجموعة حل المعادلة: $2\cos\theta - 1 = 0$
في كل من الحالات كما هو بالجدول

	$0 \leq \theta \leq 360$
	$90 \leq \theta \leq 270$
	$0 < \theta < 2\pi$
	$\frac{\pi}{4} < \theta < \pi$
	لجميع قيم θ بالدرجات
	لجميع قيم θ بالراديان

(٢) حل المعادلة: $2\sin\theta + \sqrt{3} = 0$ علماً بأن $0 < \theta < 2\pi$.

(٣) حل المعادلة $\cot\theta = \sqrt{3}$ لجميع قيم θ بالدرجات

(٥) في الفترة $0 \leq \theta < 360$ حل المعادلات التالية:

1) $\sin\theta = 0$

2) $\cos\theta = 0$

3) $\tan\theta = 0$

4) $\sin\theta = 1$

5) $\cos\theta = 1$

6) $\tan\theta =$ غير معرف

7) $\sin\theta = -1$

8) $\cos\theta = -1$

6) $\cot\theta =$ غير معرف

(٦) حل المعادلة $\sin 2\theta - \sin\theta = 0$ علماً بأن $0 \leq \theta \leq 360$.

(٧) حل المعادلة $\sin 2\theta = \cos\theta$ علماً بأن $0 \leq \theta \leq 360$.

(٨) حل المعادلة $4 \cos^2 \theta - 1 = 0$ حيث $90 \leq \theta \leq 270$

(٩) حل المعادلة $\cos 2\theta + 4\cos\theta = -3$ علماً بأن $0 \leq \theta < 2\pi$.

(١١) حل المعادلة $\cos 2\theta + 3\cos\theta = 1$ حيث $\theta \in [0, 2\pi)$.

(١٠) حل المعادلة $\cos 2\theta = 8 - 15\sin\theta$ لجميع قيم θ بالدرجات.

(١٢) حل المعادلة $\cos 2\theta = \frac{1}{2}$ لجميع قيم θ بالدرجات. ثم اوجد مجموعة الحل في الفترة $\theta \in [0, 180)$

(١٣) حل المعادلة $\sqrt{3}\csc 3\theta - 2 = 0$ لجميع قيم θ بالدرجات

حيث $0 < \theta < 360$.

(١٤) حل المعادلة: $2\sin 6\theta + \sqrt{2} = 0$ لجميع قيم θ بالراديان.

(١٥) حل المعادلة: $2\sin \frac{\theta}{3} - \sqrt{3} = 0$ حيث $0 < \theta < 2\pi$.

(١٦) حل المعادلة $\sin \theta - \cos \theta = 1$ لجميع قيم θ بالراديان.

(١٧) حل كل من المعادلتين: $\sin \theta + \cos \theta = \sqrt{2}$ و $\sin \frac{\theta}{2} + \cos \frac{\theta}{2} = \sqrt{2}$ لجميع القيم بالدرجات.

(١٨) حل المعادلة $\sin \theta \cot \theta - \cos^2 \theta = 0$ لجميع قيم θ بالدرجات.

(١٩) حل المعادلة $\tan^2 \theta - 1 = 0$ لجميع قيم θ بالدرجات.

٢٠) حل المعادلة $\sqrt{3}\tan \theta \sec \theta + 2\tan \theta = 0$ لجميع قيم θ بالدرجات

٢١) حل المعادلة $6 \cos \theta - 5 \sec \theta + 7 = 0$ لجميع قيم θ بالدرجات

٢٢) اذا كانت h تمثل ارتفاع بالمتر لعجلة دوارة في منتزه عين عذاري بعد زمن t بالثواني يعطى بالعلاقة $h(t) = 16 \cos \frac{\pi t}{12}$. أوجد الزمن الازم ليكون ارتفاع الشخص هو 8 m

$$1) \cos(5b)\cos b + \sin(5b)\sin b = \dots$$

$$2) \cos^2(7A) - \sin^2(7A) = \dots$$

$$3) \frac{10 \tan(6B)}{1 - \tan^2(6B)} = \dots$$

$$4) \pm \sqrt{\frac{1 - \cos(10A)}{1 + \cos(10A)}} = \dots$$

$$5) \cot^2(5A) - \csc^2(5A) = \dots$$

$$6) \frac{\tan(3B+A)^\circ - \tan(2B+A)^\circ}{1 + \tan(3B+A)^\circ \tan(2B+A)^\circ} \dots$$

٧) من القيم للزاوية θ التي تكون فيها المعادلة : غير معرف $\tan \theta$ هي او

[٤] أثبت أن:

$$1) \cos 3\theta = 4\cos^3 \theta - 3 \cos \theta$$

$$2) 1 - 2\sin^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2}\right) = \sin \theta$$

$$3) 2\cos^2\left(\frac{3\pi}{4} - \frac{\theta}{2}\right) = 1 - \sin \theta$$

$$4) \sec 2\theta + \tan 2\theta = \frac{\cos \theta + \sin \theta}{\cos \theta - \sin \theta}$$

$$5) \frac{\tan A + \tan B}{\tan A - \tan B} = \frac{\sin(A+B)}{\sin(A-B)}$$

$$6) \frac{\cos 2\theta}{1 + \sin 2\theta} = \frac{\cot \theta - 1}{\cot \theta + 1}$$

$$7) \frac{\cos 2\theta}{1 + \sin 2\theta} = \frac{\cos \theta - \sin \theta}{\cos \theta + \sin \theta} = \frac{1 - \tan \theta}{1 + \tan \theta}$$

$$8) \tan 5A - \tan 3A - \tan 2A = \tan 5A \cdot \tan 3A \cdot \tan 2A$$

$$9) \tan 32^\circ + \tan 13^\circ + \tan 32^\circ \cdot \tan 13^\circ = 1$$

$$10) \frac{\tan^2 A - \tan^2 B}{1 - \tan^2 A \cdot \tan^2 B} = \tan(A-B) \cdot \tan(A+B)$$

$$11) \frac{\tan^2 2\theta - \tan^2 \theta}{1 - \tan^2 2\theta \cdot \tan^2 \theta} = \tan(3\theta) \cdot \tan(\theta)$$

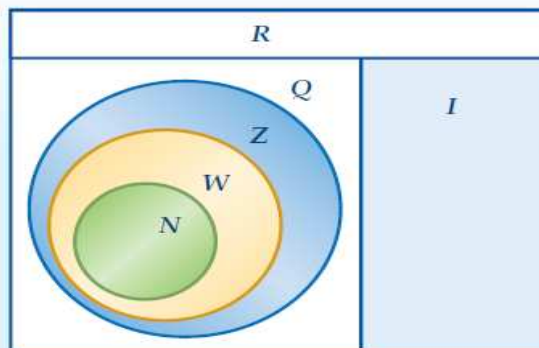
مفهوم أساسي

الأعداد الحقيقية (R)

أضف إلى

مطوبتك

الرمز	أمثلة	المجموعة
Q	$0.125, -\frac{7}{8}, \frac{2}{3} = 0.66...$	الأعداد النسبية
I	$\pi = 3.14159...$ $\sqrt{3} = 1.73205...$	الأعداد غير النسبية
Z	$-5, 17, -23, 8$	الأعداد الصحيحة
W	$2, 96, 0, \sqrt{36}$	الأعداد الكلية
N	$3, 17, 6, 86$	الأعداد الطبيعية



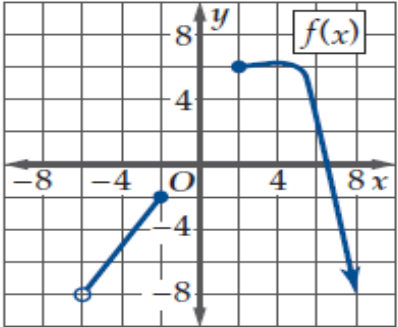
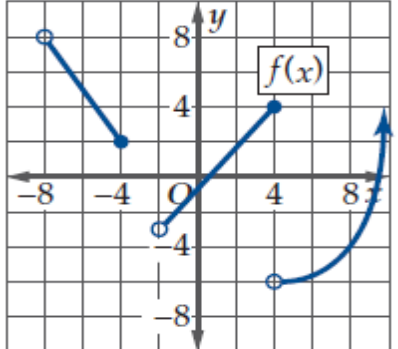
تدريب (١): اكتب كلاً من مجموعات الأعداد الآتية باستعمال الصفة المميزة، وعلى صورة فترة (إن أمكن):

فئة الأعداد	الصفة المميزة	الفترة (إن أمكن)	فقط الأعداد (إن أمكن)
$\{ \dots, -2, -1, 0, 1, 2 \}$			
$\{-5, -4, \dots, 6, 7\}$			
$2 \leq y < 5$			
$x \geq 2$			
$-7 \leq x \leq 9$			
$x > 18$ أو $x < 0$			
المضاعفات الموجبة للعدد 8			
$\{ \dots, -10, -5, 0, 5, 10, \dots \}$			
$y \leq 4$			
$m \geq 3$ أو $m \leq -5$			

مفهوم الدالة :		
١	أزواج مرتبة	
٢	شكل بياني	
٣	معادلة جبرية	

تدريب (٢): حدد ما إذا كانت كل علاقة مما يأتي تمثل y كدالة في x :

<table><tr><td>x</td><td>2</td><td>3</td><td>5</td><td>8</td></tr><tr><td>y</td><td>2</td><td>2</td><td>2</td><td>2</td></tr></table>	x	2	3	5	8	y	2	2	2	2	$(-1,2),(2,5),(2,7),(1,5)\}$	المتغير x رقم مجمع سكني المتغير y اسم الطالب بالصف	المتغير x رقم سكني للطالب المتغير y اسم الطالب بالصف
x	2	3	5	8									
y	2	2	2	2									
<table><tr><td>x</td><td>y</td></tr><tr><td>-3</td><td>5</td></tr><tr><td>-2</td><td>0</td></tr><tr><td>-1</td><td>-3</td></tr><tr><td>0</td><td>-4</td></tr></table>	x	y	-3	5	-2	0	-1	-3	0	-4			المتغير x اسم مالك السيارة المتغير y رقم السيارة الذي يمتلكها المتغير x رقم السيارة المتغير y اسم مالك السيارة
x	y												
-3	5												
-2	0												
-1	-3												
0	-4												
			المتغير x رقم مجمع سكني المتغير y اسم المدينة										
$12y - 36 = y^2$ هـ	$5xy = \frac{7}{x - 2}$ هـ	$y^2 + x^2 = 9$ هـ	$5 = \sqrt{3x + y}$ هـ										

1	$f(x) = x^2 + 5x - 1$ <p>1) $f(-2) =$</p> <p>2) $f(3m) =$</p> <p>3) $f(k + 1) =$</p>	$h(x) = \frac{2x}{x - 5}$ <p>1) $h(3) =$</p> <p>2) $h(5) =$</p> <p>2) $h(5t) =$</p>
3	$g(x) = \begin{cases} 2x - 3, & x < -3 \\ -1, & -3 \leq x < 2 \\ x^2 + 5, & x \geq 2 \end{cases}$ <p>1) $g(0) =$</p> <p>2) $g(3) =$</p> <p>3) $g(-3) =$</p>	$g(a) = 5\sqrt{4 + a^2}$ <p>1) $g(0) =$</p> <p>2) $g(\sqrt{5}) =$</p> <p>2) $g(9) =$</p>
5	$g(x) = \begin{cases} 2x, & x < -5 \\ 12, & -3 \leq x < 6 \\ x^2 + 1, & x \geq 6 \end{cases}$ <p>1) $g(8) =$</p> <p>2) $g(-4) =$</p> <p>3) $g(-8) =$</p>	$f(x) = 5\sqrt{4 - x}$ <p>1) $f(0) =$</p> <p>2) $f(6) =$</p> <p>2) $f(6k) =$</p>
7	 <p>1) $f(2) =$</p> <p>2) $f(-6) =$</p> <p>3) $f(-2) =$</p> <p>4) $f(6) =$</p>	 <p>1) $f(4) =$</p> <p>2) $f(-2) =$</p> <p>3) $f(-8) =$</p> <p>4) $f(8) =$</p>

مجال الدوال الحقيقية

دوال مجالها (R) دالة كثيرة الحدود/الثابتة/ الجذر التكعيبي/ المطلقة	دوال نسبية	دوال جذر زوجي الدليل	دالة الجذر التربيعي (الجذور الزوجية بالمقام)	مجال الدالة النسبية المركبة
$f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 5x$	$f(x) = \frac{2x+3}{x-6}$	$f(x) = \sqrt{x-5}$	$f(x) = \frac{3x}{\sqrt{x-7}}$	$f(x) = \frac{\sqrt{x+4}}{x-3}$

تدريب: أوجد مجال الدوال التالية:

$f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 5x + 3$	$f(x) = \sqrt[5]{3x+1}$
$f(x) = \sqrt[4]{3x+18}$	$h(t) = \frac{ t-2 }{t-6}$
$f(x) = \frac{2x-3}{x^2-10x-24}$	$f(x) = \frac{4x+5}{x^3-16x}$
$f(x) = \frac{\sqrt{3x-12}}{2x-10}$	$f(x) = \frac{3x+9}{\sqrt{8-2x}}$

$f(x) = \frac{x^2 + 1}{\sqrt[3]{x-12}}$	$f(x) = \frac{\sqrt{2x-2}}{\sqrt{12-2x}}$
$f(x) = \frac{2x}{3x(x+2)} + \frac{5}{x-8}$	$f(x) = \frac{12}{x^2-25} + \sqrt{x-5}$
$h(r) = \frac{3x}{\sqrt{x-2}-4}$	$f(x) = \frac{\sqrt[4]{4x^2}}{x^3-10x^2+24x}$

أوجد مجال الدوال التالية

$$(1) f(x) = \frac{x^2+7x-1}{\sqrt{x-2}}$$

$$(2) f(x) = \frac{\sqrt{x+5}}{x^2-4x+3}$$

$$(3) f(x) = \frac{\sqrt{x+5}}{\sqrt[3]{2x-8}}$$

$$4) f(x) = \frac{x^2+7x}{\sqrt{x+144}}$$

$$(5) f(x) = \frac{\sqrt[3]{x-4}}{x^2-4x-12}$$

$$(6) f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{2x-8}}$$

التعويض المباشر

احسب كل نهاية مما يأتي :

$$1) \lim_{x \rightarrow 2} (3x^2 - 5x + 7) =$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 5} \sqrt{x^2 - 2} =$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{3x - 6}{x^2 + x - 4} \right) =$$

$$4) \lim_{x \rightarrow \pi} (6x + \cos x + 1) =$$

$$5) \lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{x^2 + 3x + 1}{x - 2} \right) =$$

$$6) \lim_{x \rightarrow 0} (4x + 3\sin 2x) =$$

أوجد قيمة المجهول k فيما يلي:

$$7) \lim_{x \rightarrow k} (x^2 + 3x) = 70$$

$$8) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 + k}{kx - 5} = \frac{1}{3}$$

$$1) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{x^2 - 3x} =$$

$$2) \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 - 5x - 14}{5x + 10}$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 8}{x^3 - 4x} =$$

$$4) \lim_{x \rightarrow 5} \left(\frac{x^2 - 4x}{x^2 - 25} - \frac{5}{x^2 - 25} \right) =$$

$$5) \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^3 - 4x^2 + 2x - 8}{5x - 20}$$

$$6) \lim_{x \rightarrow 6} \frac{x^2 - 7x + 6}{3x^2 - 11x - 42}$$

الضرب في المرافق واختصار العامل الصفري ثم التعويض

$$1) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x+6} - 3}{x^2 - 9}$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+16} - 4}{x}$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2 - 5x}{\sqrt{x-1} - 2}$$

$$4) \lim_{x \rightarrow 49} \frac{x - 49}{\sqrt{x} - 7} =$$

$$6) \lim_{x \rightarrow 6} \frac{3 - \sqrt{x+3}}{x - 6}$$

$$6) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x+3} - 2}{\sqrt{x+8} - 3}$$

النهاية عند المالانهاية (كثيرات الحدود والدوال النسبية)

$$1) \lim_{x \rightarrow -\infty} (8 - x^2 - 12x^3) =$$

$$2) \lim_{x \rightarrow \infty} (8x - x^2 + 4x^3 - 15) =$$

$$3) \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{3x^3 - 4}{8 - x^2 + 12x^3} \right) =$$

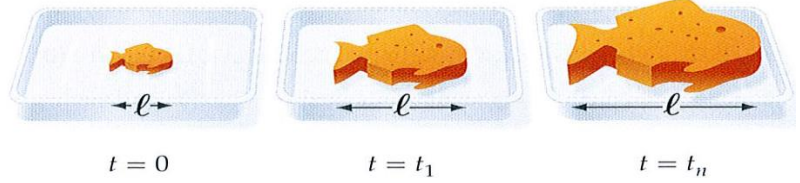
$$4) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5}{x - 12} =$$

$$5) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x^2 - 4x^5}{8x - 4x^2} =$$

$$6) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{4x - 5 + 8x^3}{8x^4 + x^2} \right) =$$

(٧) اكتب الخمسة حدود الأولى من المتتابعة التالية ثم اوجد نهايتها (ان وجدت) $a_n = \frac{12n^3}{3n+8}$

إسفنج: تحتوي مادة هلامية على حيوان الإسفنج، وعند وضع المادة الهلامية في الماء، فإن حيوان الإسفنج يبدأ بامتصاص الماء والتضخم. ويمكن تمثيل ذلك بـ $\ell(t) = \frac{105t^2}{10 + t^2} + 25$ ، حيث ℓ طول حيوان الإسفنج بالمليمترات بعد t ثانية من وضعه في الماء. (مثال 6)



- (a) ما طول حيوان الإسفنج قبل وضعه في الماء؟
 (b) ما نهاية الدالة عندما $t \rightarrow \infty$ ؟
 (c) وضح العلاقة بين نهاية الدالة ℓ وطول حيوان الإسفنج.

تدريب على اختبار معياري

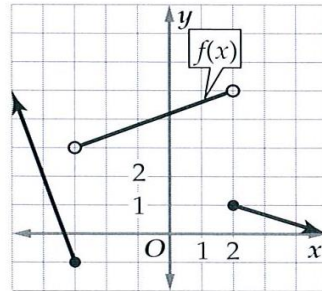
61 قيمة $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{2h^3 - h^2 + 5h}{h}$ ؟

- 5 H 3 F
 J ليس لها وجود. 4 G

62 ما القيمة التي تقترب منها $g(x) = \frac{x + \pi}{\cos(x + \pi)}$ عندما تقترب x من 0 ؟

- $-\frac{1}{2}\pi$ C $-\pi$ A
 0 D $-\frac{3}{4}$ B

63 باستعمال التمثيل البياني للدالة f أدناه، ما قيمة $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$ ؟



- 0 F 1 H 5 G J ليس لها وجود

#	الدالة	$y = f(x)$	$y' = f'(x)$	مثال
1	الثابتة	C	0	$Y = 5 \rightarrow y' = 0$
2	القوة	Cx^n (C ثابت)	ncx^{n-1}	$Y = 4x^3 \rightarrow y' = 12x^2$
3	ضرب دالتين	$H(x) \times G(x)$	$\Rightarrow G(x)H'(x) + H(x)G'(x)$ مشتقة الأولى \times الثانية + مشتقة الثانية \times الأولى	$y = (x^3+4)(2x^4-5x)$ $y' = (x^3+4)(8x^3-5) + (2x^4-5x)(3x^2)$
4	قسمة دالتين	$\frac{G(x)}{H(x)}$	$\Rightarrow \frac{H(x) \times G'(x) - G(x) \times H'(x)}{[H(x)]^2}$ مشتقة المقام \times البسط - مشتقة البسط \times المقام المقام ²	$y = \frac{3x-9}{x^5-7}$ $y' = \frac{(x^5-7)(3) - (3x-9)(5x^4)}{(x^5-7)^2}$

أوجد المشتقة الأولى للدوال التالية :

1) $f(x) = 8x - x^4 + 2x^3 + 5$	2) $f(x) = 3x + 2x^4 - 2x^{-3} - 9$
3) $f(x) = \frac{6x}{3x+1}$	4) $h(t) = (4t + t^2)(7t - 4)$
5) $h(t) = 5t(2t - 16t^2 - 2)$	6) $f(x) = (4x - 1)(x^2 + 9)$
7) $f(x) = \frac{5}{x^4} + \frac{x^3}{5} + \sqrt[4]{x^5} + \sqrt[5]{4}$	8) $h(m) = (m^2 + 4)((m - 2)(m + 2))$

تمارين على إيجاد المشتقة

إذا علم أن ميل المماس للمنحنى هو المشتقة الأولى للدالة، فأوجد ميل المماس للمنحنى عند النقاط المعطاه

1) $f(x) = 6x^4 + \frac{6}{x^4} + 1$, $x = 1$ 2) $f(x) = \frac{x^4}{5} + \sqrt[4]{x^5} + \sqrt[5]{4}$, $x = 2$

3) $f(x) = \frac{6x-4}{2x+1}$, $x = 1$ 4) $f(x) = (5x - 1)(5x + 1)$, $x = 2$

٢) إذا كان $f(x) = x^3 + kx - 2$ فأوجد
قيمة k التي تحقق $f'(-1) = 5$

إذا كان $f(x) = \frac{x^3}{3} - 3x^2 + 5$
فحل المعادلة: $f'(x) = 0$

١- أوجد المشتقة الثالثة لما يأتي:

1) $f(x) = x^5 - 4x^3 + 5x - 8$

2) $y = 3t^{-2} - 5t^4 + \sqrt[3]{-2}$

تطبيقات على الاشتقاق

١- تطبيقات هندسية	٢- تطبيقات فيزيائية	٣- النقاط الحرجة - القيم القصوى

التطبيقات الفيزيائية

١- تمثل $h(t) = 55t^3 - 16t^2 + 8t - 5$ الارتفاع بالأقدام بعد t ثانية لكرة قذفت رأسياً إلى أعلى. أوجد معادلة السرعة المتجهة اللحظية والتسارع عند أي زمن t .

٢- تعطي الازاحة التي يقطعها جسم بالسنتيمترات بعد t بـ $s(t) = 18t - t^3 - 1$ أوجد مقدار السرعة والتسارع عند $t = 2 \text{ sec}$.

٣- تعطي المسافة التي يقطعها جسم بالسنتيمترات بعد t بـ $s(t) = 18t^2 - t^3 + 3t - 6$ أوجد مقدار السرعة الحركية عندما يكون التسارع 12 cm/sec

كيف نجد النقاط الحرجة؟	
كيف نجد القيم القصوى (جبرياً)	

١-: استعمل الاشتقاق لإيجاد النقاط الحرجة لكل مما يأتي، ثم أوجد نقاط القيم العظمى والصغرى لكل دالة في الفترة المعطاة:

1) $f(t) = t^3 - 12t^2 + 5$; $[-1,5]$

٢-افرض ان: $h(t) = 20t^2 - 160t + 330$ ارتفاع كرة القدم بالقدم بعد t ثانية حيث الزمن بالثواني. في الفترة $0 \leq t \leq 4$. أوجد أقصى وأدنى ارتفاع يبلغه سعد في هذه الفترة.

(21) **رياضة:** ارجع إلى فقرة "لماذا؟" في بداية الدرس. افرض أن $h(t) = 65t - 16t^2 + 5$ تمثل ارتفاع الكرة h بالأقدام بعد t ثانية عندما $0 \leq t \leq 4$. (مثال 5)

(a) أوجد $h'(t)$.

(b) أوجد نقاط القيم العظمى والصغرى لمسار الكرة في الفترة $[0, 4]$.

(c) هل يمكن لأحمد ركل الكرة لتصل إلى ارتفاع 70 ft؟

أوجد المشتقة الأولى للدوال التالية علما بان k عدد حقيقي :

1) $f(x) = 8x - x^4 + \cos^2 \pi$	2) $f(x) = 3x + kx - 2k^3$
3) $f(m) = \frac{m}{2m+1}$	4) $f(x) = \frac{5}{x^4} + \frac{x^3}{5} + \sqrt[4]{x^5} + \sqrt[5]{4}$
5) $h(t) = 5t \left(2kt - 16t^2 - \sin \frac{\pi}{2} \right)$	6) $f(x) = (4x + 3)(x^2 + 9k)$

$$7) f(x) = 8x\sin^2 x + 8x\cos^2 x$$

$$8) f(x) = x^2 \tan^2 x - \frac{x^2}{1 - \sin^2 x}$$

51 حيوانات: يُعطى عدد الحيوانات P في محمية طبيعية بالمئات بعد

$$t \text{ سنة بـ } P(t) = \frac{40t^3 + 48t + 100}{5t^3 - 70t - 95} \quad (\text{الدرس 3-1})$$

(a) أوجد العدد التقريبي للحيوانات في المحمية بعد 5 سنوات.

(b) ما أقصى عدد ممكن للحيوانات في المحمية؟

54 صواريخ: أطلق صاروخ رأسياً لأعلى بسرعة 150 ft/sec . افرض

أن ارتفاع الصاروخ $h(t)$ بالأقدام بعد t ثانية ومعطى

$$h(t) = -16t^2 + 150t + 8.2 \quad (\text{الدرس 3-3})$$

(a) اكتب تعبير يمثل السرعة المتجهة اللحظية $v(t)$ للصاروخ.

(b) ما سرعة الصاروخ بعد 1.5 sec من إطلاقه؟

(c) متى يصل الصاروخ إلى أقصى ارتفاع؟

(d) ما أقصى ارتفاع يصل إليه الصاروخ؟

انتهت أسئلة وانشطة رياض ٣٦٤ - ٢٠ أكتوبر ٢٠٢٠ م

مع الامنيات بالنجاح والتوفيق للجميع