الدرس الخامس

التغير المباشر والتناسب

Direct Variation and Proportion

التغير المباشر

فكر وناقش

تأمل العلاقة بين ضغط الماء (ص) وعمق الغوص تحت سطح الماء (س) بالنسبة للغواص.

يوضح الجدول التالي معدل التغير في ضغط الماء إلى عمق الغواص:

العمق (س) متر	الضغط (ص) كيلو باسكال	$\frac{ص}{س}$ (كيلو باسكال/متر)
٣	٢٩,٤	$\frac{٢٩,٤}{٣} = ٩,٨$
٦	٥٨,٨	$\frac{٥٨,٨}{٦} = ٩,٨$
٩	٨٨,٢	$\frac{٨٨,٢}{٩} = ٩,٨$
١٢	١١٧,٦	$\frac{١١٧,٦}{١٢} = ٩,٨$

نسبة الضغط إلى ال...

$= \frac{ص}{س} = ٩,٨$

$ص = ٩,٨ س$

الضغط يتغير ...
مباشرًا حسب ...
العمق.

الصورة العامة لمعادلة التغير المباشر ص = م س، حيث م ثابت، س المتغير المستقل، ص المتغير التابع (يتغير مباشرة حسب تغير قيم س).

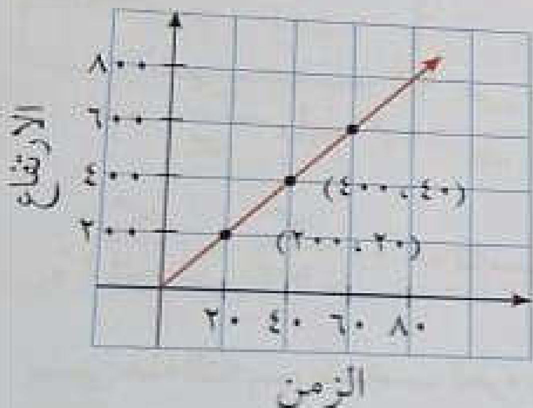
تدريب

قدّم التغير المباشر من خلال إكمال الجدول المقابل:

ص = ٢ س		
س	ص	$\frac{ص}{س}$
٥		
٨		
١٠		
٢٠		

مثال ١

الشكل المقابل يمثل معدل التغير في ارتفاع طائرة حيث يوضح العلاقة بين المسافة التي تحركها الطائرة رأسياً (المحور الصادي) والزمن الذي تستغرقه بالدقائق (المحور السيني).



(أ) احسب معدل التغير في ارتفاع الطائرة.

(ب) اكتب المعادلة التي توضح معدل التغير في الارتفاع.

(جـ) صِف التغير.

الحل

(أ) معدل التغير في ارتفاع الطائرة = $\frac{٢٠٠}{٢٠} = ١٠$

أو معدل التغير = $\frac{٤٠٠ - ٢٠٠}{٤٠ - ٢٠} = \frac{٢٠٠}{٢٠} = ١٠$

معدل التغير هو م

الخط المستقيم وهو

(ب) المعادلة هي $ص = ١٠ س$

(ج) التغير مباشر حيث إن المعادلة على الصورة $ص = م س$، أي أن س ...
م هو ثابت التغير.

التناسب

إذا كان $(س_١ ، ص_١)$ $(س_٢ ، ص_٢)$ نقطتين على منحنى الدالة $ص = م س$ حيث م ... ثابت التغير.

$$\because م = \frac{ص_١}{س_١} \text{ وأيضًا } م = \frac{ص_٢}{س_٢}$$

$$\therefore \frac{ص_١}{س_١} = \frac{ص_٢}{س_٢} \leftarrow \text{تناسب}$$

يسمى هذا التناسب بالتناسب الطردي وتسمى م ثابت التناسب.

إذا كان $\frac{ص_١}{س_١} = \frac{ص_٢}{س_٢}$ فإن $ص_١ : \underbrace{س_١ = ص_٢}_{\text{الوسطين}} : س_٢$ ، $س_١ ص_٢ = س_٢ ص_١$

الطرفين

التناسب

التناسب هو تساوي نسبتين أو أكثر.

مثال ١

إذا كانت ص تتناسب طردياً مع س وكانت ص = ١٥ عندما س = ٦ فما قيمة ص عندما س = ٨

الحل

$\because \frac{ص_1}{س_1} = \frac{ص_2}{س_2}$ ،

$\because$ التناسب طردي

$\frac{١٥}{٦} = \frac{ص_2}{٨}$ ، $ص_2 = \frac{١٥ \times ٨}{٦} = ٢٠$

$ص_1 = ١٥$ ، $ص_2 = ؟$
$س_1 = ٦$ ، $س_2 = ٨$

مثال ٢

إذا كان ا يتناسب طردياً مع $ب^3$ وكان ا = ١٠ عندما ب = ٢ فأوجد قيمة ا عندما ب = ٤ وكذلك العلاقة بين ا ، ب.

الحل

$\because$ ا يتناسب طردياً مع $ب^3$

$\therefore ا = م ب^3$ حيث م ثابت $\neq ٠$

$\therefore \frac{ا_1}{ب_1^3} = \frac{ا_2}{ب_2^3}$ ، $\frac{١٠}{٢^3} = \frac{ا_2}{٤^3}$

$ا_2 = \frac{١٠ \times ٤^3}{٢^3} = ٨٠$

$ا_1 = ١٠$ ، $ا_2 = ؟$
$ب_1 = ٢$ ، $ب_2 = ٤$

$\because ا = م ب^3$ ، $١٠ = م(٢)^3$ ، $م = \frac{١٠}{٨} = \frac{٥}{٤}$

$\therefore$ العلاقة بين ا ، ب هي $ا = \frac{٥}{٤} ب^3$

مثال ٤

إذا كان $أ^٢$ يتناسب طرديًا مع $ب^٣$ وكان أ = ٦ عندما ب = ٣ فأوجد العلاقة
ثم أوجد قيمة أ عندما ب = ١٢.

الحل

∵ $أ^٢$ يتناسب طرديًا مع $ب^٣$

∴ $أ^٢ = م\,ب^٣$ ، $(٦)^٢ = م\,(٣)^٣$ ، $م = \frac{٣٦}{٢٧} = \frac{٤}{٣}$

∴ العلاقة بين أ ، ب هي $أ^٢ = \frac{٤}{٣}ب^٣$

عندما ب = ١٢ فإن $أ^٢ = \frac{٤}{٣}(١٢)^٣ = ٢٣٠٤$ ، $أ = \sqrt{٢٣٠٤} = ٤٨$

مثال ٥

إذا كان $\frac{س}{ص} = \frac{٣}{٤}$ فأوجد قيمة كل من:

(١) $\frac{٥س + ٢ص}{٣ص - س}$

(٢) $\frac{س^٢ + ٣ص^٢}{٥س\,ص}$

الحل

∵ $\frac{س}{ص} = \frac{٣}{٤}$ ∴ س = ٣م ، ص = ٤م حيث م ≠ صفر ،

(١) $\frac{٥س + ٢ص}{٣ص - س} = \frac{٥ \times ٣م + ٢ \times ٤م}{٣ \times ٤م - ٣م}$

$= \frac{١٥م + ٨م}{١٢م - ٣م} = \frac{٢٣م}{٩م} = \frac{٢٣}{٩}$

(٢) $\frac{س^{٢} + ٣ص^{٢}}{٥ س ص} = \frac{(٣م)^{٢} + ٣(٤م)^{٢}}{٥ \times ٣م \times ٤م} = \frac{٩م^{٢} + ٤٨م^{٢}}{٦٠م^{٢}}$

$= \frac{٥٧م^{٢}}{٦٠م^{٢}} = \frac{٥٧}{٦٠} = \frac{١٩}{٢٠}$

مثال ٦

إذا كان $\frac{أ}{ب} = \frac{حـ}{د}$ فأثبت أن: $\frac{أ + ٢ب}{حـ + ٢د} = \frac{حـ}{د}$

الحل

$\because \frac{أ}{ب} = \frac{حـ}{د}$

$\therefore$ أ = حـ م ، ب = د م حيث م ≠ ٠

الطرف الأيمن $= \frac{أ + ٢ب}{حـ + ٢د} = \frac{حـ م + ٢د م}{حـ + ٢د} = \frac{م(حـ + ٢د)}{حـ + ٢د} = م$ (١)

الطرف الأيسر $= \frac{حـ م}{حـ} = م$ (٢)

من (١)، (٢) $\therefore$ الطرف الأيمن = الطرف الأيسر

حل آخر:

يمكنك حل المثال باستخدام الآتي:

$\because \frac{أ}{ب} = \frac{حـ}{د} = م$ $\therefore$ أ = ب م ، حـ = د م

التغير العكسي Inverse Variation

فكر وناقش

عندما تسير السيارة بسرعة «ع» في الزمن «ن»

فإن المسافة ف = ع × ن.

وإذا ثبتت المسافة وزادت السرعة فإن مقدار الزمن يقل تبعًا لذلك، فيمكن القول إن الزمن يتناسب عكسيًا مع السرعة.

> الصورة العامة لمعادلة التغير العكسي: س ص = ك أو ص = $\frac{ك}{س}$
>
> س ≠ صفر، ك ≠ صفر حيث ك ثابت التغير.

مثال ٧

إذا كان طول مستطيل «ل» يتغير عكسيًا بتغير عرضه «ع» بفرض ثبوت مساحة سطح المستطيل، وكان ل = ١٢ سم، عندما ع = ٨ سم فأوجد قيمة «ل» عندما ع = ٣ سم.

الحل

∵ طول المستطيل «ل» يتناسب عكسيًا بتغير عرضه «ع»

∴ ل ع = ك حيث ك ≠ ٠، ١٢ × ٨ = ك

∴ ك = ٩٦

أي أن العلاقة بين ل، ع هي ل ع = ٩٦

عندما ع = ٣ فإن ل × ٣ = ٩٦

∴ ل = $\frac{٩٦}{٣}$ = ٣٢ سم

دار النهضة مزون للطباعة والنشر

إذا كانت سرعة دراجة «ع» تتغير عكسيًا بتغير مربع طول نصف قطر الإطار «نق»، وكانت ع = ٤ م/ث عندما نق = ٦٥ سم فأوجد «ع» عندما يكون نق = ٥٠ سم.

«نق = ٦٥ سم = ٠,٦٥ م»

∵ ع تتغير عكسيًا مع نق²

∴ ع نق² = ك

∴ ك = ٤ × (٠,٦٥)²

∴ ك = ١,٦٩

∴ العلاقة بين ك، ع هي ع نق² = ١,٦٩

عندما نق = ٥٠ سم = ٠,٥ م

∴ ع (٠,٥)² = ١,٦٩

∴ ع = ٦,٧٦ م/ث

إذا كانت ص تتغير عكسيًا مع س أي أن ص تتغير طرديًا مع $\frac{1}{س}$

- إذا كانت ص تتغير عكسيًا مع س

فإن س ص = ك أو ص = $\frac{ك}{س}$ أو $\frac{ص_1}{ص_2} = \frac{س_1}{س_2}$ حيث ك ثابت التغير

- إذا كانت ص تتغير طرديًا مع س عند ثبوت ع ، ص تتغير عكسيًا مع ع عند ثبوت س،

فإن ص = ك × $\frac{س}{ع}$ ، ك ≠ ٠ ، $\frac{ص_1}{ص_2} = \frac{س_1}{س_2} \times \frac{ع_2}{ع_1}$

مثال ٩

مقاومة سلك كهرباء «م» تتغير بتغير طوله «ل» عندما يكون نصف قطره ثابتًا، وتتغير عكسيًا مع مربع طول نصف قطر مقطعه عندما يكون طوله ثابتًا، فإذا كانت النسبة بين طولي نصفي قطري سلكين من نفس المادة ٣ : ٢ والنسبة بين مقاومتيهما ٨ : ٣، وكان طول السلك الأول ٤٢ مترًا، فأوجد طول السلك الثاني.

الحل

∵ م تتغير طرديًا مع ل عند ثبوت نق ، م تتغير عكسيًا مع نق^2 عند ثبوت ل

$$∴ \frac{م_1}{م_2} = \frac{ل_1}{ل_2} \times \frac{نق_2^2}{نق_1^2} ،$$

$$\frac{٨}{٣} = \frac{٤٢}{ل_2} \times \left(\frac{٢}{٣}\right)^2 ،$$

$$\frac{٤٢}{ل_2} = \frac{٨}{٣} \times \frac{٩}{٤} = ٦$$

$$\frac{٤٢}{ل_2} = ٦$$

$$ل_2 = \frac{٤٢}{٦} = ٧ \text{ أمتار}$$

$\frac{م_1}{م_2} = \frac{٨}{٣}$ ، $\frac{نق_1}{نق_2} = \frac{٣}{٢}$

ل$_1$ = ٤٢ مترًا ، ل$_2$ ...

إذا كانت ص = أ + ب ، أ تتغير طردياً مع س ، ب تتغير عكسياً بتغير س² وكانت ص = ١١ عندما س = ١ ، ص = ٨ عندما س = ٢ فأوجد: العلاقة بين ص ، س ثم أوجد ص عندما س = ٤

الحل

∵ أ تتغير طردياً مع س

∴ أ = م س ، م ≠ ٠

∵ ب تتغير عكسياً مع س²

∴ ب = $\frac{ك}{س^2}$ ، ك ≠ ٠

∵ ص = أ + ب

∴ ص = م س + $\frac{ك}{س^2}$ ،

١١ = م × ١ + $\frac{ك}{1^2}$ ← م + ك = ١١ (١)

٨ = م × ٢ + $\frac{ك}{2^2}$ ← ٨م + ك = ٣٢ (٢)

بحل المعادلتين (١) ، (٢) معاً وذلك بطرح المعادلة (١) من المعادلة (٢) نجد أن:

٧م = ٢١ ∴ م = ٣ ،

بالتعويض في المعادلة (١) ∴ ك = ٨

∴ ص = ٣س + $\frac{8}{س^2}$ وهي العلاقة بين ص ، س

عندما س = ٤ فإن ص = ٣ × ٤ + $\frac{8}{16}$ = ١٢ $\frac{1}{2}$