3 / ث
ف 2

سلسلة التفوق

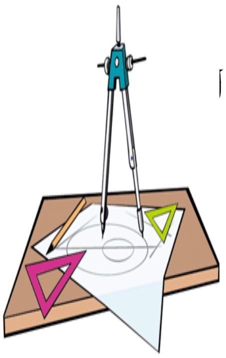
3 / ث
ف 2

في الرياضيات

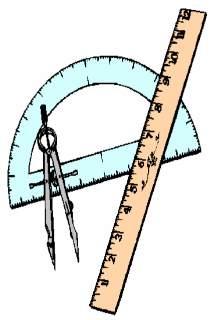
ريض 366

الوحدة الأولى

الاشتقاق



إعداد : أ. عابدين حامد فوْا



اسم الطـــــالب : ....

ملحوظة : هذه المذكرة ليست بديلاً عن الكتاب المدرسي (الكتاب هو المرجع)

نسألكم الدعاء ، مع تمنياتي للجميع بالنجاح و التفوق

بطاقة (1) ريض 366

قـواعـد الاشـتـقـاق

ريض 366

- قاعدة مشتقة القوة : $f(x) = x^n \Rightarrow f'(x) = n\,x^{n-1}$ ، n عدد حقيقي
- نتـائـج هـامة :

$f(x) = x$
$f'(x) = 1$

❶ $f(x) = c\,x^n \Rightarrow f'(x) = c\,n\,x^{n-1}$ ، حيث c ثابت

❷ $f(x) = c \Rightarrow f'(x) = 0$ ، حيث c ثابت

❸ $f(x) = cx \Rightarrow f'(x) = c$ ، حيث c ثابت

- مشتقة المجموع والفرق: $f(x) = h(x) \pm g(x) \Rightarrow f'(x) = h'(x) \pm g'(x)$

- قاعدة مشتقة ضرب دالتين : $\frac{d}{dx}[f(x)\cdot g(x)] = f(x)\cdot g'(x) + g(x)\cdot f'(x)$

مشتقة ضرب دالتين = الدالة الأولى × مشتقة الدالة الثانية + الدالة الثانية × مشتقة الدالة الأولى

- مشتقة قسمة دالتين : $\frac{d}{dx}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{g(x)\cdot f'(x) - f(x)\cdot g'(x)}{[g(x)]^2}$

مشتقة قسمة دالتين = $\frac{\text{المقام × مشتقة البسط − البسط × مشتقة المقام}}{\text{مربع المقام}}$

مشتقة الجذر التربيعي

$\frac{dy}{dx} = \frac{\text{مشتقة ما تحت الجذر}}{\text{ضعف الجذر}}$

$y = \sqrt{\Delta} \Rightarrow$

$\frac{dy}{dx} = \frac{\text{مشتقة } \Delta}{2\sqrt{\Delta}}$

- قاعدة مشتقة القوس المرفوع لأس :

$y = [\,f(x)\,]^n \,, n \in R \Rightarrow \frac{dy}{dx} = n\cdot[\,f(x)\,]^{n-1}\cdot f'(x)$

- مشتقة دالة الدالة (مشتقة الدالة المركبة) : $[f \circ g]'(x) = f'[g(x)]\cdot g'(x)$
- أي أن : $y = [f \circ g](x) = f[g(x)] \Rightarrow \frac{dy}{dx} = f'[g(x)]\cdot g'(x)$
- تعميم : $y = [f \circ g \circ h](x) \Rightarrow \frac{dy}{dx} = f'[g(h(x))]\cdot g'[h(x)]\cdot h'(x)$

- قاعدة السلسلة : $y = f(z)\,,\; z = g(x) \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz}\cdot\frac{dz}{dx}$
- تعميم: $y = f(z)\,,\; z = g(u)\,,\; u = h(x) \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz}\cdot\frac{dz}{du}\cdot\frac{du}{dx}$

- قاعدة الاشتقاق الضمني : $f(x,y) = 0 \Rightarrow \frac{d}{dx}(y^n) = n\cdot y^{n-1}\cdot\frac{dy}{dx}$

- تذكر أن :

❶ $\frac{\text{عدد}}{x^n} = \text{العدد}\cdot x^{-n}$ ❷ $\frac{x^n}{\text{عدد}} = \frac{1}{\text{العدد}}\cdot x^n$ ❸ $\sqrt[n]{x^m} = (x)^{\frac{m}{n}}$

❹ $x^n\cdot x^m = (x)^{n+m}$ ❺ $\frac{x^n}{x^m} = (x)^{n-m}$ ❻ $(x^n)^m = x^{n\cdot m}$

تابع : قواعد الاشتقاق

مشتقة القوس المرفوع لأس : $y = [\,f(x)\,]^n \quad , n \in R \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = n \cdot [\,f(x)\,]^{n-1} \cdot f'(x)$

فكرة الحل : ① تعديل السؤال (إن لزم) . ② الاشتقاق . ③ التعويض (إن لزم الأمر) .

❶ إذا كان : $y = (x^3 + 7x)^9$ ، فأوجد $\frac{dy}{dx}$

❷ إذا كان : $y = \frac{3}{(2x^2-1)^5}$ ، فأوجد $\frac{dy}{dx}$

❸ أوجد : $\frac{d}{dx}\left(\sqrt[3]{x^2} + 4\right)$

❹ إذا كان : $z = \sqrt{u^2 - 5}$ ، فأوجد $\frac{dz}{du}$

❺ إذا كانت : $y = \left(\frac{2x}{x+3}\right)^4$

، فأثبت أن : $\frac{dy}{dx} = \frac{192x^3}{(x+3)^5}$

❻ إذا كانت : $y = \left(\frac{x}{x+1}\right)^8$

، فأوجد قيمة $\frac{dy}{dx}$ عند $x = 1$

بصيغة أخرى $\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=1}$

تابع : بطاقة (1) ريض 366

تابع : قواعد الاشتقاق

❼ إذا كانت : $y = \frac{1}{(x^3 - 3x^2)^3}$

فأوجد : $\frac{dy}{dx}$ عند $x = 1$

❽ إذا كانت : $y = \sqrt[3]{(x^2+3)^2}$

فأوجد : $\frac{dy}{dx}$ عند $x = \sqrt{5}$

❾ إذا كانت : $y = (2x+7)^5(4x-1)^3$ ، فأوجد : $\frac{dy}{dx}$

مشتقة ضرب يحوي أقواس

❿ إذا كانت : $y = (1 - 2x + x^2)^8$ ، فأثبت أن : $\frac{dy}{dx}(1-x) + 16y = 0$

⓫ إذا كان : $y = (3x^2-2)^3(5x-7)$ ، فأوجد $\frac{dy}{dx}$ عند النقطة $(1, -2)$. ج : -31

تابع : بطاقة (1) ريض 366

مشتقة دالة الدالة (الدالة المركبة)

شرط تركيب دالتين : التركيب $[f \circ g](x)$ يمثل دالة إذا كان مدى g مجموعة جزئية من مجال f

وبالرموز : مجال f $\subseteq$ مدى g [**أي أن** : مجال الدالة الثانية f $\subseteq$ مدى الدالة الأولى g]

$[f \circ g](x)$ تقرأ f بعد g

- **مشتقة دالة الدالة (الدالة المركبة)** : $[f \circ g]'(x) = f'[g(x)] \cdot g'(x)$
- أي أن : $y = [f \circ g](x) = f[g(x)] \Rightarrow \frac{dy}{dx} = f'[g(x)] \cdot g'(x)$

❶ إذا كان : $f(x) = 3x + 1$ ، $g(x) = |x|$ ، فهل $[f \circ g](x)$ ، يُمثّل دالة ؟

❷ إذا كان : $f(x) = x^2 - 1$ ، $g(x) = \sqrt{x}$ ، فهل $[g \circ f](x)$ ، يُمثّل دالة ؟

❸ إذا كانت : $g(x) = x^4 + 8$, $f(x) = \sqrt{x+1}$ ، فأوجد قيمة $[f \circ g]'(2)$

الحل :

حل آخر :

❹ إذا كانت : $f(x) = \sqrt[3]{x}$ ، $g(x) = x^3$ ، فأوجد $[f \circ g]'(20)$ الجواب : 1

تابع : مشتقة دالة الدالة (الدالة المركبة)

فكرة الحل : ① إيجاد المشتقات ② كتابة القانون والتعويض بالمشتقات ③ التعويض بالقيمة المعطاة

❺ إذا كانت : $g(x) = \sqrt[3]{x}$ ، $f(x) = 10x + 3$ ، فأوجد قيمة : $[f \circ g]'(2\sqrt{2})$

❻ إذا كانت : $f(x) = x^2 + 5x$ ، $g'(x) = \sqrt{3x + 7}$ ، فأوجد قيمة : $[g \circ f]'(1)$

❼ إذا كانت : $h(x) = 2x$ ، $g'(x) = \sin x$ ، فأوجد قيمة : $[g \circ h]'\left(\frac{\pi}{6}\right)$

❽ إذا كانت : $h(x) = 3x$ ، $g'(x) = \sec^2 x$ ، فأوجد قيمة : $[g \circ h]'\left(\frac{\pi}{3}\right)$

تابع : بطاقة (1) ريض 366

تابـع : المشتقة باستعمال قاعدة السلسلة

تُكتب من المطلوب

قاعدة السلسلة (التسلسل) : $y = f(z)\ ,\ z = g(x) \ \Rightarrow\ \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz}\cdot\frac{dz}{dx}$

❶ إذا كانت : $\frac{dz}{dy} = 3y^2 - 2$ ، $y = x^2$

، فأوجد : $\frac{dz}{dx}$ عند $x = 1$

❷ إذا كانت : $y = z^5$ ، $z = x + \frac{1}{x}$

، فأوجد : $\frac{dy}{dx}$ عند $x = 1$

❸ إذا كان : $z = 3x^2 - 4$ ، $y = \frac{3}{z+1}$

، فأوجد $\frac{dy}{dx}$ عندما $x = -2$

❹ إذا كانت : $z = x^3 - 1$

، $y = z^2 - 7z + 3$

، فأثبت أن : $\frac{dy}{dx} + 9\frac{dz}{dx} - 6x^5 = 0$

تابع : المشتقة باستعمال قاعدة السلسلة

فكرة الحل : ① إيجاد المشتقات ② قاعدة السلسلة والتعويض ③ توحيد الرموز (حذف الرابط)

❺ إذا كانت : $y = z^2 + 4z$

، $z = 4x^3 - 2$

، فأي مقدار مما يأتي يساوي $\frac{dx}{dy}$ ؟

A $\frac{2x}{3}$

B $\frac{1}{96x^5}$

C $\frac{3}{2x}$

D $96x^5$

❻ إذا كان : $y = (z+1)^2$ ، $x = \frac{1-z}{1+z}$

، فبيّن أن : $\frac{dy}{dx} = -8$ عندما $x = 0$

❼ إذا كانت : $\frac{dy}{dz} = \sqrt{z}$ ، $z = x^4$

، فأي مقدار مما يأتي يساوي $\frac{dy}{dx}$ ؟

A $\frac{1}{4x}$

B $\frac{1}{2x^2}$

C $2x$

D $4x^5$

❽ إذا كان : $\frac{dy}{dz} = 8$ ، $\frac{dx}{dy} = \frac{-2}{y}$

، فأي مقدار مما يأتي يساوي $\frac{dz}{dx}$ ؟

A -16

B $-\frac{y}{16}$

C $\frac{16}{y}$

D $-\frac{16}{y}$

❾ إذا كانت : $\frac{dz}{dx} = 10$ ، $z = \sqrt{y} + 1$ ، فما قيمة $\frac{dy}{dx}$ عند $y = 1$ ؟

A 5 B 10 C 20 D 25

تابع : بطاقة (1) ريض 366

الاشتقاق الضمني ⇐ (قيمة المشتقة)

الدالة الضمنية : على الصورة $f(x,y)=0$ وهي علاقة ضمنية تربط بين المتغيرين x, y ، وفي بعض الأحيان يمكن تحويلها إلى صريحة ، ولكن في أغلب الأحيان يتعذر ذلك .

$$\frac{d}{dx}(y^n)=n\cdot y^{n-1}\cdot\frac{dy}{dx}$$

$$\frac{d}{dx}(x\,y)=x\cdot\frac{dy}{dx}+y$$

❶ إذا كانت : $y^2+3x^2y=10$

، فأوجد $\frac{dy}{dx}$ عند النقطة $(1,2)$

❷ إذا كانت : $x^2-5xy-y^2=7$

، فأوجد $\frac{dy}{dx}$ عند النقطة $(1,-2)$

❸ إذا كانت : $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=2$

، فأوجد $\frac{dx}{dy}$ عند النقطة $(1,1)$

❹ إذا كانت : $\sqrt{x}+\sqrt{y}=4$

، فأوجد $\frac{dy}{dx}$ عند النقطة $(1,9)$

تابع : بطاقة (1) ريض 366

الاشتقاق الضمني ⇐ (مسائل الإثبات)

عند حل مسائل الإثبات : ① نوجد المشتقة في أبسط صورة . ② بالتعويض بالمشتقة ، والأصل (إن لزم) .

❺ إذا كانت : $y^2 - 3x^2 + 2x = 0$

فأثبت أن : $y^2\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - (3x-1)^2 = 0$

❻ إذا كانت : $x^2\, y^2 - x^2 = 5$

، فأثبت أن : $x^3\, y\, \frac{dy}{dx} + 5 = 0$

❽ إذا كانت : $y^2 = ax^2 - a^2$

، حيث a عدد ثابت ، فأثبت أن :

$$\frac{y^2}{x^2}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - x\,y\left(\frac{dy}{dx}\right) + y^2 = 0$$

❾ إذا كانت : $4y = (x^2 - a)^2$

، حيث a عدد حقيقي ، فأثبت أن :

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - 4x^2y = 0$$

الاشتقاق الضمني ⇐ (مسائل الإثبات)

تابع : تمارين على الاشتقاق الضمني

❿ إذا كان : $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{9} = 1$

فأثبت أن : $\frac{dy}{dx} = \frac{9x}{25y}$

ملحوظة
العدد المضروب فيه أو المقسوم عليه يبقى كما هو عند الاشتقاق

⓫ إذا كانت : $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ، حيث a , b ثوابت حقيقية ، فأثبت أن : $\frac{dy}{dx} = -\frac{b^2 x}{a^2 y}$

⓬ إذا كانت : $(y+1)^3 = (x-2)^2$

، فأثبت أن : $(\frac{3}{2} \cdot \frac{dy}{dx})^2 = \frac{1}{y+1}$

⓭ إذا كانت : $(y+2)^3 = (5x-3)^2$

فأثبت أن : $9\,(y+2)\,(\frac{dy}{dx})^2 = 100$

الاشتقاق الضمني ⇐ (إيجاد النقاط)

⑭ أوجد النقاط الواقعة على المنحنى : $x^2 + y^2 = 10$ ، والتي عندها $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{3}$

الجواب : $(1, -3) , (-1, 3)$

⑮ إذا كانت : $3x^2 - y^2 + xy = 4$ ، فأوجد النقاط التي يكون عندها : $\frac{dy}{dx} = \frac{8}{3}$

الجواب : $(2, 4) , (-2, -4)$

⑯ إذا كانت : $f(x^3 + 1) = 12x$ ، فأوجد قيمة : $f'(9)$

مشتقة الدالة المركبة

الحل : باشتقاق الطرفين بالنسبة لـ x

$x^3 + 1 = 9$

$\Rightarrow \ x^3 = 8$

$\Rightarrow \ x = 2$

$f'(x^3 + 1) \cdot 3x^2 = 12$

$f'(x^3 + 1) = \frac{12}{3\,x^2} = \frac{4}{x^2}$

$\Rightarrow \ f'(9) = \frac{4}{(2)^2} = 1$

⑰ إذا كانت : $k(x) = f(x^2 + 3)$ ، $f'(19) = 2$ ، فما قيمة $k'(4)$ ؟

A 16

B 12

C 8

D 4

⑱ إذا كانت g دالة ، a ثابتاً ، وكانت $y = g^2(a\,x)$ ، فإن $\frac{d\,y}{d\,x}$ تساوي :

A $2a^2$

B $2\,g(a\,x)$

C $2\,g'(a\,x)$

D $2a\ g(a\,x)\ g'(a\,x)$

$y = [\,g(a\,x)\,]^2$

$\frac{d\,y}{d\,x} = 2\,g(a\,x) \cdot g'(a\,x) \cdot a$

اختبر نفسك – تمارين متنوعة

❶ إذا كان k , m ثوابت ، وكان $f(x) = kx$ فإن $f'(2m^3)$ تساوي :

A 0

B 1

C k

D $6\,m^2$

❷ إذا كانت : $f(x) = \frac{5+ ax^2}{2}$ ، فما قيمة العدد الحقيقي a ، علماً بأن $f'(1) = 3$

A 2

B 3

C 4

D 5

❸ إذا كانت : $f(x) = x^a - 16\,ax$ ، $f'(2) = 0$ ، a عدد حقيقي $\neq$ صفراً ، فما قيمة a ؟

A 3

B 4

C 5

D 6

❹ إذا كان : $\frac{dy}{dx} = 8\sqrt{x}$ ، $\frac{dz}{dx} = \frac{-2}{x\sqrt{x}}$ ، فأي مقدار مما يأتي يساوي $\frac{dy}{dz}$ ؟

A -16

B $-4\,x$

C $-4\,x^2$

D $\frac{-16}{x}$

❺ إذا كان : $f(1) = 1 \;,\; f'(6) = 12$

$g(1) = 6 \;,\; g'(1) = 5$

، فأوجد قيمة $(f \circ g)'(1)$ الجواب : 60

❻ إذا كان : $f(2) = 6 \;,\; f'(2) = 3$

$g(2) = 5 \;,\; g'(2) = 4$

، فأوجد قيمة $(f \cdot g)'(2)$ الجواب : 39

اختبر نفسك – تمارين متنوعة

تمارين متنوعة على ما سبق

❶ إذا كانت : $f(x) = (x-1)^4\,(x+1)^6$ ، فأوجد قيمة $f'(-1)$.

الجواب : 0

فكرة الحل: مشتقة ضرب دالتين ، حيث أن كل دالة عبارة عن قوس مرفوع لأس .

$$f'(x) = 2(x-1)^3(x+1)^5(5x-1)$$

❷ إذا كانت : $x^2 - 2xy + y^2 = 16$ ، فأوجد $\frac{dy}{dx}$ عند النقطة $(-1, 3)$.

ج : 1

فكرة الحل: اشتقاق ضمني ثم التعويض

$$2x - 2x\frac{dy}{dx} - 2y + 2y\frac{dy}{dx} = 0$$

❸ إذا كانت : $y = x^2$ ، $x = \frac{4u}{2u+1}$ ، فأوجد $\frac{dy}{du}$ عندما $u = -1$.

ج : 32

فكرة الحل: بقاعدة السلسلة $\frac{dy}{du} = \frac{dy}{dx}\cdot\frac{dx}{du}$

❹ إذا كانت : $\frac{x}{y} - 4y = x$ ، فأوجد $\frac{dy}{dx}$.

ج : $\frac{dy}{dx} = \frac{y-y^2}{x+4y^2}$

فكرة الحل: بالاشتقاق الضمني بالنسبة لـ x

❺ إذا كانت : $\sqrt{x\,y^2 + y\,x^2} = 1$ ، فأوجد $\frac{dy}{dx}$.

الجواب : $\frac{dy}{dx} = \frac{-2xy-y^2}{2xy+x^2}$

بتربيع الطرفين ثم اشتقاق الطرفين بالنسبة لـ x
أو بالاشتقاق الضمني مباشرة بالنسبة لـ x

❻ إذا كانت : $f(\sqrt{x}\,) = x^2$ ، فأوجد قيمة : $f'(2)$

[الجواب : 32]

فكرة الحل: باشتقاق الطرفين بالنسبة لـ x ، ثم نوجد قيمة x ، ثم نعوض بها في الاشتقاق

❼ إذا كان : $x^2 + 2y^2 + 4x - 12y + 11 = 0$ ، فأوجد النقاط التي عندها $\frac{dy}{dx} = -\frac{3}{2}$

فكرة الحل: بالاشتقاق ضمنياً بالنسبة لـ x : $\frac{dy}{dx} = \frac{x+2}{6-2y}$ $\Leftarrow$ $2x + 4y\frac{dy}{dx} + 4 - 12\frac{dy}{dx} = 0$

$x = 3y - 11 \Leftarrow 2x + 4 = -18 + 6y$ (بالضرب التبادلي) $\frac{x+2}{6-2y} = -\frac{3}{2}$

- بالتعويض في المعادلة الأصلية عن x ، ثم التبسيط فنحصل على قيم y $\Leftarrow$ $y = 4$, $y = 2$
- ثم بالتعويض بقيم y التي أوجدناها في المعادلة : $x = 3y - 11$ لنحصل على قيم x المناظرة
- النقاط المطلوبة $(1,4)\,,(-5,2)$ $\Leftarrow$ $y = 2 \Rightarrow x = -5$ ، $y = 4 \Rightarrow x = 1$

❽ **تحدّي** : إذا كانت $y = \sqrt{z}$ ، $z = 3 - 2u^2$ ، $u = 4x$ ، فأثبت : $y\frac{dy}{dx} + 8u = 0$

فكرة الحل: بقاعدة السلسلة (التسلسل الثلاثي) : $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz}\cdot\frac{dz}{du}\cdot\frac{du}{dx}$

إعداد أ./ عابدين

بطاقة (2) ريض 366

نهاية الدوال المثلثية

ريض 366

تحويل السؤال لصورة النظريات • توزيع البسط على المقام • توزيع النهاية على الناتج . • التحليل للبسط أو للمقام .	$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$	$\lim_{x \to 0} \frac{\tan x}{x} = 1$	$\lim_{x \to 0} \frac{1-\cos x}{x} = 0$
	$\lim_{\Delta \to 0} \frac{\sin \Delta}{\Delta} = 1$	$\lim_{\Delta \to 0} \frac{\tan \Delta}{\Delta} = 1$	$\lim_{\Delta \to 0} \frac{1-\cos \Delta}{\Delta} = 0$

❶ أوجد قيمة : $\lim_{x \to 0} \frac{3x + \tan 2x}{5x}$

❷ أوجد قيمة : $\lim_{x \to 0} \frac{\sin 16x + 8x^2}{4x}$

❸ أوجد قيمة : $\lim_{x \to 0} \frac{\tan 2x \cdot \sin 4x}{4x^2}$

❹ أوجد قيمة : $\lim_{x \to -1} \frac{x^4 \cdot \sin(x+1)}{x^2+x}$

❺ أثبت أن : $\lim_{x \to 0} \frac{\sin 2x - \cos x + 1}{x} = 2$

❻ أثبت أن : $\lim_{x \to 0} \frac{3x + 1 - \cos x}{5x} = \frac{3}{5}$

تابع : بطاقة (2) ريض 366

أ/. عابدين

تابع : نـهاية الدوال المثلثية

ملحوظة : إذا وُجد بالمقام دالة مثلثية فإننا نقسم كلاً من البسط والمقام على x أو x^2 أو ... حسب السؤال

❼ ما قيمة : $\lim_{x \to 0} \frac{2x^2 - \tan x}{\sin x}$ ؟

A 0

B $\frac{1}{2}$

C -1

D 2

❽ ما قيمة : $\lim_{x \to 0} \frac{2x + \sin^2 x}{x}$ ؟

A 0

B 2

C 3

D 10

❾ ما قيمة : $\lim_{x \to 0} \frac{2 - 2\cos^2 x}{x^2}$ ؟

A 0

B -1

C 1

D 2

❿ ما قيمة : $\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos 2x}{x^2}$ ؟

A 0

B 1

C 2

D ليس لها وجود

⓫ ما قيمة : $\lim_{x \to 5} \frac{\sin (x-5)}{2x-10}$

A 1

B -1

C 0.5

D -0.5

⓬ ما قيمة : $\lim_{x \to 0} \frac{3}{2x \cot 4x}$ ؟

A 2

B 3

C 5

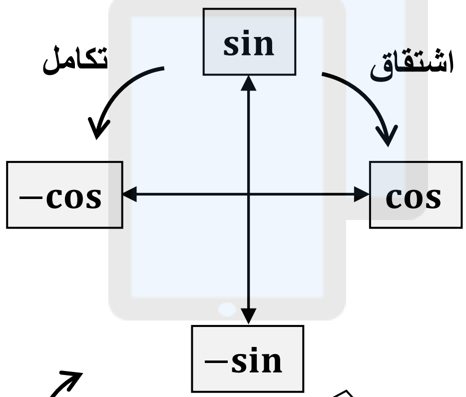
D 6

تابع : بطاقة (2) ريض 366

مشتقة الدوال المثلثية

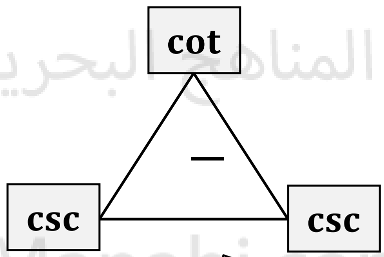
الدالة $f(x)$	المشتقة $f'(x)$	الدالة $f(x)$	المشتقة $f'(x)$
$\sin x$	$\cos x$	$\sin[g(x)]$	$\cos[g(x)]\cdot g'(x)$
$\cos x$	$-\sin x$	$\cos[g(x)]$	$-\sin[g(x)]\cdot g'(x)$
$\tan x$	$\sec^2 x$	$\tan[g(x)]$	$\sec^2[g(x)]\cdot g'(x)$
$\cot x$	$-\csc^2 x$	$\cot[g(x)]$	$-\csc^2[g(x)]\cdot g'(x)$
$\sec x$	$\sec x\ \tan x$	$\sec[g(x)]$	$\sec[g(x)]\ \tan[g(x)]\cdot g'(x)$
$\csc x$	$-\csc x\ \cot x$	$\csc[g(x)]$	$-\csc[g(x)]\ \cot[g(x)]\cdot g'(x)$

مشتقة الزاوية



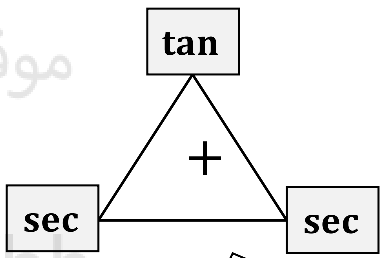
الاشتقاق ⇐ الدوران
مع دوران عقارب الساعة

التكامل ⇐ الدوران
ضد دوران عقارب الساعة



مشتقة أي رأس
= ضرب الرأسين الآخرين
(مع وضع الإشارة)

تكامل ضرب رأسيين
= الرأس الثالثة
(مع وضع الإشارة)
سيأتي فيما بعد



مشتقة أي رأس
= ضرب الرأسين الآخرين
(مع وضع الإشارة)

تكامل ضرب رأسيين
= الرأس الثالثة
(مع وضع الإشارة)
سيأتي فيما بعد

$$\sin^2 x+\cos^2 x=1 \qquad 1+\tan^2 x=\sec^2 x \qquad 1+\cot^2 x=\csc^2 x$$

$$\sin 2x = 2\sin x\ \cos x$$

وبالمثل

$$\sin 2\Delta = 2\sin\Delta\ \cos\Delta$$

$$\cos 2x=\cos^2 x-\sin^2 x = 2\cos^2 x-1 = 1-2\sin^2 x$$

$$\tan 2x=\frac{2\tan x}{1-\tan^2 x} \qquad \tan 2\Delta=\frac{2\tan\Delta}{1-\tan^2\Delta}$$

ملاحظات: ① $y=f[g(x)] \Rightarrow y=f'[g(x)]\cdot g'(x)$ (اشتقاق دالة تركيب)

② $y=\sin^n x=(\sin x)^n$ ثم اشتقاق قوس ③ عند الاشتقاق يجب مراعاة أن π مقدار ثابت .

③ إذا كان A , B زاويتين حادتين ومتتامتين فإن :

$\sin A=\cos B$ أو $\tan A=\cot B$ أو $\sec A=\csc B \Leftrightarrow A+B=\frac{\pi}{2}$

تابع : مشتقة الدوال المثلثية

ملاحظات وإرشادات عند اشتقاق الدوال المثلثية

❶ تعديل السؤال (إن أمكن) باستعمال المتطابقات المثلثية ، فإن ذلك يسهل عملية الاشتقاق .

❷ تحديد نوع الاشتقاق المُتّبع في الحل . ❸ لا تنسى الضرب في مشتقة الزاوية .

❹ اشتقاق الدوال المثلثية المرفوعة لأس يمر بثلاث خطوات متتالية : ⇐ مشتقة القوس ، مشتقة الدالة المثلثية ، مشتقة الزاوية

❺ عند الاشتقاق يجب مراعاة أن π مقدار ثابت (وقيمته بالراديان) .

❻ عند التعويض عن π : ⇐
- π بدون دالة مثلثية تبقى كما هي π في الحل ، أو عوض عنها بـ 3.14
- π موجودة في دالة مثلثية اكتبها π ، وعند استعمال الحاسبة اكتبها 180°

تمارين على مشتقة الدوال المثلثية

❶ إذا كانت : $f(x) = \tan x$

، فأثبت أن : $f'(x) = \sec^2 x$

الحل: (قسمة) $f(x) = \tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$

$$f'(x) = \frac{(\cos x)\cdot(\cos x) - (\sin x)\cdot(-\sin x)}{(\cos x)^2}$$

$$f'(x) = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x$$

❷ إذا كانت : $f(x) = \sec x$

، فأثبت أن : $f'(x) = \sec x \tan x$

ملاحظة : يمكن إثبات اشتقاق باقي الدوال المثلثية بكتابة كل منها بدلالة $\sin$ ، $\cos$ ، ثم مشتقة القسمة .

❸ إذا كانت : $f(x) = \cot\sqrt{x}$

، فأوجد قيمة $f'\left(\dfrac{\pi^2}{4}\right)$

الحل: $f'(x) = -\csc^2\left(\sqrt{x}\right)\cdot\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

(بالتعويض) $f'(x) = \dfrac{-\csc^2\left(\sqrt{x}\right)}{2\sqrt{x}}$

$$f'\left(\frac{\pi^2}{4}\right) = \frac{-\csc^2\left(\sqrt{\frac{\pi^2}{4}}\right)}{2\sqrt{\frac{\pi^2}{4}}} = \frac{-\left(\csc\frac{\pi}{2}\right)^2}{2\times\frac{\pi}{2}} = \frac{-1}{\pi}$$

❹ أوجد $\dfrac{dy}{dx}$ ، إذا علمت أن :

$$y = (\cot x - \csc x)^5(\cot x + \csc x)^5$$

الجواب : 0

مشتقة الدوال المثلثية

تدريب : أوجد مشتقة كل من الدوال الآتية (وفي حالة إعطاء قيمة للمتغير فأوجدها عند هذه القيمة) :

❶ $y = (\cos^2 x + \sin^2 x)^{20}$

❷ $f(\theta) = \sec 5\theta \ \cos 5\theta$

❸ $f(x) = \cos(4x^2 - \pi)$

❹ $y = \sin^2(3x)$

❺ $f(x) = \cos 6x \csc 6x$ عند $x = \frac{\pi}{12}$

❻ $y = \sqrt{\tan\frac{\pi}{4} \ \sec\frac{x}{3}}$ عند $x = \pi$

❼ $f(x) = \sin\left(\frac{\pi}{x}\right)$ عندما $x = 1$

❽ $f(\theta) = \frac{1}{\cot 4\theta}$ عندما $\theta = \frac{\pi}{16}$

تابع : مشتقة الدوال المثلثية

تمارين على مشتقة الدوال المثلثية (قوس بأس مع دوال مثلثية)

❶ إذا كان : $y = \sin^4 x - \cos^4 x$

، فأثبت أن : $\frac{dy}{dx} = 2\sin 2x$

❷ إذا كان : $f(x) = \sin x - \frac{1}{3}\sin^3 x$

، فأثبت أن : $f'(x) = \cos^3 x$

❸ إذا كانت : $f(x) = \sec^4(3x)$

، فأوجد قيمة : $f'\left(\frac{\pi}{12}\right)$

❹ إذا كانت : $y = \sqrt{1 + \cos 2x}$

، فأوجد : $\frac{dy}{dx}$ عندما $x = \frac{\pi}{4}$

❺ إذا كانت : $f(x) = \cot^3 x^2$

، فأوجد $f'(x)$ عندما $x = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$

الجواب
$-6\sqrt{\pi}$

❻ إذا كانت : $y = (\cos 2x + \sin 2x)^2$

، فأوجد $\frac{dy}{dx}$ عندما $x = \frac{3\pi}{2}$

ج : 4

تابع : بطاقة (2) ريض 366

تابع : مشتقة الدوال المثلثية

تمارين على مشتقة الدوال المثلثية (مع استعمال مشتقة الضرب وقسمة)

❶ إذا كانت : $f(x) = 4x\cos x$

، فأوجد : $f'(x)$ عندما $x = \pi$

❷ إذا كانت : $y = x\tan x^2$

، فأوجد : $\frac{dy}{dx}$ عندما $x = \sqrt{\pi}$

❸ إذا كانت : $x - xy = \sin y + 2$

، فأوجد قيمة $\frac{dy}{dx}$ عند النقطة $(2,0)$

❹ إذا كانت : $y = \frac{\sin x}{\sin x + \cos x}$

، فأثبت أن : $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{1 + \sin 2x}$

❺ إذا كانت : $y = x\tan^2 2x$

، فأوجد : $\frac{dy}{dx}$ عندما $x = \frac{\pi}{2}$

الجواب
0

اشتقاق ضرب دالتين ، ثم التعويض

❻ إذا كانت : $f(x) = \frac{\sec 3x}{x+1}$

، فأوجد $f'(x)$ عند $x = 0$

الجواب
-1

اشتقاق قسمة دالتين ، ثم التعويض مباشرة

تابع : بطاقة (2) ريض 366

مشتقة الدوال المثلثية والتركيب

تمارين على مشتقة الدوال المثلثية (مع استعمال مشتقة التركيب)

❶ إذا كانت : $f(x) = \sin 4x$ ، $g'(x) = x^3$

فأوجد : $[g \circ f]'\left(\frac{\pi}{16}\right)$

❷ إذا كانت : $f(x) = \sec x$ ، $g(x) = x^2 - \frac{\pi}{4}$

فأوجد : $[f \circ g]'(\sqrt{\pi})$

❸ إذا كانت : $f(x) = \sin^2 x$ ، $g(x) = \sqrt{x}$ ، فأوجد : $[f \circ g]'\left(\frac{\pi^2}{4}\right)$

❹ إذا كانت : $f(x) = x^2 + \sin x^2$ ، $g(x) = 4x$ ، فأوجد : $[f \circ g]'(0)$

مشتقة الدوال المثلثية (قاعدة التسلسل)

تمارين على مشتقة الدوال المثلثية (مع استعمال قاعدة السلسلة)

❶ إذا كانت : $\frac{dx}{dt} = \frac{1}{3}$, $y = \tan\frac{x}{4}$

فأوجد : $\frac{dy}{dt}$ عندما $x = \pi$

❷ أوجد قيمة $\frac{ds}{dx}$ عند $\theta = \frac{3\pi}{2}$ ، حيث أن :

$t = \frac{x}{5}$, $\frac{d\theta}{dt} = 25$, $s = \cos\theta$

❸ إذا كانت : $y = \csc^2 x$, $z = y^3$

فأوجد : $\frac{dz}{dx}$ عندما $x = \frac{\pi}{4}$

❹ إذا كانت : $y = \sin 6x$, $w = \frac{1}{\sqrt{y}}$

فأوجد : $\frac{dw}{dx}$ عندما $x = \frac{\pi}{12}$

❺ إذا كانت : $y = \sec 4x$, $z = y^4$ ، فأوجد $\frac{dz}{dx}$ عندما $x = \frac{\pi}{4}$

الجواب : 0

اختبر نفسك – تمارين متنوعة

❶ لأي من الدوال الآتية تكون :

$$\lim_{x \to 0} f(x) = 0$$

A $f(x) = \frac{\sin x}{x}$

B $f(x) = \frac{x}{\sin x}$

C $f(x) = \frac{x}{\tan x}$

D $f(x) = \frac{1-\cos x}{x}$

❷ إذا كان $f'(x) = \frac{1}{x^2+1}$ ، $h(x) = \tan x$

، فما قيمة $[f \circ h]'\left(\frac{\pi}{3}\right)$ ؟

A 0

B 1

C 2

D 3

❸ إذا كانت : $y = \frac{2\tan x}{1-\tan^2 x}$

فإن $\frac{dy}{dx}$ عند $x = \frac{\pi}{6}$ تساوي :

A 4

B -4

C 8

D -8

❹ ما قيمة الثابت k التي تجعل $g'\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0$

، حيث أن : $g(x) = \cot x + kx$

A 2

B $\sqrt{2}$

C $-\sqrt{2}$

D -2

❺ أوجد قيمة $f'\left(\frac{\pi}{3}\right)$ ، إذا كانت :

$$f(x) = \cos^2 x + \sin^3 x \csc x$$

A -1

B 0

C 1

D 5

❻ أوجد قيمة $f'(5)$ إذا كانت :

$$f(x) = x\sec\left(\frac{\pi}{3}\right) + 14\sec x \cos x$$

A 16

B -7

C 2

D 24

بطاقة (3) ريض 366

المُشتقات العُليا

يرمز للمشتقة الثانية بالرمز : y'' أو $\frac{d^2y}{d\,x^2}$ أو $y^{(2)}$ أو $f''(x)$ أو $f^{(2)}(x)$ أو $\frac{d^2}{d\,x^2}(f(x))$

يرمز للمشتقة الثالثة بالرمز : y''' أو $\frac{d^3y}{d\,x^3}$ أو $y^{(3)}$ أو $f'''(x)$ أو $f^{(3)}(x)$ أو $\frac{d^3}{d\,x^3}[f(x)]$

وبصورة عامة: يرمز للمشتقة النونية : $y^{(n)}$ أو $\frac{d^ny}{d\,x^n}$ أو $f^{(n)}(x)$ (بدءاً من الرابعة تُكتب بالعدد)

تمارين على المشتقات العُليا (الدوال الصريحة)

❶ إذا كانت : $L(x) = n\,(2x-3)^4$

حيث n عدد حقيقي ، فأوجد قيمة n علماً بأن

المشتقة الثالثة تساوي 24 عند $x = 2$

❷ أوجد قيمة m إذا كانت :

$f(x) = (x^3-2)(mx+3)\ ,\ m \in R$

، علماً بأن : $f'''(1) = 66$

❸ إذا كانت : $y = ax^3 + bx^2$ ، وكانت : $\frac{d^3y}{d\,x^3} = 12$ ، $\left(\frac{d^2y}{d\,x^2}\right)_{x=1} = 6$

، فأوجد قيمة كلاً من الثابتين $a\,,b$.

$a = 2$
$b = -3$

ريض 366

تابع : بطاقة (3) ريض 366

المُشتقات العُليا و الدوال الصريحة

أ./ عابدين

① نوجد المشتقة الأولى . ② ثم نوجد المشتقة الثانية ..... وهكذا ③ بالتعويض في المطلوب

❹ إذا كان : $y = \cos 3x + \sin \frac{\pi}{4}$ ، وكان $y^{(4)} = b \cos 3x$ ، فما قيمة الثابت b ؟

❺ إذا كانت : $y = \sin ax$ ، حيث $a > 0$ وكان $\frac{d^2y}{d\,x^2} = -16y$ ، فما قيمة الثابت a ؟

❻ إذا كانت : $y = \sin 3x + \cos 3x$

، فأوجد قيمة $\frac{d^2y}{d\,x^2}$ عندما $x = \frac{\pi}{3}$

❼ إذا كانت $y = \frac{x^2}{2} - \frac{k}{x^2}$ ، فما قيمة الثابت k التي تجعل $\frac{d^2y}{d\,x^2} = 0$ عند $x = -2$

❽ إذا كانت : $y = \sin x + \csc \frac{\pi}{6}$ ، فأوجد قيمة : $\frac{d^{103}y}{d\,x^{103}} + \frac{d^2y}{d\,x^2} + \frac{dy}{dx} + y$

أ./ عابدين

ريض 366

الـمُشـتـقـات الـعُـلـيا و الدوال الصريحة

تابع : تمارين على المشتقات العُليا والدوال الصريحة

❶ إذا كانت : $y = \cos 3x$

، فأثبت أن : $\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - y\,\frac{d^2y}{d\,x^2} = 9$

❷ إذا كانت : $y = x \sin x$

، فأثبت أن : $\frac{d^2y}{d\,x^2} + y - 2\cos x = 0$

❸ إذا كانت : $y = x \tan x$

، فأثبت أن : $\frac{d^2y}{d\,x^2} = 2(1 + y)\sec^2 x$

❹ إذا كانت : $y = \sec 2x$

، فأثبت أن : $\frac{d^2y}{d\,x^2} + 4y = 8\,y^3$

❺ إذا كان : $h(x) = \cos ax - \sin ax$ ، $a \in R$ ، فأثبت $h''(x) + a^2 h(x) = 0$

المشتقات العُليا و الدوال الضمنية

① الاشتقاق الأول ضمنياً . ② الاشتقاق الثاني ضمنياً . ③ التعديل والاختصار مع إجراء رياضي بسيط .

ملاحظة : قد نحتاج إلى التعويض من رأس السؤال أو من المشتقة الأولى في المشتقة الثانية .

❶ إذا كانت : $y^2 + 2x^3 - 5x = 12$

أثبت أن : $y\,\frac{d^2y}{dx^2} + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 6x = 0$

❷ إذا كانت : $xy - 3y = 7x + 15$

أثبت أن : $(x-3)\,\frac{d^2y}{dx^2} + 2\,\frac{dy}{dx} = 0$

❸ إذا كانت : $x^2 + xy = 12$

، فأوجد قيمة : $x\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right) + 2\left(\frac{dy}{dx}\right)$

❹ إذا كانت : $3x^2 - 4y^2 = 1$ ، فأثبت أن

المقدار $y\,\frac{d^2y}{dx^2} + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2$ يساوي مقداراً ثابتاً

❺ إذا كانت : $\sin y + \cos x = 0$ ، فأثبت

$\frac{d^2y}{dx^2} - \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 \tan y - \cos x \sec y = 0$

❻ إذا كانت : $x^2 + y^2 = 4$ ، فأثبت أن

$1 + y\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right) + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 0$

المشتقات العُليا و الدوال الضمنية

أ./ عابدين

❼ إذا كانت : $x\,y = \cos 2x$

فأثبت أن : $x\left(\frac{d^2y}{dx^2} + 4y\right) + 2\frac{dy}{dx} = 0$ ،

❽ إذا كانت : $y^2 = x \sin x$ ، فأثبت أن :

$$2y\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right) + 2\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + y^2 = 2\cos x$$

❾ إذا كانت : $x^2 + 4\,y^2 = 1$

فأثبت أن : $\frac{d^2y}{d\,x^2} = \frac{-1}{16\,y^3}$ ،

نوجد y'
ونعوض بها
في y''

❿ إذا كانت : $x^2 + xy - 4 = 0$

فأوجد قيمة $\frac{d^2y}{d\,x^2}$ عند النقطة $(1, 3)$ ،

المشتقات العُليا (التركيب + السلسلة)

تمارين على المشتقات العُليا ومشتقة دالة التركيب والسلسلة

❶ إذا كان : $f(x) = \cos 4x$ ، $g(x) = x^2$ ، فأوجد قيمة : $[\,g\, o\, f\,]''(\frac{\pi}{16})$

❷ إذا كان : $f'(x) = \sin^2 x$ ، $g(x) = 2x$ ، فأوجد قيمة : $[\,f\, o\, g\,]''(\frac{\pi}{8})$

❸ إذا كان : $f'(x) = \sec x$ ، $g(x) = x^2$ ، فأوجد قيمة : $[\,f\, o\, g\,]''(\sqrt{\pi}\,)$

❹ إذا كانت : $y = \sin(3z)$ ، $z = x^2$ ، فأوجد قيمة : $\frac{d^2y}{d\,x^2}$ عندما $x = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$

اختبر نفسك – تمارين متنوعة

تمارين متنوعة على المشتقات العُليا

❶ إذا كانت : $f(x) = \frac{1}{2-x}$ ، وكانت $f'''(x) = a\,(2-x)^b$ ، فما قيمة الثوابت $a\,,b$ ؟

اشتقاق قوس
$a = 6$
$b = -4$

❷ إذا كانت : $f'(x) = \cos x^2$ ، $g(x) = 3x \sin\frac{\pi}{2}$ ، فأوجد : $[\,f\ o\ g\,]''(\frac{\sqrt{\pi}}{3})$

الجواب : 0

❸ إذا كانت : $y = 2x^2 + \cos\frac{\pi}{3}$ ، فإن $\frac{d^2y}{dx^2}$ عند النقطة $(0,\frac{1}{2})$ تساوي :

A 0

B 1

C 2

D 4

❹ إذا كانت : $y = \sin(2x + \frac{\pi}{2})$ ، فما قيمة $\frac{d^2y}{dx^2}$ عندما $x = 0$ ؟

A 0

B 4

C -4

D 6

❺ إذا كانت : $f(x) = \cot x$ فإن المشتقة الثانية $f''(x)$ تساوي :

A $2\csc x\ \cot x$

B $2\csc^2 x\ \cot x$

C $-2\csc x\ \cot x$

D $-2\csc^2 x\ \cot x$

❻ إذا كان a ثابتاً وكانت $y = \frac{1}{a}\,g(a\,x)$ فإن $\frac{d^2y}{d\,x^2}$ تساوي :

A $g''(ax)$

B $\frac{1}{a}\ g''(ax)$

C $a\ g''(ax)$

D $a^2\ g''(ax)$

❼ إذا كانت : $g(x) = (a+x)^3 + 4$ ، $g''(1) = -18$ ، فما قيمة الثابت a ؟

A -2 C -3

B -4 D -6

❽ إذا كانت : $x = \sin y$ ، فأثبت أن : $\frac{d^2y}{dx^2} = \tan y\ \sec^2 y$

فكرة الحل : بالاشتقاق الضمني مرتين ، ثم نوجد y' ونعوض بها في y''

3 / ث
ف 2

سلسلة التفوق

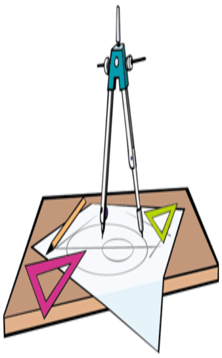
3 / ث
ف 2

في الرياضيات

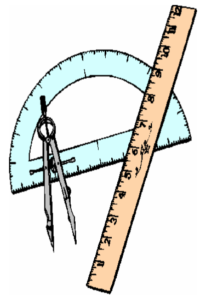
ريض 366

الوحدة الثانية

تطبيقات المشتقة



إعداد : أ. عابدين حامد فؤاد



اسم الطـــالب : ....

<u>ملحوظة</u> : هذه المذكرة ليست بديلاً عن الكتاب المدرسي (الكتاب هو المرجع)

نسألكم الدعاء ، مع تمنياتي للجميع بالنجاح والتفوق

إعداد أ./ عابدين

بطاقة (4) ريض 366

تطبيقات هندسية على المشتقة

ريض 366

إرشادات عند حل مسائل التطبيقات الهندسية

❶ ميل المستقيم المار بنقطتين : الميل $m = \frac{\text{فرق الصادات}}{\text{فرق السينات}} \Leftarrow$ $\boxed{m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}}$ $\boxed{0^\circ \le \theta < 180^\circ}$

❷ ميل المماس : $\boxed{m = \frac{dy}{dx} = \tan\theta}$ حيث θ الزاوية بين المماس والاتجاه الموجب لمحور x .

❸ (+) $m > 0 \Leftarrow$ المماس يصنع <u>زاوية حادة</u> مع محور السينات الموجب ، <u>وتكون الدالة متزايدة</u> .

❹ (-) $m < 0 \Leftarrow$ المماس يصنع <u>زاوية منفرجة</u> مع محور السينات الموجب <u>وتكون الدالة متناقصة</u>.

❺ $m = 0$ (ميل المماس = صفر) المماس يوازي محور السينات x (المماس أفقي) $\Leftarrow \theta = 0^\circ$

❻ $m = \frac{1}{0}$ (ميل المماس = غير مُعرَّف) المماس يوازي محور الصادات y (رأسي) $\Leftarrow \theta = 90^\circ$

❼ معادلة المستقيم الذي ميله = m ، و يمر بالنقطة (x_1 , y_1) هي :

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

❽ معادلة المستقيم بمعلومية ميل ومقطع هي :

(صيغة ميل – مقطع) $\boxed{y = mx + b}$ ، حيث m الميل و b مقطع محور y

❾ الصورة العامة لمعادلة الخط المستقيم هي : $ax + by + c = 0 \Leftarrow$ $\boxed{m = \frac{-\text{معامل } x}{\text{معامل } y} = \frac{-a}{b}}$

x , y في نفس الطرف (صفرية)

وأيضاً ممكن الحصول على ميل المستقيم
① بالاشتقاق بالنسبة لـ x .
② وضع المعادلة على صورة ميل ومقطع

❿ إذا كان m_1 , m_2 ميلي المستقيمين L_1 , L_2 فإن :

$L_1 // L_2 \Leftrightarrow m_1 = m_2$ (شرط التوازي)

$L_1 \perp L_2 \Leftrightarrow m_1 = -\frac{1}{m_2}$ (شرط التعامد)

⓫ النقطة التي تقع على المنحنى (أو تقع على المستقيم) تحقق معادلته .

⓬ لإيجاد نقطة التقاطع مع محور السينات x : نضع $y = 0$ في معادلة المنحنى ، ثم نوجد قيم x .

⓭ لإيجاد نقطة التقاطع مع محور الصادات y : نضع $x = 0$ في معادلة المنحنى ، ثم نوجد قيم y .

⓮ لإيجاد نقطة تقاطع منحنين نحل مُعادلتيهما معاً جبرياً (بالتعويض) .

معادلة المماس لمنحنى الدالة	معادلة العمودي على المنحنى
$\boxed{y - y_1 = m(x - x_1)}$ علماً بأن الميل : $m = \left(\frac{dy}{dx}\right)_{(x_1 , y_1)}$	$\boxed{y - y_1 = \frac{-1}{m}(x - x_1)}$ علماً بأن الميل : $m = \left(\frac{dy}{dx}\right)_{(x_1 , y_1)}$
المماس الأفقي ($m = 0$) : $\boxed{y = y_1}$	المماس الرأسي ($m = \frac{1}{0}$) : $\boxed{x = x_1}$

إيجاد ميـل المماس

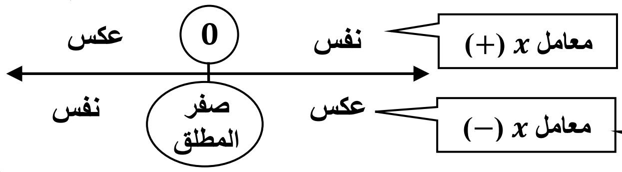
ميل المماس $m = f'(x) = \frac{dy}{dx}$

الدالة f متزايدة عند $f'(x) > 0$ ، ومتناقصة عند $f'(x) < 0$

ملاحظة : عند إيجاد مشتقة دالة تحتوي على مطلق ، فيجب إعادة تعريف الدالة بدون المطلق كالتالي :

$$|ax-b| = |b-ax| = \begin{cases} ax-b & , x \geq \frac{b}{a} \\ -ax+b & , x < \frac{b}{a} \end{cases}$$

ممكن نحوله إلى موجب بالإبدال



أوجد ميل المماس لمنحنى كل دالة عند قيمة x أو عند النقطة المعطاة :

❶ $y^2 = 10 - x^2$ عندما $(-1, 3)$

❷ $x\,y^3 = 2$ عندما $x = 2$

❸ $y = x\,|x-1|$ عندما $x = \frac{1}{2}$

❹ $y = 3|x+2| + x^2$ عند $x = -1$

تابع : إيجاد ميل المماس

تابع : تمارين على ميل المماس

❺ بيّن متى تكون الدالة f متزايدة ومتى تكون متناقصة : $f(x) = x^2 - 4x + 5$

الحل: المشتقة $m = f'(x) = 2x - 4$

الدالة متزايدة عندما : $f'(x) > 0$

$2x - 4 > 0 \quad \Rightarrow \quad x > 2$

الدالة متناقصة عندما : $f'(x) < 0$

$2x - 4 < 0 \quad \Rightarrow \quad x < 2$

متزايدة لكل $x > 2$ ، متناقصة لكل $x < 2$

❻ إذا كان : $h(x) = -2ax^3 + 4$ ، حيث $a \in R$ ، فإن h تكون متناقصة عندما :

A $a < -2$

B $a > -2$

C $a < 0$

D $a > 0$

ميل المماس سالباً
$m = h'(x) < 0$
$\Rightarrow -6ax^2 < 0$
بما أن x^2 دائماً موجبة
لذا فإن : $-6a < 0$
$\Rightarrow \ a > 0$

❼ إذا كانت معادلة المنحنى : $y = f(x)$ متزايدة في الفترة $[a, b]$ ، فإن ميل المماس للدالة عند أيّ نقطة تنتمي إلى هذه الفترة :

A سالب

B موجب

C 0

D غير مُعرّف

❽ إذا كانت : $y = |4 - 2x|$ فما قيمة $\frac{dy}{dx}$ عند النقطة $(3, 2)$ ؟

A 0

B 10

C 2

D -2

❾ إذا كانت f دالة بحيث :

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} < 0$$

لجميع قيم $x \in R$ فإن :

A الدالة f ثابتة .

B الدالة f متزايدة .

C الدالة f متناقصة .

❿ إذا كانت : $f(x) = x\,|4x + 8| + 9$ ، فما قيمة $f'(-3)$ ؟

الحل

$f(x) = x(-4x - 8) + 9$ (لماذا ؟)

$f(x) = -4x^2 - 8x + 9$

$f'(x) = -8x - 8$

$f'(-3) = -8(-3) - 8 = 16$

معادلة المماس + معادلة العمودي

- معادلة المماس : $y - y_1 = m\,(x - x_1)$
- معادلة العمودي : $y - y_1 = \frac{-1}{m}\,(x - x_1)$

النقطة تقع على المنحنى عندما تحقق معادلته (بالتعويض بها)

ميل المماس $m = 0$ $\Leftrightarrow$ ميل العمودي $\frac{-1}{m} = \frac{1}{0}$ غير مُعرّف

ميل المماس $m = \frac{1}{0}$ غير مُعرّف $\Leftrightarrow$ ميل العمودي $\frac{-1}{m} = 0$

لإيجاد نقطة التقاطع مع محور x ، ضع $y = 0$

لإيجاد نقطة التقاطع مع محور y ، ضع $x = 0$

❶ أوجد معادلة العمودي لمنحنى :

$$4x^2 + 2xy - y^2 = 1$$

عند النقطة $(1 , 3)$ الواقعة عليه .

❷ أثبت أن النقطة $(3 , -2)$ تقع على المنحنى

$$3y^2 + 4x^2 = 48$$

، ثم أوجد معادلة المماس للمنحنى عندها .

❸ أوجد معادلة العمودي لمنحنى : $y = \frac{16}{x+1}$ عند $x = 3$

تابـع : مـعادلـة المماس + معادلة العمودي

ملحوظة : عندما تُعطى قيمة x أو النقطة بدلالة الراديان (π) ، فعند التعويض في قانون معادلة المماس أو التعويض في معادلة العمودي أتركها كما هي بالراديان (π) ولا تعوض عنها بـ 180°

❹ أوجد معادلة المماس لمنحنى :

$f(x) = \csc^2 x$ عند $x = \frac{\pi}{4}$

❺ أوجد معادلة العمودي لمنحنى :

$y = x \sec x$ عند $x = \pi$

❻ أوجد معادلتي المماس والعمودي للمنحنى

$x + xy = \sin y + 1$

عند نقطة تقاطعها مع محور x .

الحـل : $x + 0 = \sin 0 + 1 \;\Rightarrow\; x = 1$

نقطة التقاطع مع محور x هي : $(1, 0)$

$1 + x \cdot \frac{dy}{dx} + y = \cos y \cdot \frac{dy}{dx} + 0$

$\frac{dy}{dx} = \frac{1+y}{\cos y - x} \;\Rightarrow\; m = \frac{1+0}{\cos 0 - 1} = \frac{1}{0}$

غير مُعرّف

- معادلة المماس : $y - y_1 = m\,(x - x_1)$

$y - 0 = \frac{1}{0}(x - 1) \;\Rightarrow\; x = 1$

- معادلة العمودي : $y - y_1 = \frac{-1}{m}(x - x_1)$

$y - 0 = 0\,(x - 1) \;\Rightarrow\; y = 0$ (محور x)

❼ أوجد معادلة المماس للمنحنى

$y = x \sin(\pi x)$ عند النقطة $(1, 0)$.

الجواب : $\pi x + y - \pi = 0$

تابـع : مـعادلة المماس + معادلة العمودي

❽ أوجد معادلة العمودي للمنحنى :

$y + \sqrt{x} = 12$ عند نقاط تقاطعه مع المستقيم : $y = x$.

أي أننا نضع $y_1 = y_2$

الحل :

لإيجاد نقاط التقاطع نحل المعادلتين معاً بالتعويض

$$x + \sqrt{x} = 12 \quad \Rightarrow \quad \sqrt{x} = 12 - x$$

$$x = 144 - 24x + x^2$$ (ناتج تربيع الطرفين)

$$x^2 - 25x + 144 = 0$$ (نجعلها صفرية)

$$(x-9)(x-16) = 0$$ (بالتحليل)

(مرفوض) $x = 16$ أو $x = 9$

لا يحقق المعادلة الأصلية — يحقق المعادلة الأصلية

من المنحنى أو المستقيم : $x = 9 \Rightarrow y = 9$

⇐ نقطة التقاطع هي : $(9,9)$ نقطة التماس

(عند أي نقطة) $\frac{dy}{dx} + \frac{1}{2\sqrt{x}} = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{-1}{2\sqrt{x}}$

ميل المماس : $m = \left.\frac{dy}{dx}\right|_{(9,9)} = \frac{-1}{2\sqrt{9}} = \frac{-1}{6}$

معادلة العمودي : $y - y_1 = \frac{-1}{m}(x - x_1)$

$$y - 9 = 6(x - 9) \Rightarrow y = 6x - 45$$

(الصورة العامة) $\Rightarrow 6x - y - 45 = 0$

❾ أوجد معادلة العمودي للمنحنى :

$y = x^2 + 2x - 3$ عند نقاط تقاطعه مع المستقيم : $y = x - 1$

يوجد عمودان : $x - 2y - 4 = 0$ ، $x + 4y - 1 = 0$

❿ أوجد معادلة المماس لمنحنى : $2x^2 - y^2 = 3xy + 8$ عند $(3,1)$.

$y = \frac{9}{11}x - \frac{16}{11}$

⓫ أوجد معادلتي المماس والعمودي لمنحنى : $y = \frac{5x}{2} + \cos 3x$ عند نقطة تقاطعه مع محور y .

نقطة التقاطع هي $(0,1)$ ، معادلة المماس : $y = \frac{5}{2}x + 1$ ، معادلة العمودي : $y = -\frac{2}{5}x + 1$ (بصيغة ميل – مقطع)

⓬ أوجد معادلة المماس لمنحنى : $y = \frac{9x}{1-x^2}$ عند النقطة $(2,-6)$.

$5x - y + 16 = 0$

⓭ **تحدّي :** أوجد مساحة سطح المثلث المُحدّد بمحور x ، والمماس والعمودي للمنحنى :

$f(x) = x^2 + 3$ عند النقطة $(1,4)$ الواقعة عليه .

الجواب : 20 وحدة مربعة

أ./ عابدين

المماس يوازي محور السينات (محور x)

المماس يوازي محور السينات x (المماس أفقياً) ⇐ ميل المماس = ميل محور x ⇐ $m = \frac{dy}{dx} = 0$

❶ أوجد النقاط الواقعة على منحنى :

$f(x) = x^3 - 3x + 5$

والتي يكون عندها المماس أفقياً .

نقاط حرجة

❷ أوجد النقاط الواقعة على منحنى :

$f(x) = \frac{x^2 - 3}{x - 2}$ ، والتي يكون عندها المماس أفقياً (موازياً للمحور x) .

❸ أوجد قيمتي a , b إذا كان المماس لمنحنى : $y = a\,x^2 + b\,x$ عند النقطة $(2 , 5)$ الواقعة عليه موازياً للمحور x .

① عوّض بالنقطة في معادلة المنحنى (كوّن معادلة)
② عوّض بالنقطة في المشتقة مع الشرط (كوّن معادلة)
③ بحل المعادلتين الناتجتين معاً (بالحذف أو التعويض)

المماس يوازي محور الصادات (محور y)

المماس يوازي محور y (رأسياً) $\Leftarrow$ $m = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{0}$ (ميل المماس غير مُعرَّف $\Leftarrow$ المقام $= 0$)

❶ أوجد النقطة الواقعة على منحنى :

$$y^2 - 2x - 4y - 1 = 0$$

والتي يكون عندها المماس موازياً للمحور y .

❷ أوجد النقاط الواقعة على منحنى الدالة :

$$y = \sqrt{x^2 - 4}$$

والتي عندها المماس رأسياً .

نقاط حرجة

❸ أوجد النقاط الواقعة على منحنى : $x^2 + xy + y^2 = 3$ ، والتي يكون عندها المماس يوازي محور الصادات y .

الجواب : $(2, -1)$, $(-2, 1)$

المماس والزاوية مع الاتجاه الموجب لمحور x

إذا كانت θ الزاوية مع الاتجاه الموجب لمحور x (محور x الموجب) ، حيث $0^\circ \le \theta < 180^\circ$
الميل $= \tan\theta$

بالنسبة للمماس : $\tan\theta = m$ ، (حيث m ميل المماس)

بالنسبة للعمودي : $\tan\theta = \frac{-1}{m}$ ، (حيث m ميل المماس)

بالنسبة لأي مستقيم : $\tan\theta = m$ ، (m ميل المستقيم)

❶ لو نتج لدينا قياس سالب للزاوية فإننا نضيف إلى الناتج 180° (إضافة 180° أو إضافة π) .
❷ إذا (أُعطى أو طُلب) قياس الزاوية مع محور x السالب نوجد الزاوية المكملة (نطرح من 180°) .

$m > 0 \Leftarrow \theta$ حادة ، والدالة متزايدة

$m < 0 \Leftarrow \theta$ منفرجة ، والدالة متناقصة

$m = 0 \Leftarrow \theta = 0^\circ$ ، المماس أفقي

$m =$ غير مُعرّف $\Leftarrow \theta = 90^\circ$ ، المماس رأسي

❶ أوجد قياس الزاوية التي يصنعها المماس لمنحنى : $f(x) = \frac{x-3}{x+1}$ مع الاتجاه السالب للمحور x عند النقطة $(1, -1)$ الواقعة عليه .

❷ أوجد قياس الزاوية التي يصنعها المماس للمنحنى : $x^2 + 3xy + y^2 = 5$ مع الاتجاه الموجب لمحور x عند النقطة $(1, 1)$.

❸ أوجد قياس الزاوية التي يصنعها العمودي على المنحنى : $y = \tan x$ مع الاتجاه الموجب لمحور x عند نقطة الأصل .

[$\tan\theta = \frac{-1}{m} \Rightarrow \theta = -45^\circ \Rightarrow \theta = 135^\circ = \frac{3\pi}{4}$: ج]

تابع : المماس والزاوية مع محور x الموجب

❹ أوجد النقاط الواقعة على منحنى الدالة : $y = x^3 - 2x + 1$ ، والتي يصنع المماس عندها زاوية قياسها $\frac{\pi}{4}$ مع الاتجاه الموجب للمحور x .

❺ أوجد النقاط الواقعة على منحنى الدالة : $y = x^3 - 4x$ والتي يصنع المماس عندها زاوية ظل قياسها يساوي (-1) مع الاتجاه الموجب للمحور x .

❻ إذا كان المماس لمنحنى الدالة : $y = a x^3 + bx + 3$ عند النقطة $(-1, 4)$ يصنع زاوية قياسها $\frac{3\pi}{4}$ مع الاتجاه الموجب لمحور x ، فما قيمة a , b ؟

① عوِّض بالنقطة في معادلة المنحنى (كوِّن معادلة)
② عوِّض بالنقطة في المشتقة مع الشرط (كوِّن معادلة)
③ بحل المعادلتين الناتجتين معاً (بالحذف أو التعويض)

❼ إذا كان المماس لمنحنى الدالة : $y = x + a\sin x + b$ عند النقطة $(0, 3)$ يصنع زاوية قياسها 135° مع الاتجاه الموجب لمحور x ، فما قيمة a , b ؟

[ج : $a = -2$, $b = 3$]

تابع : بطاقة (4) ريض 366

المـماس وعلاقته بمستقيم معُطى

المماس و علاقته بمستقيم مُعطى:

① التوازي ⟸ ميل المماس = ميل المستقيم ⟸ $m_1 = m_2$

② التعامد ⟸ ميل المماس = $\frac{-1}{\text{ميل المستقيم}}$ ⟸ $m_1 = \frac{-1}{m_2}$

③ المستقيم مماس ⟸ ميل المماس = ميل المستقيم ⟸ $m_1 = m_2$

خطوات الحل

① ميل المماس m_1

② ميل المستقيم m_2

③ العلاقة بينهما

إيجاد ميل المستقيم:

① المار بنقطتين ⟸ ميل المستقيم = $\frac{\text{فرق الصادات}}{\text{فرق السينات}}$ ⟸ $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

② يصنع زاوية θ مع الموجب لمحور x ⟸ ميل المستقيم $m = \tan\theta$

③ معادلة المستقم $ax + by + c = 0$ ⟸ الميل $m = \frac{-\text{معامل } x}{\text{معامل } y} = \frac{-a}{b}$

④ معادلة المستقم بصيغة ميل – مقطع $y = mx + b$ ⟸ الميل = معامل x

⑤ الاشتقاق لمعادلة الخط المستقيم بالنسبة لـ x ⟸ الميل = المشتقة $m = \frac{dy}{dx}$

نقطة التماس نقطة تقع على المنحنى والمماس معاً ⟸ لذلك فهي تحقق معادلة المنحنى ومعادلة المماس

❶ **أوجد النقاط الواقعة على منحنى الدالة :**

$$y = x^3 + 3x - 1$$

التي يكون عندها المماس موازياً المستقيم

$$6x - y - 7 = 0$$

❷ **أوجد النقاط الواقعة على منحنى الدالة :**

$$y = 2x^3 - x + 3$$

التي يكون عندها المماس عمودياً على المستقيم المار بالنقطتين $(6, -1)$, $(-9, 2)$.

تابع : المماس وعلاقته بمستقيم مُعطى

❸ أوجد النقاط الواقعة على المنحنى :
$x^2 + y^2 = 8$ ، والتي يكون المماس عندها
موازياً للمستقيم الذي يصنع زاوية قياسها $\frac{\pi}{4}$ مع
الاتجاه الموجب لمحور x . $\boxed{(2,-2),(-2,2)}$

❹ أوجد النقاط الواقعة على المنحنى :
$y = \tan x$ ، والتي يكون المماس عندها
عمودياً على المستقيم : $x + 2y - 3 = 0$
، حيث $0 < x < \frac{\pi}{2}$ الجواب : $\left(\frac{\pi}{4}, 1\right)$

❺ ما النقطة التي يكون عندها المماس لمنحنى
الدالة : $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x$
موازياً للمستقيم $y = 4$ ؟

A $(1\,,0)$

B $(1\,,1)$

C $(-1\,,-7)$

D $(-1\,,12)$

❻ ما قيمة x التي يكون عندها المماس للمنحنى
$y = \frac{x^3}{3} + 1$ عمودياً على المستقيم الذي يصنع
زاوية مقدارها 135° مع محور x الموجب ؟

A 1 فقط

B -1 فقط

C ± 1

D غير لك

تابـع : المماس وعلاقته بمستقيم مُعطى

❼ إذا كان المستقيم : $3x + y - 1 = 0$ يمس المنحنى : $y = a\,x^3 + bx^2$ عند النقطة $(1\,,-2)$ ، فأوجد قيمة كلاً من الثابتين $a\,,b$.

الجواب: $a = 1\,,\ b = -3$

❽ إذا كان المستقيم : $2x - y + k = 0$ مماساً لمنحنى الدالة $f(x) = \frac{-2}{x}\,, x \neq 0$ فأوجد جميع القيم الممكنة للعدد الحقيقي k .

الجواب : $x = \pm 1 \;\Rightarrow\; k = \pm 4$

❾ ما قيمة $a \in R$ التي تجعل محور السينات مماساً للمنحنى : $y = ax^2 - 14x + 7$ عندما $x = 1$ ؟

A 6

B -6

C 7

D -7

❿ تحدي : أوجد قيمة العدد الحقيقي a التي تجعل المستقيم : $y = 3 - x$ مماساً لمنحنى الدالة : $f(x) = \frac{a}{x+1}$

الجواب : $a = 4$

فكرة وملخص الحل

- $m_1 = m_2 \;\Rightarrow\; a = (x+1)^2$
- عوض بـ a في الدالة f $\Rightarrow$ $f(x) = x + 1$
- لنوجد قيمة x نضع : $y_{\text{المنحنى}} = y_{\text{المستقيم}}$

$$3 - x = x + 1 \;\Rightarrow\; x = 1$$

- عوض عن $x = 1$ في a :

$$a = (1+1)^2 \;\Rightarrow\; a = 4$$

تمارين متنوعة – اختبر نفسك

❶ إذا كانت معادلة العمودي لمنحنى $y=f(x)$ عند نقطة ما تقع على هي : $y=-x+2$ فإن قياس الزاوية التي يصنعها المماس مع الاتجاه الموجب لمحور x تساوي :

A $\frac{\pi}{2}$

B $\frac{\pi}{3}$

C $\frac{\pi}{4}$

D $\frac{\pi}{6}$

❷ إذا كان ميل المماس لمنحنى الدالة f عند النقطة $(x_1\,,y_1)$ الواقعة عليه هو $-\sqrt{3}$ ، فما ظل الزاوية التي يصنعها العمودي على المماس مع محور x الموجب عند النقطة ؟

A 30°

B 150°

C $\frac{-1}{\sqrt{3}}$

D $\frac{\sqrt{3}}{3}$

❸ إذا كان المماس للمنحنى $y=ax^2-13x$ عند $x=1$ يصنع زاوية 135° مع الاتجاه الموجب للمحور x ، فما قيمة الثابت a ؟

A -6

B -7

C 6

D 7

❹ ما ميل العمودي على المماس لمنحنى العلاقة $x^2+y^2=25$ عند النقطة $(5,0)$ ؟

A -5

B 0

C $-\frac{1}{5}$

D غير مُعرّف

❺ ما النقطة التي يكون عندها المماس لمنحنى الدالة : $y=\frac{1}{2}x^2$ موازياً للمستقيم الذي معادلته : $2x-4y=3$ ؟

A $(\frac{1}{2}\,,\frac{1}{2})$

B $(\frac{1}{2}\,,\frac{1}{8})$

C $(2\,,2)$

D $(1\,,-\frac{1}{4})$

❻ ما قياس الزاوية التي يصنعها المماس لمنحنى $f(x)=\frac{x}{x-4}$ ، مع الاتجاه الموجب لمحور x عند النقطة $(2\,,-1)$ الواقعة عليه ؟

A π

B $\frac{\pi}{2}$

C $\frac{\pi}{4}$

D $\frac{3\pi}{4}$

ريض 366

أ./ عابدين

بطاقة (5) ريض 366

تطبيقات فيزيائية على المشتقة

السرعة اللحظية (v) :

هي المشتقة الأولى للإزاحة s بالنسبة للزمن

$$v = \frac{ds}{dt}$$

التسارع (العجلة) (a) :

هو المشتقة الأولى للسرعة v بالنسبة للزمن

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2s}{d\,t^2}$$

اشتقاق: $s \rightarrow v \rightarrow a$

ملاحظات : ① الإزاحة ، والسرعة ، والتسارع كميات متجهة (تتحدد بالمقدار والاتجاه) .

② الزمن t عدد حقيقي غير سالب أي $t \geq 0$ (موجباً أو صفراً) ⇐ $t = 0$ ⇐ عند بدء الحركة ، $t < 0$ سالباً ⇐ مرفوض

إرشادات عند حل مسائل التطبيقات الفيزيائية (شروط لإيجاد الزمن t)

❶ عند السكون اللحظي
❷ عندما تنعدم السرعة
❸ عند أقصى إرتفاع
❹ عندما يغير الجسم اتجاه حركته

⇐ $v = 0$

ملاحظات: ① لإيجاد السرعة الابتدائية : ضع $t = 0$ في معادلة السرعة v
② السرعة موجبة ضع $v > 0$
③ السرعة سالبة ضع $v < 0$

❶ عندما تنعدم الازاحة
❷ عندما يصل (يعود) الجسم إلى نقطة البداية

⇐ $s = 0$

عندما يتحرك جسيم في خط مستقيم من السكون مبتدئًا من نقطة ثابتة عند $t = 0$ ⇐ $v = 0 , s = 0$

❶ عندما ينعدم التسارع (تنعدم العجلة)
❷ الجسم ساكن أو متحرك بسرعة منتظمة
❸ عند أقصى سرعة أو متحرك بسرعة ثابتة

⇐ $a = 0$

ملاحظات: ① $a > 0$ (موجباً) ⇐ السرعة v متزايدة
② $a < 0$ (سالباً) ⇐ السرعة v متناقصة

لبحث إشارة مقدار جبري : نوجد أصفار هذا المقدار ، ثم نختبر الإشارة قبل وبعد

$s \xrightarrow{\text{اشتقاق}} v \xrightarrow{\text{اشتقاق}} a$

تمارين على التطبيقات الفيزيائية

❶ **يتحرك جسم في خط مستقيم بحيث كانت العلاقة بين الإزاحة s بالسنتيمترات والزمن t بالثواني هي : $s = t^3 - 3t^2 + 5t + 4$ ، فأوجد المسافة المقطوعة والسرعة عندما ينعدم التسارع .**

الحل:

$$v = \frac{ds}{dt} = 3t^2 - 6t + 5$$

$$a = \frac{dv}{dt} = 6t - 6 \quad \text{(التسارع عند أي لحظة)}$$

عندما ينعدم التسارع فإن ⇐ $a = 0$

$$6t - 6 = 0 \Rightarrow t = 1 \text{ sec}$$

$$s(1) = (1)^3 - 3(1)^2 + 5(1) + 4$$
$$= 7 \text{ cm} \quad \text{(المسافة)}$$

$$v(1) = 3(1)^2 - 6(1) + 5$$
$$= 2 \text{ cm/sec} \quad \text{(السرعة)}$$

تابع : التطبيقات الفيزيائية

❷ يتحرك جسم في خط مستقيم وفقاً للعلاقة :

$$s = f(t) = \frac{t^3}{3} - 2t^2 - 5t + 1$$

، حيث الإزاحة s بـ (m) ، والزمن t بـ (sec)
أوجد التسارع a في حالة السكون اللحظي .

❸ تتحرك نقطة مادية في خط مستقيم وفقاً للعلاقة : $s = t^3 - 6t^2 + 9t$
علماً بأن المسافة s بالأمتار ، والزمن t بالثواني
فأوجد تسارع الحركة عندما يتغيّر اتجاه الحركة .

❹ قُذف جسم رأسياً إلى أعلى ، وكانت العلاقة بين ارتفاعه s بالأقدام عن سطح الأرض والزمن t بالثواني هي : $s = 96\,t - 16\,t^2$

(A) أوجد زمن ، ومسافة أقصى ارتفاع ؟

(B) ما مجموعة قيم t التي عندها v موجبة ؟

❺ قُذف جسم رأسياً إلى أعلى ، وكانت العلاقة بين ارتفاعه s بالأمتار عن سطح الأرض والزمن t بالثواني هي : $s = nt - 3t^2$ ، إذا كان زمن الوصول إلى أقصى ارتفاع هو 3 sec ، أوجد قيمة n ، ومسافة أقصى ارتفاع ؟

تابع : التطبيقات الفيزيائية

❻ يتحرك جسيم في خط مستقيم ، بحيث كانت العلاقة بين الإزاحة s بالأمتار (cm) ، والزمن t بالثواني (sec) هي : $s = 12t^2 - t^3$

(A) متى يعكس الجسم اتجاه حركته ، وأين ؟

(B) متى يصل الجسم إلى نقطة البداية ؟

❼ يتحرك جسم في خط مستقيم ، وفقاً للعلاقة :

$$s = t\,(t-3)^2 + 6$$

، الإزاحة s بالسنتيمترات ، والزمن t بالثواني

(A) أوجد السرعة الابتدائية للجسم ؟

(B) ما الفترة الزمنية التي تكون فيها $v < 0$ ؟

❽ يتحرك جسيم في خط مستقيم ، بحيث كانت العلاقة بين الإزاحة s بالأمتار (m) ، والزمن t بالثواني (sec) هي : $s = 3t^2 + 5\,t$ ، فما قيمة السرعة الابتدائية للجسم .

A $0 \ m/sec$

B $3 \ m/sec$

C $5 \ m/sec$

D $8 \ m/sec$

❾ يتحرك جسيم في خط مستقيم ، بحيث كانت العلاقة بين الإزاحة s بالأمتار (m) ، والزمن t بالثواني (sec) هي : $s = 12t - 2t^2$. ما قيمة t التي يعكس عندها الجسيم اتجاه حركته ؟

A $\sqrt{3}$ sec

B $\sqrt{6}$ sec

C 6 sec

D 3 sec

تابع : التطبيقات الفيزيائية

تابع : تمارين على التطبيقات الفيزيائية

⑩ قُذف جسيم رأسياً إلى أعلى ، إذا كان ارتفاع الجسم s بالقدم (ft) بعد زمن قدره t ثانية (sec) من لحظة قذفه يعطى بالعلاقة :

$s = 12\sqrt{t} - t$ فأوجد كلاً مما يأتي :

(A) سرعة الجسم v بعد مرور 4 sec من لحظة القذف . $\boxed{\text{ج : } v = 2 \text{ ft/sec}}$

(B) أقصى ارتفاع يصل إليه الجسم ابتداء من نقطة القذف . $\boxed{\text{الجواب : } s = 36 \text{ ft}}$

⑪ أُطلق بالون لمراقبة الطقس ليرتفع رأسياً ، وكانت العلاقة بين المسافة s بالأمتار التي يرتفعها البالون ، والزمن t خلال العشر ثوانٍ الأولى للحركة هي : $s = 1 + \frac{t}{2} + \frac{t^2}{4}$

احسب سرعة البالون ، وتسارعه بعد قطعه 7 m من لحظة انطلاقه .

$\boxed{t = 4 \text{ sec} \;,\; v = \frac{5}{2} \text{m/s} \;,\; a = \frac{1}{2} \text{ m/s}^2}$

⑫ قذف جسم رأسياً إلى أعلى من نقطة على سطح الأرض ، وكانت العلاقة بين ارتفاعه s بالأقدام عن سطح الأرض والزمن t بالثواني هي : $s = 112\,t - 16\,t^2$

(A) أوجد سرعة الجسم عندما يكون على ارتفاع 96 ft من نقطة القذف ؟ $\boxed{v = \pm 80 \text{ ft/ sec}}$

(B) أوجد أقصى ارتفاع يصل إليه الجسم من نقطة القذف ؟ $\boxed{t = 3.5 \text{ sec} \;،\; s = 196 \text{ ft}}$

تابع : التطبيقات الفيزيائية

⓭ قُذف جسم رأسياً إلى أعلى ، وكانت العلاقة بين ارتفاعه s بالأمتار عن سطح الأرض والزمن t بالثواني هي : $s = 30t - 5t^2$
أوجد ارتفاع الجسم في اللحظة التي يفقد عندها ثُلث سرعته الابتدائية .

⓮ إذا كانت الازاحة لجسم s (m) بعد زمن t (sec) تعطى بالعلاقة : $s = t + \frac{4}{t+1}$ فأوجد سرعة الجسم عندما يبلغ تسارعه $\frac{1}{8}$ m/sec^2

⓯ يتحرك جسيم في خط مستقيم بحيث كانت العلاقة بين الإزاحة s بالسنتيمترات ، والزمن t بالثواني هي : $s = 4\sin 2t$
أوجد السرعة و التسارع عندما $t = \frac{\pi}{6}$ sec .

⓰ يتحرك جسيم في خط مستقيم مبتدئاً من نقطة ثابتة وفقاً للعلاقة : $s = a\sin(t + \pi)$ ، حيث s بالأمتار (m) ، والزمن t بالثواني (sec) ، a عدد حقيقي . إذا كانت سرعته الابتدائية 8 m/sec ، فما قيم الثابت a ؟

تابع : التطبيقات الفيزيائية

⓱ يتحرك جسم في خط مستقيم مبتدئاً من نقطة ثابتة وفقاً للعلاقة : $s = 8\sin^2 t$
حيث الازاحة s (cm) ، والزمن t (sec)
أوجد تسارع الجسم بعد مُضي $\frac{\pi}{2}$ sec .

⓲ يتحرك جسيم في خط مستقيم وفقاً للعلاقة : $s = 2\cos^2 t$ ، حيث الازاحة s السنتيمترات (cm) ، والزمن t بالثواني (sec)
أوجد تسارع الجسم بعد مُضي $t = \frac{\pi}{2}$ sec .

⓳ يتحرك جسم في خط مستقيم وفقاً للعلاقة : $s = \tan t + \cot t$ ، حيث s(cm) بُعد الجسم عن نقطة ثابتة بعد مضي t(sec) .
، أوجد تسارع الجسم عند $t = \frac{\pi}{4}$ sec .

⓴ يتحرك جسيم في خط مستقيم وفقاً للعلاقة :
$$s = \frac{t}{2} - \frac{1}{2}\sin^2 t \quad , \quad t \in \left[0 , \frac{\pi}{2}\right)$$
، حيث s(cm) ، t(sec) ، فأوجد التسارع في اللحظة التي تنعدم فيها السرعة . $\boxed{0 \text{ cm/s}^2}$

تابع : التطبيقات الفيزيائية

❷❶ يتحرك جسيم في خط مستقيم ، وإزاحته s بالأمتار بعد زمن قدره t ثانية تعطى بالعلاقة

$$s = \sin 2t + \cos 2t$$

(A) فأثبت أن : $s'' = -4\,s$ (عدديًا) .

(B) أوجد التسارع a بعد مرور زمن $t = \frac{\pi}{4}$.

❷❷ يتحرك جسيم في خط مستقيم وفقاً للعلاقة :

$$s = 4\cos 3t + 4\sin 3t$$

حيث s الازاحة بالأمتار (m) بعد t ثانية ،

(A) فأثبت أن : $a = -9\,s$ (عدديًا) .

(B) أوجد التسارع a بعد مرور $\frac{\pi}{3}$ sec .

❷❸ يتحرك جسم في خط مستقيم وفقاً للعلاقة :

$s = \sin t + \cos t$ ، حيث s الازاحة (cm) والزمن $t\ (\mathrm{sec})$. أوجد التسارع في حالة السكون اللحظي للمرة الأولى من بدء الحركة .

__الحل__: $v = \frac{ds}{dt} = \cos t - \sin t = 0$

$$\sin t = \cos t \quad \Rightarrow \quad \frac{\sin t}{\cos t} = 1$$

$\tan t = 1 \quad \Rightarrow$ (في الربُع الأول أو الثالث)

$$\tan^{-1}(1) = \frac{\pi}{4} \quad \Rightarrow \quad t = \frac{\pi}{4} \ , \ t = \frac{5\pi}{4}$$

__ولجميع قيم t__: $t = \frac{\pi}{4} + k\pi \quad , k \in W$

__للمرة الأولى__: $k = 0 \quad \Rightarrow \quad t = \frac{\pi}{4}$

__التسارع__: $a(t) = \frac{dv}{dt} = -\sin t - \cos t$

$$a\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\sin\frac{\pi}{4} - \cos\frac{\pi}{4} = -\sqrt{2}\ \mathrm{cm/s^2}$$

❷❹ يتحرك جسم في خط مستقيم وفقاً للعلاقة :

$$s = \sqrt{3}\,t + \cos 2t \quad , \ t \in \left[0\,,\,\frac{\pi}{4}\right)$$

حيث $s(\mathrm{cm})$ ، $t(\mathrm{sec})$ ، فأوجد التسارع في حالة السكون اللحظي . $\boxed{a = -2\ \mathrm{cm/sec^2}}$

إعداد أ./ عابدين

ريض 366

تطبيقات على المشتقة الأولى

فترات مغلقة

❶ استعمال المشتقة الأولى لدراسة الاطراد (تزايد وتناقص الدوال) :

لتكن الدالة f متصلة في الفترة $[a,b]$ ، وقابلة للاشتقاق في الفترة (a,b) ، فإنه :

① $\forall\, x \in (a,b)$ $\quad f'(x) > 0 \quad \Leftarrow$ الدالة f تكون متزايدة في الفترة $[a,b]$

② $\forall\, x \in (a,b)$ $\quad f'(x) < 0 \quad \Leftarrow$ الدالة f تكون متناقصة في الفترة $[a,b]$

③ $\forall\, x \in (a,b)$ $\quad f'(x) = 0 \quad \Leftarrow$ الدالة f تكون ثابتة في الفترة $[a,b]$

❷ النقاط الحرجة للدالة : تكون عندها المشتقة $f'(x)$ تساوي الصفر أو $f'(x)$ غير مُعرّفة

• نوجد قيم x التي تحقق :

$f'(x) = 0$ المماس أفقي $\Leftarrow$ البسط $= 0$

أو

$f'(x)$ غيرمُعرّفة المماس رأسي $\Leftarrow$ المقام $= 0$

• عند $x = a$ نقطة حرجة للدالة f إذا تحقق : ① $f'(a) = 0$ أو ② $f'(a)$ غير مُعرّفة

❸ اختبار المشتقة الأولى للكشف عن نوع النقطة الحرجة :

وذلك بالبحث عن إشارة $f'(x)$ على جانبي (بجوار) $x = a$ وذلك عن طريق بحث إشارة المقدار الجبري أو عن طريق التعويض بقيمة أقل من a ، ثم بقيمة أكبر من a

① إذا تغيّرت إشارة $f'(x)$ من $+$ إلى $-$ $\Leftarrow$ النقطة الحرجة نقطة قيمة عظمى محلية .

② إذا تغيّرت إشارة $f'(x)$ من $-$ إلى $+$ $\Leftarrow$ النقطة الحرجة نقطة قيمة صغرى محلية .

③ إذا لم تتغيّر إشارة $f'(x)$ $\Leftarrow$ نقطة حرجة (لا عظمى ولا صغرى) .

$f(x) = x^3$
$f'(x) = 3x^2$
$f'(x)$ دائماً موجبة
إشارة f' لا تتغيّر
لا عظمى و لا صغرى

❹ اشارة المشتقة الأولى : إذا كانت $x = a$ ، $x = b$ عندها نقاط حرجة

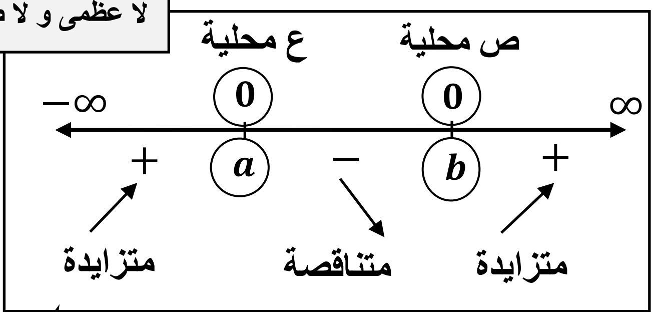
الدالة متزايدة في الفترة : $R \setminus (a,b)$

أو متزايدة في : $(-\infty, a] \cup [b, \infty)$

الدالة متناقصة في الفترة : $[a,b]$

عند $x = a$ قيمة عظمى محلية $= f(a)$

عند $x = b$ قيمة صغرى محلية $= f(b)$



إشارة $f'(x)$

❺ في مسائل ايجاد قيمة الثوابت :

النقطة الحرجة تحقق :

تحقق معادلة المنحنى

عندها $f'(x) = 0$

إعداد أ./ عابدين

ريض 366

تطبيقات على المشتقة الثانية

فترات مفتوحة

❶ استعمال المشتقة الثانية لدراسة تقعر المنحنيات :

لتكن الدالة f متصلة في الفترة $[a,b]$ ، وقابلة للاشتقاق مرتين في الفترة (a,b) ، فإنه :

① $\forall\, x \in (a,b)$ $\quad f''(x) > 0 \quad \Leftarrow$ المنحنى مقعر إلى أعلى في الفترة (a,b) .

② $\forall\, x \in (a,b)$ $\quad f''(x) < 0 \quad \Leftarrow$ المنحنى مقعر إلى أسفل في الفترة (a,b) .

❷ نقاط الانقلاب (الانعطاف) :

هي النقاط التي يُغيّر المنحنى عندها اتجاه تقعره (من أعلى إلى أسفل أو من أسفل إلى أعلى) ⇐ ولإيجاد نقطة الانقلاب نضع $f''(x) = 0$

ملحوظة : عند $x = a$ نقطة انقلاب (انعطاف) لمنحنى الدالة f ⇐ $f''(a) = 0$

شرط ضروري وغير كافي

لابد من تغيّر إشارة f''

❸ اختبار المشتقة الثانية في الكشف عن وجود نقطة الانقلاب :

وذلك بالبحث عن إشارة $f''(x)$ على جانبي (بجوار) $x = a$

① إذا تغيّرت إشارة $f''(x)$ من $+$ إلى $-$ أو العكس ⇐ النقطة هي نقطة انقلاب .

② إذا لم تتغيّر إشارة $f''(x)$ ⇐ النقطة ليست نقطة انقلاب .

مثال: $f(x) = x^4 + 5$

$f''(x) = 12x^2$

ودائماً يكون $f''(x) > 0$

المنحنى مقعر دائماً لأعلى

لا توجد نقاط انقلاب

$(0,5)$ ليست نقطة انقلاب

❹ اختبار المشتقة الثانية للكشف عن نوع النقطة الحرجة :

وذلك بالتعويض عن $x = a$ في $f''(x)$ أي نوجد قيمة $f''(a)$:

① إذا كان $f''(a) > 0$ ⇐ للدالة قيمة صغرى محلية (ص م) .

② إذا كان $f''(a) < 0$ ⇐ للدالة قيمة عظمى محلية (ع م) .

③ إذا كان $f''(a) = 0$ أو غير مُعرّفة ⇐ يفشل الاختبار ونلجأ إلى اختبار المشتقة الأولى .

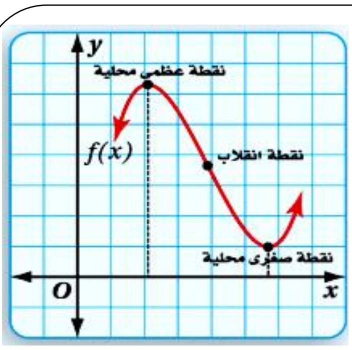
❺ رسم توضيحي لما سبق :

مقعر إلى أعلى في : $(a\,,\,\infty)$

مقعر إلى أسفل في : $(-\infty\,,\,a)$

فترات التقعر مفتوحة

قيم x	$-\infty$	a	∞
إشارة $f''(x)$	$-$		$+$
اتجاه تقعر منحنى الدالة $f(x)$	مقعر إلى أسفل		مقعر إلى أعلى



❻ في مسائل ايجاد قيمة الثوابت :

نقطة الانقلاب تحقق :

تحقق معادلة المنحنى

عندها $f''(x) = 0$

إشارة $f''(x)$

تطبيقات على المشتقة الأولى

تمارين على تطبيقات المشتقة الأولى

❶ $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 5$

A أوجد النقاط الحرجة (إن وجدت) للدالة .

B ادرس إطراد الدالة (تزايد – تناقص – ثبوت) .

C نقاط القيم الصغرى والعظمى المحلية .

❷ $f(x) = \frac{3}{2}x^4 + 2x^3 - 3x^2 - 6x + \frac{9}{2}$

A أوجد النقاط الحرجة (إن وجدت) للدالة .

B ادرس إطراد الدالة (تزايد – تناقص – ثبوت) .

C نقاط القيم الصغرى والعظمى المحلية .

تطبيقات على المشتقةالثانية

تمارين على تطبيقات المشتقة الثانية

❶ $f(x) = 1 - 3x^2 + 2x^3$

A أوجد نقاط الانقلاب (إن وجدت) للدالة .

B ادرس تقعّر منحنى الدالة (فترات التقعّر) .

C المشتقة الثانية لبيان نوع النقاط الحرجة .

❷ $f(x) = x^3(4 - x)$

A أوجد نقاط الانقلاب (إن وجدت) للدالة .

B ادرس تقعّر منحنى الدالة (فترات التقعّر) .

C المشتقة الثانية لبيان نوع النقاط الحرجة .

تابع : التطبيقات (مسائل الثوابت)

النقطة التي تقع على المنحنى (يمر بها) / نقطة حرجة / نقطة الانقلاب $\Leftarrow$ تحقق معادلة

عند نقاط القيم الصغرى أو القيم العظمى (نقاط حرجة) $\Leftarrow$ $f'(x)=0$ (المماس // محور x)

كثيرة حدود من الدرجة الثانية : $f(x)=ax^2+bx+c$ ، حيث a,b,c ثوابت ، $a\neq 0$

كثيرة حدود من الدرجة الثالثة : $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ ، حيث $a\neq 0$

نقطة حرجة
نقطة (عظمى / صغرى) محلية

- تحقق معادلة المنحنى (عوّض بـ x , y)
- عندها $f'(x)=0$ (عوّض بـ x فقط)

نقطة الانقلاب
(نقطة انعطاف)

- تحقق معادلة المنحنى (عوّض بـ x , y)
- عندها $f''(x)=0$ (عوّض بـ x فقط)

نقطة على المنحنى (نقطة عادية)
تحقق معادلة المنحنى (عوّض بـ x , y)

النقطة الحرجة عندها
$f'(x)=0$ أو $f'(x)$ غير مُعرّفة

❶ إذا كانت : $\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}>0$ لجميع قيم $x\in R$ ، فإن منحنى الدالة f

A مقعر لأعلى

B مقعر لأسفل

C متناقصة

D متزايدة

المشتقة بالتعريف

$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$

$f'(x)>0$

الدالة متزايدة

❷ إذا كانت : $f(x)=\sqrt[3]{x^2}$ ، فإن إحداثيّ النقطة الحرجة للدالة f هي :

A $(-1,1)$

B $(1,1)$

C $(0,0)$

D $(0,1)$

$f(x)=\sqrt[3]{x^2}\Rightarrow f(x)=x^{\frac{2}{3}}$

$f'(x)=\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}=\frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$

$f'(x)$ غير مُعرّفة عند

$3\sqrt[3]{x}=0 \Rightarrow x=0$

$f(0)=0 \Rightarrow (0,0)$

❸ أوجد النقاط الحرجة (إن وجدت) للدالة : $f(x)=\sqrt[3]{x^3-8}$

الجواب : $(2,0)\,,(0,-2)$

الحل : (تعديل المسألة) $f(x)=(x^3-8)^{\frac{1}{3}}$

$f'(x)=\frac{1}{3}(x^3-8)^{-\frac{2}{3}}\cdot 3x^2$

(نعتبر الحالتين) $\Rightarrow f'(x)=\frac{x^2}{\sqrt[3]{(x^3-8)^2}}$

$f'(x)=0 \Rightarrow x^2=0 \Rightarrow x=0$

$\frac{x^2}{\sqrt[3]{(x^3-8)^2}}=\frac{1}{0} \Rightarrow$ غير مُعرّفة $f'(x)=\frac{1}{0}$

$x^3-8=0 \Rightarrow x^3=8 \Rightarrow x=2$

من الدالة : $f(0)=-2\ ,\ f(2)=0$

النقاط هي : $(2,0)\ ,\ (0,-2)$

تابع : التطبيقات (مسائل الثوابت)

تمارين متنوعة على الثوابت (مسائل الثوابت)

❶ إذا كانت : $f(x) = ax^3 + bx^2 - 12x$
وكان لمنحنى الدالة $f(x)$ نقطة حرجة
عند النقطة $(1, 0)$ ، فما قيمة a , b ؟

❷ إذا كانت : $f(x) = 2x^3 + ax^2 + b$
وكان للدالة قيمة عظمى محلية تساوي 7
عند $x = -1$ ، فما قيمة الثابتين a , b ؟

❸ عيّن الثوابت a , b, c لكي يكون للدالة : $y = x^3 + ax^2 + bx + c$ قيمة صغرى محلية
عند النقطة $(-1, 2)$ ، ويمر منحنى الدالة y بالنقطة $(0, 4)$.

$\boxed{a = 4 \ , \ b = 5 \ , \ c = 4}$

تابع : التطبيقات (مسائل الثوابت)

تابع : تمارين الثوابت (مسائل الثوابت)

❹ إذا كان للدالة : $y = x^2 + bx + 3$ قيمة صغرى محلية عند النقطة $(x\,, 2)$ ، فأوجد قيمة b .

❺ إذا كان $f(x) = ax^3 + bx^2 + 9x + 1$ لها قيمة عظمى محلية عند $x = 1$ ، وقيمة صغرى محلية عند $x = 3$ ، فما قيمة $a\,, b$ ؟

❻ أوجد معادلة منحنى دالة كثير الحدود من الدرجة الثانية والذي يحقق الشروط الثلاثة الآتية :

① يمر بنقطة الأصل . ② يمر بالنقطة $(2\,, 12)$. ③ له نقطة حرجة عند $x = 2$.

تابع : التطبيقات (مسائل الثوابت)

تابع : تمارين الثوابت (مسائل الثوابت)

❼ عيّن قيمة الثابتين a , b لكي يكون للدالة : $f(x) = x^3 + ax^2 + bx$ نقطة حرجة عند $x = -1$ ، وكذلك نقطة انقلاب عند $x = 2$

❽ إذا كانت النقطة $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ هي نقطة انقلاب لمنحنى الدالة : $y = ax^3 + bx^2 + 1$ فما قيمة الثابتين a , b ؟

❾ إذا كان لمنحنى الدالة : $f(x) = \cos x + m\, x^2$ نقطة انقلاب عند $x = \frac{\pi}{3}$ ، فما قيمة الثابت m ؟

A $\frac{1}{2}$

B $\frac{1}{4}$

C $-\frac{1}{2}$

D $-\frac{1}{4}$

❿ إذا كانت : $y = kx^3 + x^2$ وكانت للدالة نقطة انقلاب عند $x = \frac{1}{6}$ فإن قيمة العدد الحقيقي k تساوي ؟

A 2

B 3

C -2

D -3

3 / ث
ف 2

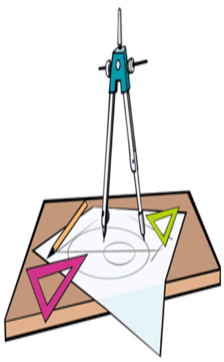
سلسلة التفوق

في الرياضيات

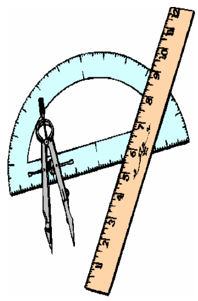
ريض 366

الوحدة الثالثة

التكامل غير المُحدّد



إعداد : أ. عابدين حامد فؤاد



اسم الطـــــالب : ....

ملحوظة : هذه المذكرة ليست بديلاً عن الكتاب المدرسي (الكتاب هو المرجع)

نسألكم الدعاء ، مع تمنياتي للجميع بالنجاح والتفوق

بطاقة (10) ريض 366

التـكـامـل غير المحـدد

إعداد أ./ عابدين

العلاقة بين التفاضل و التكامل

ملحوظة
مجموعة الدوال الأصلية (عكس المشتقة) يسمى التكامل غير المحدد

يقال للدالة F إنها دالة أصلية أو عكس المشتقة للدالة f في الفترة $[a,b]$ ، إذا كانت F متصلة في الفترة $[a,b]$ ، وقابلة للاشتقاق في الفترة (a,b). وكان

$$F'(x) = f(x) \quad \forall x \in (a,b)$$

الدالة الأصلية : إذا كانت $f(x)$ دالة فإن جميع الدوال الأصلية لها هي : $F(x) = \int f(x)dx$

قواعد عامة للتكامل غير المحدد

❶ $\int k\ dx = kx + c$ $\quad c\,,\ k \in R$ ($c\,,k$ أعداد حقيقية)

❷ $\int x^n\ dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$ ثابت التكامل $\quad c\,,\ n \in R \quad , n \neq -1$

❸ $\int k\,x^n\ dx = \frac{k\ x^{n+1}}{n+1} + c$ $\quad c\,,\ n\,,k \in R \quad , n \neq -1$

❹ $\int [f(x)]^n \cdot f'(x)\ dx = \frac{[f(x)]^{n+1}}{n+1} + c$ $\quad c\,,\ n \in R \quad , n \neq -1$

❺ $\int [k \cdot f(x)]\ dx = k \cdot \int f(x)\,dx$ $\quad c\,,\ n\,,k \in R \quad , n \neq -1$

❻ $\int [f(x) \pm g(x) \pm \ldots\ldots\ldots]\,dx = \int f(x)\,dx \pm \int g(x)dx \pm \ldots\ldots\ldots$

ملاحظة : يوزَّع التكامل في حالة عمليات الجمع والطرح فقط ، (لا يوزِّع في حالة الضرب أو القسمة)

قواعد تكامل الدوال المثلثية

القواعد الستة الأساسية

يجب توحيد الزاوية في المسألة

❶ $\int \sin x\ dx = -\cos x + c$

❷ $\int \cos x\ dx = \sin x + c$

❸ $\int \sec^2 x\ dx = \tan x + c$

❹ $\int \csc^2 x\ dx = -\cot x + c$

❺ $\int \sec x \tan x\ dx = \sec x + c$

❻ $\int \csc x \cot x\ dx = -\csc x + c$

❼ $\int \sin kx\ dx = -\frac{1}{k}\cos kx + c \quad , k \neq 0$ (تعمم على جميع الدوال المثلثية)

❽ $\int [\sin f(x)] \cdot f'(x)\,dx = -\cos f(x) + c$ (تعمم على جميع الدوال المثلثية)

❾ $\int [\sin f(x)]^n \cdot \cos f(x) \cdot f'(x)\,dx = \frac{[\sin f(x)]^{n+1}}{n+1} + c$ (تعمم القاعدة)

القوس   مشتقة داخل القوس   مشتقة الزاوية

تابع : التكامل غير المحدد

متطابقات مثلثية هامة للتكامل (تعمم القوانين لأي زاوية)

❶	$\sec x = \frac{1}{\cos x}$	$\csc x = \frac{1}{\sin x}$	$\cot x = \frac{1}{\tan x}$
❷	$\cos^2 x + \sin^2 x = 1$	$\tan^2 x + 1 = \sec^2 x$	$\cot^2 x + 1 = \csc^2 x$
❸	$\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$	(تستعمل إذا كان الأس لـ sin فردي في أصل السؤال)	
❺	$\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$	(تستعمل إذا كان الأس لـ sin زوجي في أصل السؤال)	
❹	$\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$	(تستعمل إذا كان الأس لـ cos فردي في أصل السؤال)	
❻	$\cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x)$	(تستعمل إذا كان الأس لـ cos زوجي في أصل السؤال)	
❼	$\tan^2 x = \sec^2 x - 1$	$\cot^2 x = \csc^2 x - 1$	$\tan 2x = \frac{2\tan x}{1 - \tan^2 x}$
❽	$\sin 2x = 2\sin x\cos x$	$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$	
❾	$\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$	$\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$	

أفكار تكاملات الدوال المثلثية

① تكامل من التكاملات الستة . — تكامل عدد

② تكامل ضرب دالة ومشتقتها . — تكامل من الستة

③ التبسيط باستعمال المتطابقات المثلية . — تكامل دالة ومشتقتها

تذكر

$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$

$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$

$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$

$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$

العلاقة بين التفاضل و التكامل

الدالة الأصلية تعني التكامل

تدريب : أوجد جميع الدوال الأصلية لكل مما يأتي في الفترة المعطاة :

❶ $f(x) = 8x^7 - 6x + 2 \quad , \quad x \in R$

الحل:

$F(x) = \int f(x)\ dx$

$F(x) = \int (8x^7 - 6x + 2)\ dx$

$F(x) = x^8 - 3x^2 + 2x + c$

❷ $f(x) = \sec^2 x \quad , \quad x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

الحل:

$F(x) = \int f(x)\ dx$

$F(x) = \int \sec^2 x\ dx = \tan x + c$

الشكل الذي يحوي الثابت c يسمى الدالة الأصلية

❸ ما الدالة الأصلية $F(x)$ للدالة : $f(x) = 3\sqrt{x}$

A $F(x) = \sqrt[3]{x^2} + c$ C $F(x) = 2\sqrt[3]{x^2} + c$

B $F(x) = \sqrt{x^3} + c$ D $F(x) = 2\sqrt{x^3} + c$

$F(x) = \int 3\sqrt{x}\ dx = \int 3x^{\frac{1}{2}}\ dx$

$F(x) = \frac{3x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + c = 2\sqrt{x^3} + c$

تابع : التكامل غير المحدد

تدريبات : أوجد كلاً من التكاملات الآتية (تكاملات مباشرة)

❶ $\int y\,(2-15y)\,dy$

❷ $\int x^2(5x^2-8x+3)\,dx$

❸ $\int (x^2+1)(x-2)\,dx$

❹ $\int (u-\frac{1}{u})(u+\frac{1}{u})\,du$

❺ $\int (4x^3-\frac{6}{x^3}+5)\,dx$

❻ $\int (8t^3+\frac{2}{\sqrt{t}}-\frac{12}{t^4})\,dt$

❼ أكمل ما يأتي :

$\int (y^2-5)\,dx =$ ……………………

❽ أكمل ما يأتي :

$\frac{d}{dx}\left(\int f(x)\,dx\right) =$ ……………

تابع : التكامل غير المحدد

تدريبات : أوجد كلاً من التكاملات الآتية (تكاملات مباشرة)

❾ $\int \frac{1}{x^4}\left(x^2 + x^5\right)\, dx$

❿ $\int \sqrt[3]{x}\,(x+4)\, dx$

⓫ $\int \frac{y^3 - \sqrt{y}}{y^2}\, dy$

⓬ $\int \frac{x^2+1}{\sqrt[3]{x}}\, dx$

⓭ $\int \frac{x^2 - 7x - 18}{x+2}\, dx \quad , x \neq -2$

⓮ $\int \frac{(x-4)^2 - 9}{x-7}\, dx \quad , x \neq 7$

تابع : التكامل غير المحدد

تدريبات : أوجد كلاً من التكاملات الآتية — تكامل (دالة و مشتقتها)

❶ $\int x^3 (x^4 + 2)^6 \, dx$

❷ $\int 12x (x^2 + 1)^5 \, dx$

❸ $\int \frac{2x - 3}{(x^2 - 3x + 1)^5} \, dx$

❹ $\int 15x^2 \sqrt[5]{x^3 + 7} \; dx$

❺ $\int (r^2 + 1)(2r^3 + 6r)^6 \, dr$

❻ $\int \frac{x + 7}{\sqrt{x^2 + 14x - 1}} \, dx$

❼ إذا علمت أن : $\int ax^3 (x^4 + 2)^5 \, dx = \frac{(x^4+2)^6}{6} + c$ ، فما قيمة الثابت a ؟

تابع : التكامل غير المحدد

تدريبات : أوجد كلاً من التكاملات الآتية — تكامل (دالة و مشتقتها)

❽ $\int \frac{7x}{\sqrt[3]{3x^2-5}}\, dx$

❾ $\int \frac{u}{\sqrt{1-u^2}}\, du$

❿ $\int \frac{dx}{(x^2+6x+9)^4}$

⓫ $\int (x^2-8x+16)^{\frac{7}{2}}\, dx$

⓬ $\int \frac{5}{x^2}\sqrt{1+\frac{1}{x}}\, dx$

⓭ $\int x^{10}\left(\frac{7}{x}-\frac{2}{x^2}\right)^5 dx$

تابع : التكامل غير المحدد

$\int \sin kx \; dx = -\frac{1}{k} \cos kx + c \quad , k \neq 0$ (تعمم على جميع الدوال المثلثية)

$\int [\sin f(x)] \cdot f'(x) \, dx = -\cos f(x) + c$ (تعمم على جميع الدوال المثلثية)

تدريبات : أوجد كلاً من التكاملات الآتية (الزاوية مقدار من الدرجة الأولى)

❶ $\int 7\sin 3t \; dt$

❷ $\int \cos(3x+2) \, dx$

❸ $\int \sec(\frac{x}{3}) \tan(\frac{x}{3}) \; dx$

❹ $\int \sec^2(\frac{1}{5}u) \; du$

❺ $\int \cot^2\theta \; d\theta$

❻ $\int \tan^2 x \; dx$

❼ ما ناتج : $\int (\cos\theta \sin\theta) \, dx$

A $\frac{1}{2}\sin^2\theta + c$

B $\frac{1}{2}\cos^2\theta + c$

C $-\frac{1}{2}\sin^2\theta + c$

D $(\cos\theta \sin\theta) \, x + c$

❽ ما ناتج : $\int (\cos^2 x + \sin^2 x) \, d\theta$

A $x + c$

B $\theta + c$

D $\frac{\sin 2x}{2} + c$

C $(\cos 2x)\theta + c$

❾ إذا كان ثابت التكامل $C = 5$ ، فإن $\int (\lim_{x \to 0} \frac{\tan x}{x}) \, dx$ يساوي :

A $x - 5$ B $x + 5$ C $x + 6$ D $x - 4$

تابع : التكامل غير المحدد

تدريبات : أوجد كلاً من التكاملات الآتية   تكامل (التبسيط و التكاملات الستة)

❶ $\int 5 \tan\theta \ \cot\theta \ d\theta$

❷ $\int (\cos x + \sin x) \ d\theta$

❸ $\int \frac{1}{\sin^2 x - 1} \ dx$

❹ $\int (2\cos^2 x - 1) \ dx$

❺ $\int \frac{1 + \sin^2\theta}{\sin^2\theta} \ d\theta$

❻ $\int (\cos^4 x - \sin^4 x) \ dx$

❼ $\int \frac{1 + \sin x}{\cos^2 x} \ dx$

❽ $\int \frac{dx}{1 - \cos x}$

إعداد أ./ عابدين

تابع : التكامل غير المحدد

تدريبات : أوجد كلاً من التكاملات الآتية — تكامل (دالة و مشتقتها)

❶ $\int 6\cos^5 x\ \cos x\ dx$	❷ $\int \sin^3 2x\ \cos 2x\ dx$
❸ $\int \cos x\ \sqrt[3]{\sin x - 5}\ dx$	❹ أوجد ناتج التكامل : $\int \frac{x\cos x^2}{\sqrt{\sin x^2}}\ dx$
❺ $\int \sqrt{\tan x}\ \sec^2 x\ dx$	❻ $\int \cot^4 x\ \csc^2 x\ dx$
❼ $\int (\cot^3 x + \cot x)\ dx$	❽ $\int (\tan^3 x + \tan x)\ dx$
❾ متطابقات المقلوب $\int \frac{d\theta}{\cot^5\theta\ \cos^2\theta}$	❿ فرق بين مربعين $\int (\tan^4 x - 1)\ dx$

إعداد أ./ عابدين

ريض 366

تابع : التكامل غير المحدد

ملحوظة : عند حل مسائل تكاملات الدوال المثلثية يجب أن تكون الزاوية مُوحّدة (المسألة بنفس الزاوية)

$\sin 2x = 2\sin x \cos x$

$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\sin^2 x$

❶ $\int \sec^5\theta \tan\theta \, d\theta$

❷ إذا كانت x زاوية حادة ، فأوجد :

$\int \sqrt{4\csc^6 x - 4\csc^4 x} \, dx$

الجواب : $= -\cot^2 x + c$

❸ $\int \sec^4 x \, dx$

بنفس الطريقة $\int \csc^4 x \, dx$

❹ $\int \frac{4\tan u}{1+\cos 2u} \, du$

❺ $\int \frac{\cos 2x}{\cos x - \sin x} \, dx$

❻ أوجد $\int \frac{\cot x - \csc x}{\sin x} \, dx$

توزيع البسط على المقام

❼ أوجد الدالة الأصلية $F(x)$ للدالة :

$f(x) = \sec^4 x \tan^3 x$

الجواب: $F(x) = \int \sec^4 x \tan^3 x \, dx$

$F(x) = \frac{1}{4}\tan^4 x + \frac{1}{6}\tan^6 x + c$

❽ **ما ناتج :** $\int (\sin x + \cos x)^2 \, dx$

A $x - \frac{1}{2}\cos 2x + c$

B $x + \sin^2 x + c$

C $x - \cos^2 x + c$

D جميع ما ذكر صحيح

تابع : التكامل غير المحدد

تكاملات $\sin^n$ ، $\cos^n$

الأس n فردي في أصل السؤال

نجزئ الأس ، ثم نستعمل متطابقة فيثاغورس ، دالة ومشتقتها

$\sin^2\Delta = 1 - \cos^2\Delta$, $\cos^2\Delta = 1 - \sin^2\Delta$

الأس n زوجي في أصل السؤال

نجزئ الأس ، ثم نستعمل قوانين النصف (مُربّعة) ، التكاملات الستة

$\sin^2\Delta = \frac{1}{2}(1 - \cos 2\Delta)$, $\cos^2\Delta = \frac{1}{2}(1 + \cos 2\Delta)$

❶ إذا كانت : $f(x) = \cos^2 x$ ، $g(x) = 2x$ ، فأوجد $\int [fog](x)dx$

الحل : $\int [fog](x)dx = \int f[g(x)]dx$

$$= \int \cos^2 2x \, dx$$

$$= \int \frac{1}{2}(1 + \cos 4x)\, dx$$

$$= \frac{1}{2}\left(x + \frac{\sin 4x}{4}\right) + c$$

$$= \frac{1}{2}x + \frac{\sin 4x}{8} + c$$

❷ $\int \sin^2 3x \, dx$ (بالمثل $\int \sin^2 \frac{x}{2}\, dx$)

❸ $\int \cos^5 x \, dx$ (بالمثل $\int \sin^5 x\, dx$)

الحل:

$$= \int \cos x\,(\cos^2 x)^2\, dx$$

$$= \int \cos x\,(1 - \sin^2 x)^2\, dx$$

$$= \int \cos x\,(1 - 2\sin^2 x + \sin^4 x)\, dx$$

$$= \int (\cos x - 2\sin^2 x \cos x + \sin^4 x \cos x)\, dx$$

$$= \sin x - \frac{2}{3}\sin^3 x + \frac{1}{5}\sin^5 x + c$$

❹ $\int \sin^3\theta \, d\theta$ (بالمثل $\int \cos^3\theta\, d\theta$)

❺ $\int \sin^4 x \, dx$ (بالمثل $\int \cos^4 x\, dx$) ⇐ **الحل:** $\int \sin^4 x\, dx = \int (\sin^2 x)^2\, dx$

$$= \int \left(\frac{1}{2}(1 - \cos 2x)\right)^2 dx = \int \frac{1}{4}(1 - 2\cos 2x + \cos^2 2x)\, dx$$

$$= \int \frac{1}{4}\left(1 - 2\cos 2x + \frac{1}{2}(1 + \cos 4x)\right) dx = \int \frac{1}{4}\left(\frac{3}{2} - 2\cos 2x + \frac{1}{2}\cos 4x\right) dx$$

$$= \int \left(\frac{3}{8} - \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{1}{8}\cos 4x\right) dx = \frac{3}{8}x - \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{32}\sin 4x + c$$

3 / ث
ف 2

سلسلة التفوق

3 / ث
ف 2

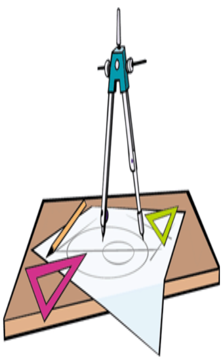
في الرياضيات

ريض 366

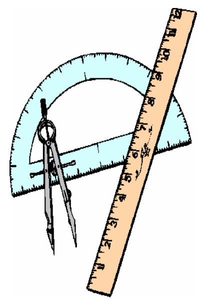
الوحدة الرابعة

التكامل المُحدّد

إعداد : أ. عابدين حامد فؤاد



اسم الطـــــالب : ....



ملحوظة : هذه المذكرة ليست بديلاً عن الكتاب المدرسي (الكتاب هو المرجع)

نسألكم الدعاء ، مع تمنياتي للجميع بالنجاح والتفوق

النظرية الأساسية للتفاضل والتكامل

قواعد وملاحظات التكامل المحدد

النظرية الأساسية للتفاضل والتكامل : إذا كانت $f(x)$ متصلة في الفترة $[a,b]$ ، وكانت $F(x)$ دالة أصلية لها في هذه الفترة فإن :

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)}$$

ملحوظة : ① التكامل المحدد لا يحتوي على ثابت للتكامل . ② قيمة التكامل المحدد هي عدد حقيقي .

$$\frac{d}{dx}\left(\int f(x)\,dx\right) = f(x)$$

$$\frac{d}{dx}\left(\int_a^b f(x)\,dx\right) = 0$$ [مشتقة التكامل المحدد = صفر]

خواص التكامل المحدد : إذا كانت $f(x)$ ، $g(x)$ قابلة للتكامل على الفترة $[a,b]$

❶ $\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$

❷ $\int_a^a f(x)\,dx = 0$

❸ $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx \quad , c \in [a,b]$ (خاصية الجسر)

❹ $\int_a^b k\, f(x)\,dx = k\int_a^b f(x)\,dx \quad , k \in R$

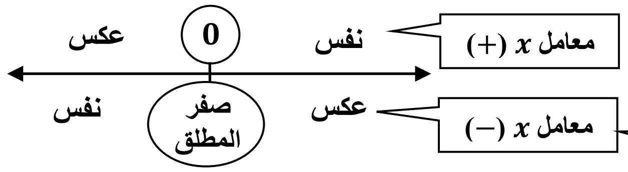
❺ $\int_a^b [f(x) \pm g(x)]\,dx = \int_a^b f(x)\,dx \pm \int_a^b g(x)\,dx$

تذكر أن

$f'(x) = \int f''(x)\,dx$

$f(x) = \int f'(x)\,dx$

ملاحظة : عندما يحتوي التكامل على مطلق فيجب إعادة تعريف المطلق ، ومن ثم نُعين حدود التكامل .



$$|ax-b| = |b-ax| = \begin{cases} ax-b & , x \geq \frac{b}{a} \\ -ax+b & , x < \frac{b}{a} \end{cases}$$

ممكن نحوله إلى موجب بالإبدال

تمارين على التكامل المحدد

❶ احسب قيمة : $\int_0^3 \frac{2x+1}{\sqrt{x^2+x+4}}\,dx$

❷ احسب : $\int_4^5 (u^2 - 8u + 16)^3\,du$

تابع : التكامل المحدد

تابع : تمارين على التكامل المحدد (مسائل دالة المطلق)

❸ احسب قيمة : $\int_{-2}^{0} 6x\,|x-1|\;dx$

❹ احسب قيمة : $\int_{-1}^{1} 9x\,|x+2|\;dx$

❺ احسب قيمة : $\int_{0}^{4} f(x)\;dx$ إذا كانت

$f(x) = x^2\,|x-2| \quad , \; x \in [-4,4]$

❻ احسب قيمة : $\int_{-1}^{3} f(x)\;dx$ إذا كانت

$f(x) = |\,4-2x\,| \quad , \; x \in [-3,3]$

تابع : التكامل المحدد

تابع : تمارين على التكامل المحدد

❼ ما قيمة الثابت b ، حيث $b > 2$

إذا كان : $\int_2^b 3x\,|x|\ dx = 56$ ؟

❽ أوجد قيمة الثابت n إذا كان :

$\int_0^3 n\,(x+1)^{n-1}\,dx = 15$

❾ إذا كان : $\int_b^{-2}(f(x) - 2)\,dx = 7$

، $\int_{-2}^{b} f(x)\,dx = 5$ ، فأوجد قيمة b ؟

❿ إذا كان : $\int_2^5 (f(x) + 2x)\,dx = 17$

، فما قيمة $\int_5^2 f(x)\ dx$ ؟

⓫ <u>اختر الإجابة الصحيحة</u> : إذا كان $\int_2^3 f(x)\ dx = \frac{5}{2}$ ، فما قيمة $\int_3^2 f(x)\ dx$ ؟

A $\frac{2}{5}$ B $-\frac{2}{5}$ C $\frac{5}{2}$ D $-\frac{5}{2}$

تابع : التكامل المحدد

تابع : تمارين على التكامل المحدد

⑫ إذا كانت $c \in [a, b]$

، وكان : $\int_a^b \frac{1}{2} f(x)\, dx = 5$

، وكان : $\int_a^c f(x)\, dx = -5$

، فما قيمة : $\int_b^c f(x)\, dx$ ؟

باستعمال خاصية الجسر

A 5

B -5

C 15

D -15

⑬ إذا كانت f كثيرة حدود بحيث أن :

$f''(x) = 6$ ، $\int_0^1 f'(x)\, dx = 5$

، $f(0) = 10$ ، فأوجد قاعدة الدالة f .

ج : $f(x) = 3x^2 + 2x + 10$

$f'(x) = \int f''(x)\, dx$

$f(x) = \int f'(x)\, dx$

⑭ إذا كان : $y = \int_2^4 \sqrt[3]{x^4 + 1}\ \ dx$

، فما قيمة $\frac{dy}{dx}$ عندما $x = 3$ ؟

A 0.5

B $\frac{1}{3}$

C 0

D $\sqrt[3]{5}$

⑮ ما قيمة : $\int_{-3}^0 (\, x - |x|\,)\, dx$ ؟

A 0

B -9

C -6

D -3

تابع : بطاقة (12) ريض 366

تابع : التكامل المحدد

ملاحظة
$\cot\frac{\pi}{2} = \frac{\cos\frac{\pi}{2}}{\sin\frac{\pi}{2}} = 0$

التأكد بالحاسبة : التحويل إلى نظام Rad ، حدود التكامل بالراديان بدلالة π

$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$

$a^3 \pm b^3 = (a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2)$

يجب توحيد الزوايا

❶ احسب : $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{2}\sin 2x \cos x \; dx$

❷ احسب قيمة : $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^3 x - \cos^3 x}{\sin x - \cos x} \; dx$

❸ احسب قيمة : $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{4\cos^2 u}{\cos 2u + 1} \; du$

❹ $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^2 x \; dx - \int_{\frac{\pi}{4}}^{0} \cos^2 x \; dx$

❺ $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{\sin^2 x \; \cos^2 x} \; dx$

ممكن استعمال
$1 = \sin^2 x + \cos^2 x$
أو بمتطابقات المقلوب

استعمل : $\sin x \cos x = \frac{1}{2}\sin 2x$

ج : $\frac{2\sqrt{3}}{3}$

❻ أثبت أن : $\int_0^{\frac{\pi}{4}} (\cos^2 x - \sin^2 x) \; dx$

$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} 2\sin x \cos x \; dx$

إعداد أ./ عابدين

تابع : بطاقة (12) ريض 366

ريض 366

تابع : التكامل المحدد

يجب توحيد الزوايا بالمسألة باستعمال قوانين الضعف والنصف كما درسنا سابقاً ، حدود التكامل بالراديان

❼ احسب قيمة : $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x}{\cos^5 x}\, dx$

❽ احسب قيمة : $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos\theta}{(1+\sin\theta)^3}\, d\theta$

❾ احسب قيمة : $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 4\theta}{\sin 2\theta}\, d\theta$

❿ احسب قيمة : $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{27}{\tan^5 x\ \sin^2 x}\, dx$

⓫ ما قيمة : $\int_{\pi}^{\pi} \sin^5 x\ dx$ ؟

A 0 C $\frac{\pi}{6}$

B 1 D π

⓬ إذا كان $\int_{\frac{\pi}{2}}^{b} \cos x\, dx = -1$ ، ما قيمة b ؟

A $\frac{\pi}{3}$ C $\frac{\pi}{6}$

B $\frac{\pi}{4}$ D π

تابع : التـكامـل المحـدد

تابع : تمارين على التكامل المحدد

❶❸ احسب قيمة : $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 x \ dx$

❶❹ احسب قيمة : $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \csc^4 x \ dx$

❶❺ إذا كان : $\int_{0}^{b} \cos^2 u \sin u \ du = \frac{1}{3}$

، فأوجد قيمة b ، حيث $b \in [\,0\,,\pi]$

❶❻ إذا كان : $\int_{\frac{\pi}{6}}^{b} \sec^2 x \ \tan x \ dx = \frac{4}{3}$

، فأوجد قيمة b ، حيث $b \in \left[\,0\,,\frac{\pi}{2}\right]$