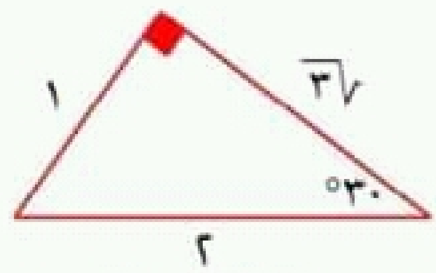
النسب المثلثية لبعض الزوايا الخاصة

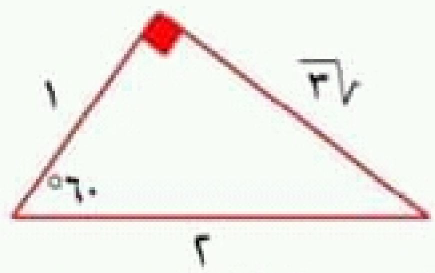


النسب المثلثية للزاوية ٣٠°

① حا٣٠° = $\frac{١}{٢}$

② حتا٣٠° = $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$

③ طا٣٠° = $\frac{١}{\sqrt{٣}}$

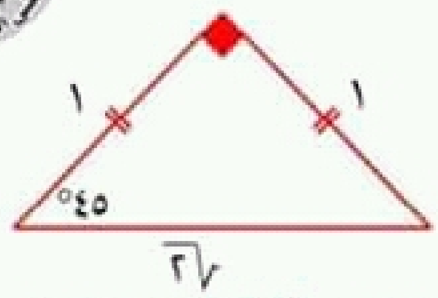


النسب المثلثية للزاوية ٦٠°

① حا٦٠° = $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$

② حتا٦٠° = $\frac{١}{٢}$

③ طا٦٠° = $\sqrt{٣}$



النسب المثلثية للزاوية ٤٥°

① حا٤٥° = $\frac{١}{\sqrt{٢}}$

② حتا٤٥° = $\frac{١}{\sqrt{٢}}$

③ طا٤٥° = ١

ايجاد النسب المثلثية لزاوية ما باستخدام الآلة الحاسبة

في الآلة الحاسبة يوجد ٣ مفاتيح هي : tan cos sin

① المفتاح sin يعنى (حا) ② المفتاح cos يعنى (حتا) ③ المفتاح tan يعنى (طا)

فمثلا: أوجد باستخدام الآلة الحاسبة : ① حا ٨٢° ② حتا ٢٤′ ٣٦° ③ طا ١٢″ ٣٠′ ٥٥°

نضغط على مفتاح **sin** أو **cos** أو **tan**

على حسب ما يذكر في المسألة ثم ندخل قيمة الزاوية (الأرقام) ثم مفتاح = فنحصل على الناتج كالتالي :

① حا ٨٢° الناتج ≃ ٠,٩٩٠٣ — sin 8 2 =

② حتا ٢٤′ ٣٦° الناتج ≃ ٠,٨٠٤٩ — cos 3 6 °''' 2 4 °''' =

③ طا ١٢″ ٣٠′ ٥٥° الناتج ≃ ١,٤٥٥٢ — tan 5 5 °''' 3 0 °''' 1 2 °''' =

ايجاد قيمة الزاوية اذا علم النسبة المثلثية لها باستخدام الآلة الحاسبة

إذا كان لدينا النسبة المثلثية لزاوية ما ويراد معرفة قياس الزاوية بالدرجات فإننا نتبع الآتي :

نضغط على مفتاح **shift** ثم أيا من المفاتيح **sin** أو **cos** أو **tan** على حسب ما يذكر في المسألة

ثم = ثم ,,,, فنحصل على قياس الزاوية .

أوجد هـ حيث هـ قياس زاوية حادة : ① حا هـ = ٠,٥٧٥٣ ② حتا هـ = ٠,٣ ③ طا هـ = ١,٢٣٤٥

① حا هـ = ٠,٥٧٥٣ — shift sin . 5 7 5 3 = °'''

فيكون : ق($\hat{هـ}$) = ١٤″ ٧′ ٣٥°

② حتا هـ = ٠,٣ — shift cos . 3 = °'''

فيكون : ق($\hat{هـ}$) = ٣٣″ ٣٢′ ٧٢°

③ طا هـ = ١,٢٣٤٥ — shift tan 1 . 2 3 4 5 = °'''

فيكون : ق($\hat{هـ}$) = ٢٧″ ٥٩′ ٥٠°

ملخص حســـاب المثلثات

النسب المثلثية الأساسية للزاوية الحادة

هي علاقة تربط بين أطوال أضلاع مثلث قائم الزاوية واحدي الزاويتين الحادتين

النسب المثلثية الأساسية لأي زاوية حادة هي :

❶ جيب الزاوية : وهي تساوي $\frac{\text{طول المقابل}}{\text{طول الوتر}}$ ويرمز لها بالرمز " حا "

❷ جيب تمام الزاوية :وهي تساوي $\frac{\text{طول المجاور}}{\text{طول الوتر}}$ ويرمز لها بالرمز " حتا "

❸ ظل الزاوية : وهي تساوي $\frac{\text{طول المقابل}}{\text{طول المجاور}}$ ويرمز لها بالرمز " طا "

فمثلاً: إذا كان Δ أ ب حـ قائم الزاوية في ب فإن النسب المثلثية لزاوية حـ هي :

حا حـ $= \frac{\text{طول المقابل}}{\text{طول الوتر}} = \frac{\text{أب}}{\text{أحـ}}$ حتا حـ $= \frac{\text{طول المجاور}}{\text{طول الوتر}} = \frac{\text{ب حـ}}{\text{أحـ}}$

طا حـ $= \frac{\text{طول المقابل}}{\text{طول المجاور}} = \frac{\text{أب}}{\text{ب حـ}}$

ملاحظات هامة على النسب المثلثية

❶ النسب المثلثية الأساسية لأي زاوية حادة هي : حا ، حتا ، طا

❷ لإيجاد النسب المثلثية لأي زاوية حادة في المثلث القائم يجب أولاً إيجاد أطوال أضلاع المثلث القائم

وذلك عن طريق :

نظرية فيثاغورث : في المثلث القائم الزاوية

(أ) $(\text{الوتر})^2 = (\text{الضلع الأول})^2 + (\text{الضلع الثاني})^2$

(ب) $(\text{الضلع الأول})^2 = (\text{الوتر})^2 - (\text{الضلع الثاني})^2$

(حـ) $(\text{الضلع الثاني})^2 = (\text{الوتر})^2 - (\text{الضلع الأول})^2$

❸ جيب أي زاوية حادة يساوي جيب تمام الزاوية المتممة لها

أي أن : إذا كان : ق($\hat{أ}$) + ق($\hat{ب}$) = $90°$ فإن : حا أ = حتا ب ، حا ب = حتا أ

والعكس : إذا كانت ق($\hat{أ}$) ، ق($\hat{ب}$) زاويتين حادتين وكان : حا أ = حتا ب فإن : ق($\hat{أ}$) + ق($\hat{ب}$) = $90°$

❹ ظل الزاوية = جيب الزاوية ÷ جيب تمام الزاوية أي أن : طا = $\frac{\text{حا}}{\text{حتا}}$

❺ في Δ أ ب حـ إذا كان : ق($\hat{ب}$) = $90°$ فإن : حا أ + حتا حـ = ٢ حا أ أو ٢ حتا حـ

❽ المستقيمان المتعامدان حاصل ضرب ميلاهما يساوى -1 أى أن : إذا كان $ل_1 \perp ل_2$ فإن : $م_1 \times م_2 = -1$

والعكس : إذا كان: $م_1 \times م_2 = -1$ فإن: $ل_1 \perp ل_2$

أي أن : إذا كان حاصل ضرب ميلي المستقيمين $= -1$ فإن المستقيمين متعامدين

فمثلا: إذا كان: $م_1 = -\frac{3}{4}$ ، $ل_1 \perp ل_2$ فإن: $م_2 = \frac{4}{3}$ أى أننا : نقلب ونغير الإشارة

إذا كان: $\overleftrightarrow{أب} \perp \overleftrightarrow{جد}$ وكان ميل $\overleftrightarrow{أب} = 5$ فإن: ميل $\overleftrightarrow{جد} = -\frac{1}{5}$

إذا كان: $ل_1 \perp ل_2$ ، $م_2 =$ صفر فإن: $م_1$ غير معرف

كيفية تكوين معادلة الخط المستقيم

أولاً : إيجاد الميل (م) :

قد يكون موجوداً مباشرة وإن لم يكن موجوداً فنأتى بالميل بإحدى الطرق السابقة حسب معطيات المسألة

ثانياً : إيجاد الجزء المقطوع من محور الصادات (ح) :

قد يكون موجود مباشرة وإن لم يكن موجود فنأتى به من خلال :

معادلة الخط المستقيم : طول الجزء المقطوع من محور الصادات $= \left| \frac{-\text{الحد المطلق}}{\text{معامل ص}} \right|$

عن طريق نقطة تنتمى لهذا المستقيم فنعوض بها ونحصل على الجزء المقطوع من محور الصادات

ملاحظه هامة : إذا كان المستقيم يمر بمنتصف مستقيم آخر فإننا نوجد نقطة إحداثى المنتصف أولاً ثم الميل والجزء المقطوع من محور الصادات ثم نكون المعادلة .

ملاحظات هامة على معادلة الخط المستقيم

❶ معادلة المستقيم الذى يمر بنقطة الأصل (٠،٠) هى : ص = م س

❷ معادلة محور السينات هى ص = ٠ ومعادلة محور الصادات هى س = ٠

❸ معادلة المستقيم الموازى لمحور السينات ويقطع محور الصادات فى النقطة (٠، ص) هى ص = الصادى

❹ معادلة المستقيم الموازى لمحور الصادات ويقطع محور السينات فى النقطة (س ،٠) هى س = السينى

❺ لإيجاد نقطة تقاطع المستقيم مع محور السينات نضع ص = ٠

❻ لإيجاد نقطة تقاطع المستقيم مع محور الصادات نضع س = ٠

بعض القوانين المستخدمة لحل التمارين

❶ محيط المربع = طول الضلع × ٤	❷ مساحة المربع = مربع طول ضلعه أو $\frac{1}{2}$ مربع طول قطره
❸ محيط المستطيل = (الطول + العرض) × ٢	❹ مساحة المستطيل = الطول × العرض
❺ مساحة المعين = $\frac{1}{2}$ حاصل ضرب طولا قطريه	❻ مساحة المثلث = $\frac{1}{2}$ طول القاعدة × الإرتفاع
❼ محيط الدائرة = $2\pi نق$	❽ مساحة الدائرة = $\pi نق^2$

طرق ايجاد ميل الخط المستقيم

❶ **إذا كان المستقيم يمر بنقطتين فإن:**

$$\text{م} = \frac{\text{فرق الصادات}}{\text{فرق السينات}} = \frac{\text{ص}_{٢} - \text{ص}_{١}}{\text{س}_{٢} - \text{س}_{١}}$$

❷ **إذا كان المستقيم يصنع زاوية موجبة "هـ" مع الاتجاه الموجب لمحور السينات فإن:**

$$\text{م} = \text{طا هـ}$$

حيث "هـ" قياس الزاوية الموجبة التي يصنعها المستقيم مع الاتجاه الموجب لمحور السينات

❸ **من معادلة المستقيم علي الصورة:** $\text{أس} + \text{ب ص} + \text{حـ} = ٠$

$$\text{م} = \frac{-\ \text{معامل س}}{\text{معامل ص}} = \frac{-\text{أ}}{\text{ب}}$$

❹ **من معادلة المستقيم علي الصورة:** $\text{ص} = \text{م س} + \text{حـ}$

م = معامل س بنفس إشارته

❺ إذا علم ميل المستقيم الموازى له فيكون الميل المطلوب = الميل المعطى

❻ إذا علم ميل المستقيم العمودى عليه فيكون الميل المطلوب = مقلوب الميل المعطى بعكس اشارته

ملاحظات هامة على ميل الخط المستقيم

❶ ميل محور السينات = صفر

❷ ميل المستقيم الموازى لمحور السينات " مستقيم أفقى" = صفر

فمثلاً : إذا كان : المستقيم $\overleftrightarrow{\text{أب}}$ يوازي محور السينات حيث أ(٢،٤)، ب(٣،ك) فأوجد قيمة ك ؟

∵ $\overleftrightarrow{\text{أب}}$ // محور السينات ∴ ميل $\overleftrightarrow{\text{أب}}$ = صفر

∴ $\text{م} = \frac{\text{ك} - ٢}{٣ - ٤} = \text{صفر}$ ومنها البسط = صفر ∴ ك − ٢ = ٠ $\boxed{∴ \text{ك} = ٢}$

❸ ميل محور الصادات غير معرف $\left(\frac{١}{\text{صفر}}\right)$

❹ ميل المستقيم الموازى لمحور الصادات " مستقيم رأسى " غير معرف $\left(\frac{١}{\text{صفر}}\right)$

فمثلاً: إذا كان : المستقيم $\overleftrightarrow{\text{أب}}$ يوازي محور الصادات حيث أ(ك،٥) ، ب(٤،−١) فأوجد قيمة ك ؟

∵ $\overleftrightarrow{\text{أب}}$ // محور الصادات ∴ ميل $\overleftrightarrow{\text{أب}}$ غير معرف

∴ $\text{م} = \frac{-١ - ٥}{٤ - \text{ك}}$ غير معرف ومنها المقام = صفر ∴ ٤ − ك = ٠ $\boxed{∴ \text{ك} = ٤}$

❺ ميل المستقيم الذى يصنع زاوية حادة مع الإتجاه الموجب لمحور السينات يكون موجباً

❻ ميل المستقيم الذى يصنع زاوية منفرجة مع الإتجاه الموجب لمحور السينات يكون سالباً

❼ المستقيمان المتوازيان ميلاهما متساويان أى أن : إذا كان : $\text{ل}_{١} \ // \ \text{ل}_{٢}$ فإن : $\text{م}_{١} = \text{م}_{٢}$

والعكس : إذا كان: $\text{م}_{١} = \text{م}_{٢}$ فإن: $\text{ل}_{١} \ // \ \text{ل}_{٢}$ أي أن : إذا تساوي ميلا مستقيمين كان المستقيمان متوازيين

فمثلا: إذا كان: $\text{م}_{١} = ٠{,}٢$ ، $\text{ل}_{١} \ // \ \text{ل}_{٢}$ فإن $\text{م}_{٢} = \text{م}_{١} = ٠{,}٢$

إذا كان: $\overleftrightarrow{\text{أب}} \ // \ \overleftrightarrow{\text{حـ ء}}$ وكان ميل $\overleftrightarrow{\text{أب}} = \frac{٢}{٣}$ فإن ميل $\overleftrightarrow{\text{حـ ء}}$ = ميل $\overleftrightarrow{\text{أب}} = \frac{٢}{٣}$

إذا كان: $\text{م}_{١} = \frac{١}{٢}$ ، $\text{م}_{٢} = \frac{١}{٢}$ فإن: $\text{ل}_{١} \ // \ \text{ل}_{٢}$

ملاحظات هامة على البعد بين نقطتين

① بعد النقطة (س ، ص) عن نقطة الأصل (٠ ، ٠) = $\sqrt{س^2 + ص^2}$

② بعد النقطة (س ، ص) عن محور السينات = |ص| وحدة طول

③ بعد النقطة (س ، ص) عن محور الصادات = |س| وحدة طول

كيف نوجد البعد العمودى

لإيجاد البعد بين المستقيمين: س − ٢ = ٠ ، س + ٣ = ٠ :

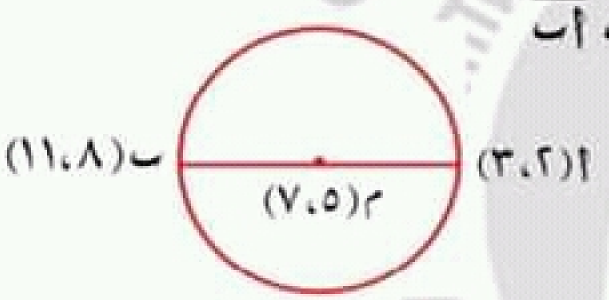
س − ٢ = ٠ **منها** س = ٢ ، س + ٣ = ٠ **ومنها** س = −٣

فيكون : البعد العمودى = |−٣ − ٢| = |٥| = ٥ وحدة طول

> في الدائرة م يكون إحداثيى نقطة مركزها = منتصف أي قطر فيها
> ويكون نصف قطرها (نق) البعد بين نقطة مركزها وأى نقطة تنتمى للدائرة م

فمثلاً : دائرة مركزها م ، $\overline{أب}$ قطر فيها حيث: أ (٢ ، ٣) ، ب (٨ ، ١١) فأوجد: إحداثيى نقطة م.

احداثيي نقطة مركز الدائرة = منتصف القطر $\overline{أب}$ أي : م منتصف $\overline{أب}$



∴ م = ($\frac{٢+٨}{٢}$ ، $\frac{٣+١١}{٢}$)

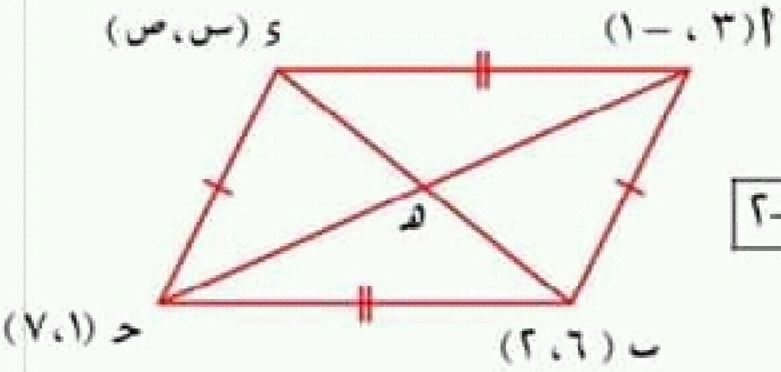
∴ م = ($\frac{١٠}{٢}$ ، $\frac{١٤}{٢}$) = (٥ ، ٧)

> إذا كان لدينا شكل رباعي فيه القطران ينصف كلا منهما الأخر
> ولدينا رأس مجهولة ونريد إيجادها فأننا نوجد أولاً نقطة تقاطع قطرية
> باستخدام قانون التنصيف ثم احداثيى الرأس المجهولة
> **وللتأكيد نستخدم العلاقة الآتية :**
> إحداثي الرأس المجهول = مجموع طرفي القطر المعلوم − الطرف المقابل للمجهول.

أب حء متوازي أضلاع تقاطع قطراه في هـ حيث: أ(٣ ، −١) ، ب(٦ ، ٢)، ح(١ ، ٧) أوجد إحداثيي : ء ، هـ

∵ الشكل أب حء متوازي أضلاع ∴ القطران ينصف كلا منهما الآخر

∵ هـ نقطة تقاطع قطرية فيكون نقطة هـ = ($\frac{٣+١}{٢}$ ، $\frac{−١+٧}{٢}$) = (٢ ، ٣)



نفرض أن ء = (س ، ص)

∴ هـ = ($\frac{س+٦}{٢}$ ، $\frac{ص+٢}{٢}$) = (٢ ، ٣)

$\frac{س+٦}{٢}$ = ٢ ⇐ س + ٦ = ٤ ⇐ س = ٤ − ٦ ⇐ $\boxed{س = −٢}$

$\frac{ص+٢}{٢}$ = ٣ ⇐ ص + ٢ = ٦ ⇐ ص = ٦ − ٢ ⇐ $\boxed{ص = ٤}$

∴ ء = (س ، ص) = (−٢ ، ٤)

للتأكيد : ء = أ + ح − ب

= (٣ ، −١) + (١ ، ٧) − (٦ ، ٢) = (٣ + ١ − ٦ ، −١ + ٧ − ٢) ∴ ء = (−٢ ، ٤)

مراجعة لقواعد وقوانين الهندسة وحساب المثلثات

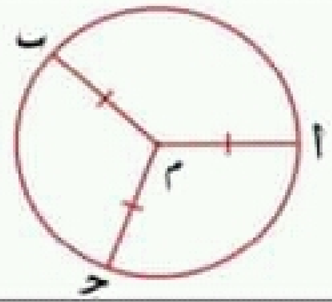
المطلوب إثباته	باستخدام قانون البعد $أب = \sqrt{(س_1 - س_2)^2 + (ص_1 - ص_2)^2}$	باستخدام الميل $م = \frac{ص_2 - ص_1}{س_2 - س_1}$
لإثبات أن النقاط : أ ، ب ، حـ **تقع على استقامة واحدة**	نوجد أولاً : أب ، ب حـ ، أحـ ثم نثبت أن: أكبر بعد = مجموع البعدين الآخرين	نثبت: ميل $\overleftrightarrow{أب}$ = ميل $\overleftrightarrow{ب حـ}$ ، ب نقطة مشتركة
لإثبات أن النقاط : أ ، ب ، حـ **ليست على استقامة واحدة**	نوجد أولاً : أب ، ب حـ ، أحـ ثم نثبت أن : أكبر بعد ≠ مجموع البعدين الآخرين	نثبت: ميل $\overleftrightarrow{أب}$ ≠ ميل $\overleftrightarrow{ب حـ}$
لإثبات أن النقاط : أ ، ب ، حـ هى رؤوس مثلث	نوجد أولاً : أب ، ب حـ ، أحـ ثم نثبت أن : مجموع طولي أي ضلعين > طول الضلع الثالث	نثبت: ميل $\overleftrightarrow{أب}$ ≠ ميل $\overleftrightarrow{ب حـ}$
المثلث منفرج الزاوية	نوجد مربع طول كل ضلع من أطوال أضلاعه الثلاثة ثم نثبت أن : مربع اكبر الأضلاع > مجموع مربعي الضلعين الآخرين	
المثلث حاد الزاويا	نوجد مربع طول كل ضلع من أطوال أضلاعه الثلاثة ثم نثبت أن : مربع اكبر الأضلاع < مجموع مربعي الآخرين	
المثلث قائم الزاوية	نوجد مربع طول كل ضلع من أطوال أضلاعه الثلاثة ثم نثبت أن : مربع اكبر الأضلاع = مجموع مربعي الآخرين	نوجد: ميل $\overleftrightarrow{أب}$ ، ميل $\overleftrightarrow{ب حـ}$ ثم نثبت أن : ميل $\overleftrightarrow{أب}$ × ميل $\overleftrightarrow{ب حـ}$ = −١
المثلث المتساوى الأضلاع	نوجد أطوال أضلاعه الثلاثة ثم نثبت: تساوى أطوال أضلاعه الثلاثة	
المثلث المتساوى الساقين	نوجد أطوال أضلاعه الثلاثة ثم نثبت: تساوي أي ضلعين فقط من أضلاعه	
المثلث المختلف الأضلاع	نوجد أطوال أضلاعه الثلاثة ثم نثبت: اختلاف أطوال أضلاعه الثلاثة	

لإثبات أن : أ ، ب ، حـ تقع علي دائرة واحدة مركزها م.

أولاً : نوجد البعد بين النقاط ومركز الدائرة.

فإذا كانت الأبعاد متساوية فإن النقاط تقع علي دائرة واحدة.

أي نثبت أن : م أ = م ب = م حـ = نق



ملخص لأثبات الأشكـــال الرباعية

	متـــوازى الأضـــلاع	المستطيـل	المعيـــن	المـــربع
باستخدام قانون البعد	إذا كان أ ب حـ ء شكل رباعي ويراد إثباته متوازي أضلاع فإننا نثبت أن : أب = حء ، بحـ = أء (تساوي كل ضلعين)	إذا كان أ ب حـ ء شكل رباعي ويراد إثباته مستطيل فإننا نثبت أن : ① أب = حء ، بحـ = أء (تساوي كل ضلعين) ② أحـ = بء (تساوي أقطاره)	إذا كان أ ب حـ ء شكل رباعي ويراد إثباته معين. فإننا نثبت أن : ① أب = بحـ = حء = أء (تساوي أضلاعه الأربعة) ② أحـ ≠ بء (عدم تساوي أقطاره)	إذا كان أ ب حـ ء شكل رباعي ويراد إثباته مربع فإننا نثبت أن : ① أب = بحـ = حء = أء (تساوي أضلاعه الأربعة) ② أحـ = بء (تساوي أقطاره)
باستخدام ميل المستقيم	(أ ب حـ ء) نثبت أن : ميل أب = ميل حء فيكون : أب // حء نثبت أن : ميل بحـ = ميل أء فيكون : بحـ // أء فيكون الشكل متوازى أضلاع	(أ ب حـ ء) نثبت أنه متوازي أضلاع أولاً ثم نثبت أن : ميل أب × ميل بحـ = −١ فيكون : أب ⊥ بحـ فيكون الشكل مستطيل	(أ ب حـ ء) نثبت أنه متوازي أضلاع أولاً ثم نثبت أن : ميل أحـ × ميل بء = −١ فيكون : أحـ ⊥ بء فيكون الشكل معين	(أ ب حـ ء) نثبت أنه متوازي أضلاع أولاً ثم نثبت أن : ميل أب × ميل بحـ = −١ فيكون : أب ⊥ بحـ فيكون الشكل مستطيل ميل أحـ × ميل بء = −١ فيكون : أحـ ⊥ بء فيكون الشكل معين ومن كل ما سبق يكون مربع

	متوازى الأضلاع		شبه المنحرف
باستخدام قانون التنصيف	إحداثي نقطة منتصف أحـ = إحداثي نقطة منتصف بء فيكون: أحـ ، بء ينصف كلاً منهما الآخر	باستخدام ميل المستقيم	(أ ب حـ ء) نثبت أن : ميل أء = ميل بحـ فيكون : أء // بحـ نثبت أن : ميل أب ≠ ميل حء فيكون : أب لا يوازى حء