حل تمارين رقم ٨ ، ١١ ، ١٤ ، ١٥، ١٦ صفحة ١٥٠ ريض ٣٦٦

$$(8)\ \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{27}{\tan^5 x \sin^2 x} dx$$

الحل:

نرفع $\tan^5 x$ فوق تصبح $\cot^5 x$ ونرفع $\sin^2 x$ فوق تصبح $\csc^2 x$

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{27}{\tan^5 x \sin^2 x} dx = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} 27 \cot^5 x \csc^2 x\, dx$$

نضع (-)أمام $\csc^2 x$ و(-) خارج التكامل حتى أحصل على الدالة ومشتقتها ولا داعي لوجود 27 داخل التكامل

التكامل = $-27 \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \cot^5 x(-\csc^2 x)\, dx$ ∴

∴ الدالة $\cot x$ والمشتقة $-\csc^2 x$

∴ التكامل $= \frac{-27}{6}\left[\cot^6 x\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} = \frac{-27}{6}\left[\left[\cot^6(\frac{\pi}{3})\right] - \left[\cot^6(\frac{\pi}{4})\right]\right]$

$$= \frac{-27}{6}\left[[\cot 60]^6 - [\cot 45]^6\right] = \frac{-27}{6}\left[\left[\frac{1}{\sqrt{3}}\right]^6 - [1]^6\right] = \frac{13}{3}$$

$$(11)\ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^3 x - \cos^3 x}{\sin x - \cos x} dx$$

الحل: نحلل البسط $(\sin^3 x - \cos^3 x)$ إلى فرق بين مكعبين قوس صغير وقوس كبير

∴ التكامل $= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cancel{(\sin x - \cos x)}(\sin^2 x + \sin x \cos x + \cos^2 x)}{\cancel{(\sin x - \cos x)}} dx$

∴ التكامل $= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin^2 x + \sin x \cos x + \cos^2 x)\, dx$

وبما أن $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$

∴ التكامل $= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x \cos x + 1)\, dx = \left[\frac{\sin^2 x}{2} + x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$

$$= \left[\left[\frac{\sin^2(\frac{\pi}{2})}{2} + \frac{\pi}{2}\right] - \left[\frac{\sin^2(0)}{2} + 0\right]\right] = \frac{1}{2} + \frac{\pi}{2}$$

أثبت أن :

$$(14)\ \int_0^{\frac{\pi}{4}}(\cos^2x - \sin^2x)\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\sin x\cos x\,dx$$

الإثبات:

$$L.H.S = \int_0^{\frac{\pi}{4}}(\cos^2x - \sin^2x)\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos 2x\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} 2\cos 2x\,dx$$

لأن $\cos^2x - \sin^2x = \cos 2x$

$$= \frac{1}{2}[\sin 2x]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{2}\left[\left[\sin 2(\tfrac{\pi}{4})\right] - [\sin 2(0)]\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[[\sin(90)] - [\sin(0)]\right] = \frac{1}{2}[1] = \frac{1}{2}$$

$$R.H.S = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\sin x\cos x\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin 2x\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\sin 2x\,dx$$

لأن $2\sin x\cos x = \sin 2x$

$$= \frac{1}{2}[-\cos 2x]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{2}\left[\left[-\cos 2(\tfrac{\pi}{4})\right] - [-\cos 2(0)]\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[[-\cos(90)] - [-\cos(0)]\right] = \frac{1}{2}[0+1] = \frac{1}{2}$$

إذا كان: $\int_0^b \cos^2u\sin u\,du = \frac{1}{3}\ ,\quad b \in [0\,,\pi]$

فأوجد قيمة b

الحل:

$$\int_0^b \cos^2u\sin u\,du = \frac{1}{3}$$

بإجراء التكامل (دالة في مشتقتها)

$$-\int_0^b \cos^2u(-\sin u)\,du = \frac{1}{3}$$

$$\text{التكامل} = -\left[\frac{\cos^3x}{3}\right]_0^b = -\left[\left[\frac{\cos^3b}{3}\right] - \left[\frac{\cos^3(0)}{3}\right]\right] = \frac{1}{3}$$

$$\therefore -\left[\frac{\cos^3b}{3}\right] + \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$$

$$\therefore -\left[\frac{\cos^3b}{3}\right] = \frac{1}{3} - \frac{1}{3} \qquad \therefore -\left[\frac{\cos^3b}{3}\right] = 0 \qquad \therefore \cos^3b = 0$$

$$\cos b = 0 \qquad \therefore b = \frac{\pi}{2}$$

إذا كان: $\int_{-2}^{b} f(x)dx = 5 \quad , \quad \int_{b}^{-2}(f(x)-2)dx = 7$

فأوجد قيمة b

الحل:

$\int_{b}^{-2}(f(x)-2)dx = 7$ بتوزيع التكامل

$\therefore \int_{b}^{-2} f(x)\, dx - \int_{b}^{-2} 2\, dx = 7$

$-\int_{-2}^{b} f(x)dx - [2x]_{b}^{-2} = 7$

$-5 - \left[[2(-2)] - [2b]\right] = 7$

$\therefore -5 + (4-2b) = 7 \qquad \therefore 2b - 1 = 7$

$\therefore 2b = 8 \qquad \therefore b = 4$

مع تمنياتي لكم بالنجاح والتوفيق