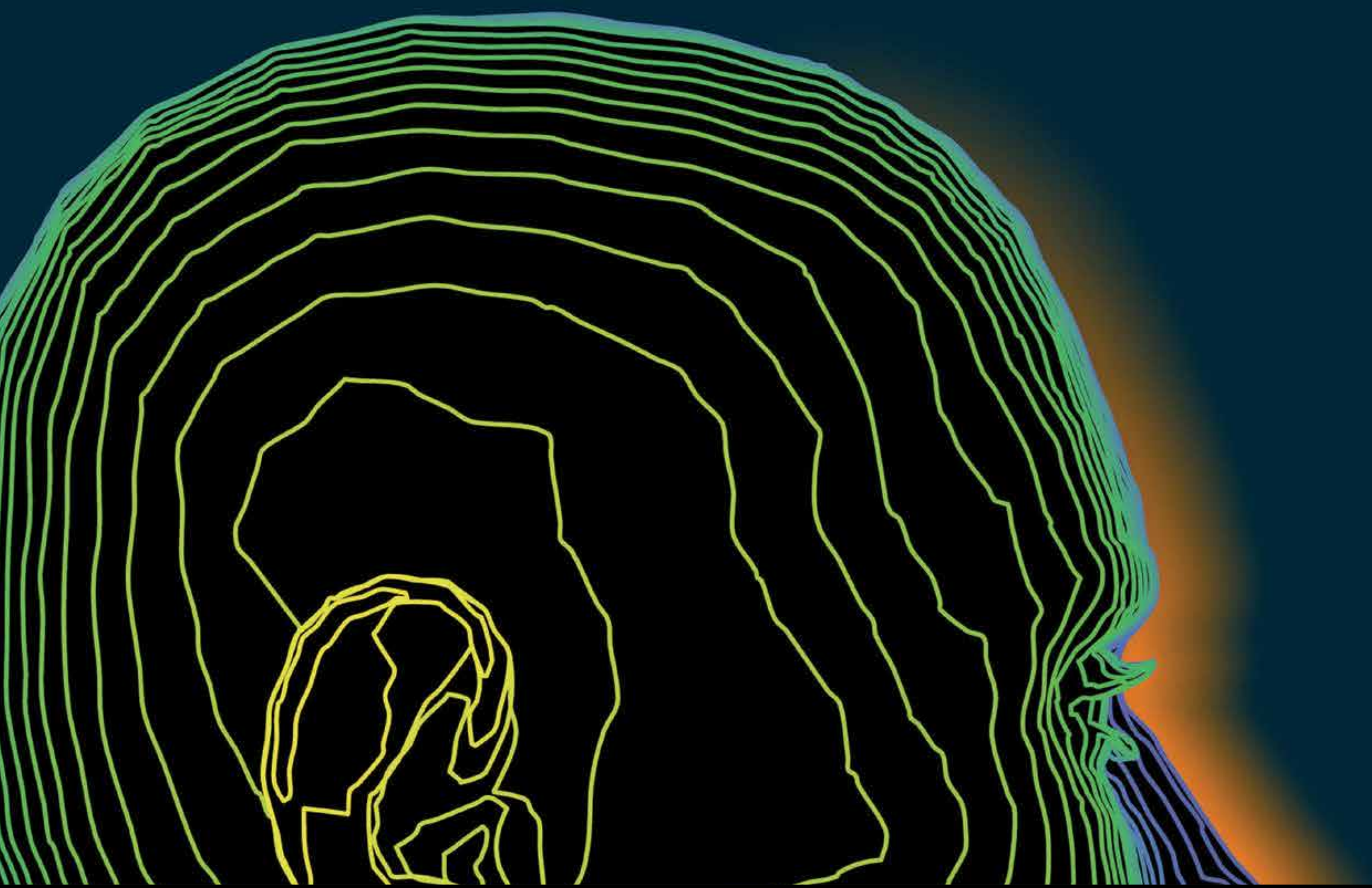
ملخص شرح ومذكرة تدريبات في الوحدة السابعة المصفوفات



الوحدة السابعة
المصفوفات
Matrices

ستتعلّم في هذه الوحدة كيف:

٧-١ تعرف ما هي المصفوفة وتصفها باستخدام الصفوف والأعمدة، وتعرف خصائص المصفوفة الصفرية والمحايدة والمربعة.

٧-٢ تجمع وتطرح المصفوفات.

٧-٣ تضرب مصفوفة في عدد ما.

٧-٤ تتعرف على شرط ضرب المصفوفات وتجد ناتج ضربها.

٧-٥ تتعرف أن ضرب المصفوفات ليس تبادليًا.

٧-٦ تحسب محدد المصفوفة ٢ × ٢

٧-٧ تعرف خصائص المصفوفة المنفردة والمصفوفة غير المنفردة

٧-٨ تجد المصفوفة العكسية للمصفوفات ٢ × ٢ غير المنفردة

الأسم :

الصف:

عمل الأستاذ: أ. إبراهيم صالح السعدي

٧-١ رتبة المصفوفة وأنواع المصفوفات

المصفوفة matrix هي ترتيب للقيم في شكل صفوف وأعمدة داخل أقواس، ويُرمز إليها بأحد الأحرف التي تحتها خط، مثل أ

رتبة المصفوفة

تحدد **رتبة المصفوفة order of a matrix** من خلال عدد **الصفوف** (ص) وعدد **الأعمدة** (ع). نشير إلى المصفوفة من خلال رتبتها. فالمصفوفة ذات الرتبة ص × ع تحتوي على ص صف، ع عمود.

فمثلًا أ = $\begin{pmatrix} ٥ & ٣ & -١ \\ -٢ & ٠ & ٤ \end{pmatrix}$ مصفوفة رتبتها ٢ × ٣ لأن فيها صفين وثلاثة أعمدة.

في أ، **العنصر** ٥ يقع في الصف الأول والعمود الأول، والعنصر ٤ يقع في الصف الثاني والعمود الثالث.

للرتبة أهمية كبيرة في تقرير إمكانية إجراء عمليات جمع أو طرح أو ضرب المصفوفات.

أنواع المصفوفات

للمصفوفات عدة أنواع منها:

- **المصفوفة الصفية row matrix**: تتكوّن من صف واحد فقط، وأي عدد من الأعمدة.

  فمثلًا أ = $\begin{pmatrix} ١ & ٤ & ٢ & ٠ & ٣ \end{pmatrix}$ مصفوفة صفية من الرتبة ١ × ٥ ، ب = $\begin{pmatrix} ١ & ٢ & ٣ \end{pmatrix}$ مصفوفة صفية من الرتبة ١ × ٣

- **المصفوفة العمودية column matrix**: تتكوّن من عمود واحد فقط، وأي عدد من الصفوف.

  فمثلًا ج = $\begin{pmatrix} ٧ \\ -٢ \end{pmatrix}$ مصفوفة عمودية من الرتبة ٢ × ١ ، د = $\begin{pmatrix} ٧ \\ -١ \\ ٠,٥ \end{pmatrix}$ مصفوفة عمودية من الرتبة ٣ × ١

- **المصفوفة المربعة square matrix**: تتكوّن من عدد متساو من الصفوف والأعمدة.

  فمثلًا هـ = $\begin{pmatrix} ١ & -٢ \\ -٣ & ٤ \end{pmatrix}$ مصفوفة مربعة من الرتبة ٢ × ٢ لأن فيها صفين وعمودين.

  ن = $\begin{pmatrix} ٢ & ١ & ٥ \\ ٠ & -٤ & ٥ \\ -٣ & ٣ & -٧ \end{pmatrix}$ مصفوفة مربعة من الرتبة ٣ × ٣ لأن فيها ثلاثة صفوف وثلاثة أعمدة.

- **المصفوفة الصفرية zero matrix**: يمكن أن تكون من أي رتبة، إلا أن كل عناصرها تساوي الصفر

  فمثلًا ن = $\begin{pmatrix} ٠ & ٠ \\ ٠ & ٠ \end{pmatrix}$ مصفوفة صفرية وهي أيضًا مصفوفة مربعة من الرتبة ٢ × ٢

==

المصفوفات المتساوية

تكون المصفوفتان متساويتين إذا كان لهما الرتبة نفسها، وكانت كل العناصر المتناظرة متساوية.

على سبيل المثال، إذا كانت $\begin{pmatrix} أ & ٢ \\ -٣ & ب \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٦ & ج \\ د & ٠,٥ \end{pmatrix}$

يجب أن تكون العناصر في المواقع المتناظرة متساوية، أي أن أ = ٦ ، ب = ٠,٥ ، ج = ٢ ، د = -٣

نتيجة ١

- تكتب رتبة المصفوفة التي فيها ص صفًا، ع عمودًا في صورة ص × ع
- المصفوفة الصفية: تتكوّن من صف واحد وأي عدد من الأعمدة.
- المصفوفة العمودية: تتكوّن من عمود واحد وأي عدد من الصفوف.
- المصفوفة المربعة: تتكوّن من عدد متساو من الصفوف والأعمدة.
- المصفوفة الصفرية: كل عناصرها تساوي الصفر.
- المصفوفات المتساوية: تتساوى مصفوفتان إذا كان لهما الرتبة نفسها وكانت كل عناصرهما المتناظرة متساوية.

مثــال ١

أعط وصفًا كاملًا لكل من المصفوفات الآتية:

ل = $\begin{pmatrix} ٠ & ٠ & ٠ \end{pmatrix}$ ، م = $\begin{pmatrix} ٦ \\ -٥ \end{pmatrix}$ ، ن = $\begin{pmatrix} ١ & ٠ \\ ٣ & -٥ \end{pmatrix}$

الحــلّ:

ل مصفوفة صفية من ثلاثة عناصر ورتبتها ١ × ٣ وهي أيضًا مصفوفة صفرية لأن كل عناصرها مساوية للصفر.

م مصفوفة عمودية من عنصرين ورتبتها ٢ × ١

ن مصفوفة مربعة من أربعة عناصر ورتبتها ٢ × ٢

١) أجب عن الأسئلة الآتية باستخدام المصفوفات المعطاة:

أ = $\begin{pmatrix} ٧ & ١- \\ ٥ & ٣ \end{pmatrix}$ ، ب = $\begin{pmatrix} ٦ \\ ١ \end{pmatrix}$ ، ج = $\begin{pmatrix} ٩ & ٤- \end{pmatrix}$ ، د = $\begin{pmatrix} ٣ & ١ & ٤- \\ ٨ & ٢- & ٠ \end{pmatrix}$ ، هـ = $\begin{pmatrix} ٠ & ٠ & ٠ \end{pmatrix}$ ، و = $\begin{pmatrix} ١ \\ ٣- \\ ٤ \end{pmatrix}$

(أ) ما نوع هـ؟ (ب) ما نوع المصفوفة أ؟ (ج) أي المصفوفات مصفوفة عمودية؟

(د) ما المشترك بين المصفوفة أ والمصفوفة د؟ (هـ) ما هي رتبة كل مصفوفة؟

(و) ما هو العنصر في الصف الثاني والعمود الثاني من المصفوفة د؟ (ز) صِف موقع العنصر ٣ في المصفوفة أ

مثال ٢

المصفوفة أ مصفوفة مربعة وصفرية. أوجد قيمتَي س، ص

أ = $\begin{pmatrix} ٧ + س & ٠ \\ ٠ & ٤ص + ٨ \end{pmatrix}$

الحــلّ:

كل عناصر المصفوفة أ مساوية للصفر، لذا:

س + ٧ = ٠ ← س = −٧

٤ ص + ٨ = ٠ ← ص = −٢

مثال ٣

المصفوفتان $\begin{pmatrix} س + ٢ & ٥- \\ ٧ & ٢ص - ٣ \end{pmatrix}$ ، $\begin{pmatrix} ١٠ & ٥- \\ ٧ & ١١- \end{pmatrix}$ متساويتان.

أوجد قيمتَي س، ص

الحــلّ:

العناصر في المواقع المتناظرة متساوية، لذا:

س + ٢ = ١٠ ← س = ٨

٢ص − ٣ = −١١ ← ٢ص = −٨ وبالتالي ص = −٤

٢) المصفوفتان ل = $\begin{pmatrix} أ + ٧ & ١٢ \\ ٩ & ب - ٤ \end{pmatrix}$ ، ن = $\begin{pmatrix} ٨ & ٣-ج \\ ٢د - ١ & ٩ \end{pmatrix}$ متساويتان. أوجد قيم أ، ب، ج، د

===

٣) المصفوفتان $\begin{pmatrix} ٢س - ٣ \\ ٧ - ٤ص \end{pmatrix}$ ، $\begin{pmatrix} س + ٣ \\ ٩ - ٨ص \end{pmatrix}$ متساويتان. أوجد قيمتَي س، ص

٤) إذا علمت أن المصفوفة $\begin{pmatrix} \text{٢١ − ٣ل} & \text{٠} \\ \text{٠} & \text{١٠ + ٥ق} \end{pmatrix}$ مصفوفة صفرية، فأوجد قيمتَي ل، ق

===

٥) (أ) في المصفوفة لـ: ٨ صفوف، ٩ أعمدة. ما عدد العناصر في المصفوفة لـ؟

(ب) في المصفوفة بـ: ٢٨ عنصرًا مرتبة في ٤ صفوف. ما عدد الأعمدة في المصفوفة بـ؟

(ج) في المصفوفة س: ٤٩ عنصرًا. ماذا يمكن أن يكون نوع المصفوفة س؟ اشرح إجابتك.

[أ. إبراهيم السعدي]

[أ. إبراهيم السعدي]

٧-٢ جمع وطرح المصفوفات

نتيجة ٢

إذا كانت أ، ب مصفوفتين من الرتبة ن × م، فإن:

- ناتج جمعهما (أ + ب) هو مصفوفة من الرتبة ن × م أيضًا، وينتج كل عنصر فيها من جمع العنصرين المناظرين له في أ ، ب

$$\begin{pmatrix} \text{أ} & \text{ب} \\ \text{ج} & \text{د} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \text{هـ} & \text{و} \\ \text{ز} & \text{ح} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{أ + هـ} & \text{ب + و} \\ \text{ج + ز} & \text{د + ح} \end{pmatrix}$$

- ناتج طرحهما (أ − ب) هو مصفوفة من الرتبة ن × م أيضًا، وينتج كل عنصر فيها من طرح العنصرين المناظرين له في أ ، ب

$$\begin{pmatrix} \text{أ} & \text{ب} \\ \text{ج} & \text{د} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \text{هـ} & \text{و} \\ \text{ز} & \text{ح} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{أ − هـ} & \text{ب − و} \\ \text{ج − ز} & \text{د − ح} \end{pmatrix}$$

مثال ١

باستخدام المصفوفات المعطاة:

أ = (٩ ٥ ٤) ب = (−٣ ١ ٣) ج = $\begin{pmatrix} \text{٥} & \text{−١} \\ \text{٢} & \text{٧} \end{pmatrix}$ د = $\begin{pmatrix} \text{٠} & \text{−٦} \\ \text{−١} & \text{٢} \end{pmatrix}$

أوجد:

(أ) أ + ب

(ب) ب + أ

(ج) ج + د

(د) ج − د

(هـ) أ + ج

الحـلّ:

(أ) أ + ب = (٩ ٥ ٤) + (−٣ ١ ٣) = (٩ + (−٣) ٥ + ١ ٤ + ٣) = (٦ ٦ ٧)

(ب) ب + أ = (−٣ ١ ٣) + (٩ ٥ ٤) = (−٣ + ٩ ١ + ٥ ٣ + ٤) = (٦ ٦ ٧)

لاحظ أن إجابتَي أ + ب ، ب + أ متساويتان، أي أن أ + ب = ب + أ

(ج) ج + د = $\begin{pmatrix} \text{٥} & \text{−١} \\ \text{٢} & \text{٧} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \text{٠} & \text{−٦} \\ \text{−١} & \text{٢} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{٥ + ٠} & \text{−١ + (−٦)} \\ \text{٢ + (−١)} & \text{٧ + ٢} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{٥} & \text{−٧} \\ \text{١} & \text{٩} \end{pmatrix}$

(د) ج − د = $\begin{pmatrix} \text{٥} & \text{−١} \\ \text{٢} & \text{٧} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \text{٠} & \text{−٦} \\ \text{−١} & \text{٢} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{٥ − ٠} & \text{−١ − (−٦)} \\ \text{٢ − (−١)} & \text{٧ − ٢} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{٥} & \text{٥} \\ \text{٣} & \text{٥} \end{pmatrix}$

(هـ) أ + ج: لا يمكن إجراء هذا الجمع لأن رتبة المصفوفة أ لا تساوي رتبة المصفوفة ج

١) أوجد مصفوفة الناتج إن أمكن:

أ) $\begin{pmatrix}-٥\\ ٧\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}٧\\ -٥\end{pmatrix}$

ب) $\begin{pmatrix}٨ & ٠ & ١١\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}٤ & -٣ & -١\end{pmatrix}$

ج) $\begin{pmatrix}١٠\\ -٩\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}٢٠ & ٩\end{pmatrix}$

د) $\begin{pmatrix}٤ & ٢\\ -٤ & ١\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}٥ & -٦\\ ٧ & ٣\end{pmatrix}$

هـ) $\begin{pmatrix}١{,}٥ & ٢{,}٨\\ -٦{,}٣ & -٠{,}٧\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}٣{,}٥ & ٤{,}٢\\ ٨{,}١ & -١{,}٧\end{pmatrix}$

و) $\begin{pmatrix}١ & -٥\\ ٧ & ١٠\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-٥ & ٦\\ ٠ & -٢\end{pmatrix}$

ز) $\begin{pmatrix}٠{,}٦ & -١{,}٩\\ -٢{,}٧ & ٠{,}٥\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-٢ & ١{,}٧\\ ٠ & -٠{,}٢\end{pmatrix}$

٢) إذا علمت أن $\begin{pmatrix}١١ & ٨\\ -٦ & -٩\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\text{أ} & \text{ب} + ٢\\ \text{ج} & ٢\text{د}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}٨ & ٨\\ ٩ & ٧\end{pmatrix}$، فأوجد قيم أ، ب، ج، د

٣) إذا علمت أن $\begin{pmatrix}\text{ل} & -٥\\ ١٧ & ٣\text{ر} - ٤\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}٧ & \text{ق}\\ \text{ت} + ٩ & ١٥\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-٦ & ٣\\ -٥ & ٢\end{pmatrix}$، فأوجد قيم ل، ق، ر، ت

==

٤) إذا علمت أن $\underline{\text{أ}}=\begin{pmatrix}٢ & -٣\\ ١ & ٤\end{pmatrix}$، $\underline{\text{ب}}=\begin{pmatrix}١٢ & ١٨\\ ١٣ & ٧\end{pmatrix}$

فأوجد كل مصفوفة من المصفوفتين الآتيتين:

أ) $\underline{\text{أ}}+\underline{\text{أ}}$

ب) $\underline{\text{ب}}+\underline{\text{ب}}+\underline{\text{ب}}-\underline{\text{أ}}$

٥) لدينا المصفوفتان $\underline{\text{ل}}=\begin{pmatrix}١٥ & ١٢\\ -٩ & ٢١\end{pmatrix}$ ، $\underline{\text{ن}}=\begin{pmatrix}\text{أ} & \text{ب}\\ ٢\text{ج} & ٤\text{د}\end{pmatrix}$، كما لدينا $\underline{\text{ل}}+\underline{\text{ل}}-\underline{\text{ن}}=\begin{pmatrix}١٠ & ١٠\\ ٢٠ & ٥٠\end{pmatrix}$

أوجد قيم أ، ب، ج، د

٧-٣ ضرب المصفوفات

ستتعلم في هذا الدرس ضرب مصفوفة في عدد، وضرب مصفوفة في أخرى.

٧-٣أ الضرب القياسي

- يمكن ضرب مصفوفة في عدد، يسمى العدد المستخدم لضرب المصفوفة **بالعدد القياسي**.
- العدد القياسي يمكن أن يكون أي عدد حقيقي.
- يوضع العدد القياسي في عملية الضرب على يمين المصفوفة.
- عند ضرب عدد في مصفوفة فإن ذلك العدد يضرب في جميع عناصر المصفوفة.

$$\text{ك}\begin{pmatrix}\text{أ}\\ \text{ب}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\text{ك}\times\text{أ}\\ \text{ك}\times\text{ب}\end{pmatrix}$$

مثلًا: لنضرب ف = $\begin{pmatrix}٤ & -٢ & ٠\\ ٧ & ٣ & ١\end{pmatrix}$ في العدد القياسي ٦، نكتب:

$$٦\text{ف}=٦\begin{pmatrix}٤ & -٢ & ٠\\ ٧ & ٣ & ١\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}٦\times٤ & ٦\times(-٢) & ٦\times٠\\ ٦\times٧ & ٦\times٣ & ٦\times١\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}٢٤ & -١٢ & ٠\\ ٤٢ & ١٨ & ٦\end{pmatrix}$$

مثال ١

لدينا المصفوفتان س = $(٦\ \ -١٠\ \ ٤)$ ، ص = $(٣\ \ ٥\ \ -٧)$ أوجد المصفوفة

أ) ٣س + ٢ص

ب) $\frac{١}{٢}$س − ٣ص

الحل:

أ) ٣س + ٢ص = ٣$(٦\ \ -١٠\ \ ٤)$ + ٢$(٣\ \ ٥\ \ -٧)$

= $(١٨\ \ -٣٠\ \ ١٢)$ + $(٦\ \ ١٠\ \ -١٤)$

= $(٢٤\ \ -٢٠\ \ -٢)$

ب) $\frac{١}{٢}$س − ٣ص = $\frac{١}{٢}(٦\ \ -١٠\ \ ٤)$ − ٣$(٣\ \ ٥\ \ -٧)$

= $(٣\ \ -٥\ \ ٢)$ − $(٩\ \ ١٥\ \ -٢١)$

= $(-٦\ \ -٢٠\ \ ٢٣)$

مُساعَدة

يمكن كتابة $(٢٤\ \ -٢٠\ \ -٢)$ على الشكل ٢$(١٢\ \ -١٠\ \ -١)$ أو −٢$(-١٢\ \ ١٠\ \ ١)$

[أ. إبراهيم السعدي]

١) أوجد ناتج ما يلي:

أ) $٢\begin{pmatrix}٣\\ ٤\end{pmatrix}$

ب) $٥(٢\ \ -٢\ \ ٦)$

ج) $٧\begin{pmatrix}١ & ٣\\ ٠ & -٢\end{pmatrix}$

د) $\frac{١}{٢}\begin{pmatrix}١٢ & ٨ & ٠\\ -٢ & ١٠ & ٩\end{pmatrix}$

هـ) $-٤\begin{pmatrix}-٢\\ -٣\end{pmatrix}$

٢) في المصفوفات المدرجة أدناه:

أ = $\begin{pmatrix}٣\\ -٢\\ ٩\end{pmatrix}$ ، ب = $\begin{pmatrix}٠ & ٤\\ ٢ & -١٢\\ -١٤ & ٣\end{pmatrix}$ ، ج = $\begin{pmatrix}-٨\\ ١\\ ٦\end{pmatrix}$ ، د = $\begin{pmatrix}٤ & -٧\\ ٣ & -٢\end{pmatrix}$ ، هـ = $\begin{pmatrix}-٦ & ١\\ ٠ & -٥\end{pmatrix}$ ، و = $\begin{pmatrix}١٢ & ٠ & ٣\\ -٣ & ٦ & -١٥\end{pmatrix}$

أوجد ناتج ما يلي إن أمكن:

أ) ١٢أ − $\begin{pmatrix}١١\\ -٣\\ ٣\end{pmatrix}$

ب) ٣د + $\begin{pmatrix}-٢ & ١٣\\ -٦ & ٩\end{pmatrix}$

ج) ٢ ب + و

د) ٢ ج + ٣ أ

هـ) ٥ هـ − ٣ ء

و) أ + ج + $\frac{١}{٢}$ ب

ز) $\frac{٢}{٣}$ و

[أ. إبراهيم السعدي]

٣) ل = $\begin{pmatrix} ٣٠- & ٢٥ \\ ٥ & ١٥- \end{pmatrix}$ ، و = $\begin{pmatrix} ٦ & ٨- \\ ١٢- & ٤ \end{pmatrix}$ أوجد:

أ) ٢ و + $\begin{pmatrix} ٣٦- & ٣٣ \\ ١٧ & ١٩- \end{pmatrix}$

ب) و − ٢ ل

ج) $\frac{١}{٥}$ ل + $\frac{١}{٢}$ و

د) $\frac{٣}{٤}$ و − $\frac{٤}{٥}$ ل

[أ. إبراهيم السعدي]

مثال ٢

إذا كان أ = $\begin{pmatrix} \text{س} & \text{ف} \\ ٤ & ٠ \end{pmatrix}$ ، ب = $\begin{pmatrix} ٧- & ١٣ \\ \text{غ} & \text{ص} \end{pmatrix}$ ، ٢أ + ٣ب = $\begin{pmatrix} ٢٧- & ٥١ \\ ٤- & ٣ \end{pmatrix}$ ، فأوجد القيم ف، س، ص، غ

الحـلّ:

٢أ + ٣ب = ٢ $\begin{pmatrix} \text{س} & \text{ف} \\ ٤ & ٠ \end{pmatrix}$ + ٣ $\begin{pmatrix} ٧- & ١٣ \\ \text{غ} & \text{ص} \end{pmatrix}$ — اضرب العناصر في العدد القياسي

= $\begin{pmatrix} ٢\text{س} & ٢\text{ف} \\ ٨ & ٠ \end{pmatrix}$ + $\begin{pmatrix} ٢١- & ٣٩ \\ ٣\text{غ} & ٣\text{ص} \end{pmatrix}$ — اجمع المصفوفتين

= $\begin{pmatrix} ٢\text{س} - ٢١ & ٢\text{ف} + ٣٩ \\ ٨ + ٣\text{غ} & ٣\text{ص} \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} ٢\text{س} - ٢١ & ٢\text{ف} + ٣٩ \\ ٨ + ٣\text{غ} & ٣\text{ص} \end{pmatrix}$ = $\begin{pmatrix} ٢٧- & ٥١ \\ ٤- & ٣ \end{pmatrix}$

ينتج من هذا أربع معادلات للحل:

٢ف + ٣٩ = ٥١ ← ف = ٦

٢س − ٢١ = −٢٧ ← س = −٣

٣ص = ٣ ← ص = ١

٨ + ٣غ = −٤ ← غ = −٤

[أ. إبراهيم السعدي]

٤) أوجد في كل ممّا يلي قيمة العدد القياسي ك:

أ $\begin{pmatrix} ٦ & -١٦ \\ -١٠ & -٨ \end{pmatrix} = ك \begin{pmatrix} ٩ & -٢٤ \\ -١٥ & -١٢ \end{pmatrix}$

ب $\begin{pmatrix} ١٨ & ٥١ \\ -٩ & -٢٥,٥ \end{pmatrix} = ك \begin{pmatrix} ١,٢ & ٣,٤ \\ -٠,٦ & -١,٧ \end{pmatrix}$

ج $\begin{pmatrix} -٦ & ٥,١ \\ ٩ & -٠,٢٧ \end{pmatrix} = ك \begin{pmatrix} ٤ & -٣,٤ \\ -٦ & ٠,١٨ \end{pmatrix}$

[أ. إبراهيم السعدي]

٥) أ أوجد قيمَتي س، ص إذا كان $\begin{pmatrix} ٢س \\ ٧ \end{pmatrix} + ٤ \begin{pmatrix} ٥ \\ ص \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ١٦ \\ ٢٥ \end{pmatrix}$

ب أوجد قيم أ، ب، جـ إذا كان $\frac{1}{2}\begin{pmatrix} أ & -٨ & ١٢ \end{pmatrix} - ٢\begin{pmatrix} ٩ & -ب & ٣جـ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٢ & ٠ & ٢١ \end{pmatrix}$

ج أوجد قيم ل ، ق، ر، ز إذا كان $\begin{pmatrix} -١٣ & ق \\ ٩ & ز \end{pmatrix} - ٢ \begin{pmatrix} ٦ & ١ \\ ر & -٢ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٥ل & ٣ \\ ١٥ & ٤ز \end{pmatrix}$

٦) في المصفوفات $\underset{\sim}{س} = \begin{pmatrix} أ & ب \\ -٥ & ٨ \end{pmatrix}$ ، $\underset{\sim}{ص} = \begin{pmatrix} ٤ & ١٥ \\ -٣ & جـ \end{pmatrix}$ ، $\underline{غ} = \begin{pmatrix} ٩ & -٦ \\ د & ٥ \end{pmatrix}$

أوجد قيم أ، ب، جـ، د إذا كان $٤\underset{\sim}{س} + ٣\underset{\sim}{ص} - ٢\underline{غ} = ٢ \begin{pmatrix} ١١ & ٢٤ \\ -١٤ & ٢ \end{pmatrix}$

٧-٣ب ضرب مصفوفة بأخرى

[أ. إبراهيم السعدي]

يمكننا كتابة ضرب المصفوفة أ في المصفوفة ب على الشكل (أ × ب) أو (أ ب)

يمكن ضرب مصفوفتين أ و ب وإيجاد (أ ب) فقط إذا كان عدد الأعمدة في المصفوفة أ مساويًا لعدد الصفوف في المصفوفة ب، نأخذ الأمثلة الآتية:

يمكن ضرب $\begin{pmatrix} ٣ & ٢ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ٤ \\ ٥ \end{pmatrix}$ لأن المصفوفة الأولى من الرتبة ١ × ٢ والمصفوفة الثانية من الرتبة ٢ × ١

يمكن ضرب $\begin{pmatrix} ٤ \\ ٥ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ٣ & ٢ \end{pmatrix}$ لأن المصفوفة الأولى من الرتبة ٢ × ١ والمصفوفة الثانية من الرتبة ١ × ٢

يمكن ضرب $\begin{pmatrix} ١ & ٢ \\ ٣ & ٤ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ٥ & ٦ \\ ٧ & ٨ \end{pmatrix}$ لأن المصفوفة الأولى من الرتبة ٢ × ٢ والمصفوفة الثانية من الرتبة ٢ × ٢

لا يمكن ضرب $\begin{pmatrix} ١ & ٢ \\ ٣ & ٤ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ٩ & ٨ & ٧ \end{pmatrix}$ لأن المصفوفة الأولى من الرتبة ٢ × ٢ والمصفوفة الثانية من الرتبة ١ × ٣

إن تحقق شرط الضرب فإن المصفوفة الناتجة تكون مصفوفة جديدة فيها العدد نفسه لصفوف المصفوفة الأولى والعدد نفسه لأعمدة المصفوفة الثانية.

تمرين:

رتبة المصفوفة الناتجة من ضرب $\begin{pmatrix} ٣ & ٢ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ٤ \\ ٥ \end{pmatrix}$ هي ☐

رتبة المصفوفة الناتجة من ضرب $\begin{pmatrix} ٤ \\ ٥ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ٣ & ٢ \end{pmatrix}$ هي ☐

رتبة المصفوفة الناتجة من ضرب $\begin{pmatrix} ١ & ٢ \\ ٣ & ٤ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ٥ & ٦ \\ ٧ & ٨ \end{pmatrix}$ هي ☐

لضرب مصفوفة في مصفوفة أخرى، نتبع الخطوات الآتية:

١) تحقق من أن عدد الأعمدة في المصفوفة الأولى يساوي عدد الصفوف في المصفوفة الثانية.

٢) اضرب عناصر الصف الأول من المصفوفة الأولى في عناصر العمود الأول من المصفوفة الثانية، ثم أوجد مجموع نواتج الضرب لتحصل على العنصر في الصف الأول، العمود الأول في المصفوفة الناتجة.

نتيجة ٤

إذا كان أ = $\begin{pmatrix} أ & ب \\ ج & د \end{pmatrix}$، ب = $\begin{pmatrix} ل & ق \\ ر & ت \end{pmatrix}$، يكون ضرب المصفوفة

$$أ\,ب = \begin{pmatrix} أ & ب \\ ج & د \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ل & ق \\ ر & ت \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} أ × ل + ب × ر & أ × ق + ب × ت \\ ج × ل + د × ر & ج × ق + د × ت \end{pmatrix}$$

أو

$$\begin{pmatrix} أل + ب ر & أ ق + ب ت \\ ج ل + د ر & ج ق + د ت \end{pmatrix}$$

إذا كانت رتبة المصفوفة أ هي ر × جـ، ورتبة المصفوفة ب هي ل × ق، يتحقق الضرب أ ب فقط عندما يكون جـ = ل، في هذه الحالة تكون رتبة المصفوفة أ ب هي ر × ق

[أ. إبراهيم السعدي]

مثال ١

لتكن المصفوفتان:

أ = $\begin{pmatrix} ١ & ٤ \\ ٣ & ٢ \end{pmatrix}$، ب = $\begin{pmatrix} ٣ & ٢ \\ ٤ & ١ \end{pmatrix}$

أ) أوجد ناتج أ ب ثم حدد موقع كل عنصر في المصفوفة الناتجة.

ب) أوجد ناتج ب أ

الحـــلّ:

أ)
$$\underset{أ}{\overset{٢ × ٢}{\begin{pmatrix} ١ & ٤ \\ ٣ & ٢ \end{pmatrix}}} \underset{ب}{\overset{٢ × ٢}{\begin{pmatrix} ٣ & ٢ \\ ٤ & ١ \end{pmatrix}}} = \begin{pmatrix} ١ × ٣ + ٤ × ٤ & ١ × ٢ + ٤ × ١ \\ ٣ × ٣ + ٢ × ٤ & ٣ × ٢ + ٢ × ١ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٣ + ١٦ & ٢ + ٤ \\ ٩ + ٨ & ٦ + ٢ \end{pmatrix} = \underset{أ\,ب}{\overset{٢ × ٢}{\begin{pmatrix} ١٩ & ٦ \\ ١٧ & ٨ \end{pmatrix}}}$$

يبيّن الجدول الآتي كيف حصلنا على العناصر الأربعة في المصفوفة الناتجة أ ب

يدلنا الصف في أ والعمود في ب المستخدمان في إيجاد عناصر أ ب على مواقع هذه العناصر فيها.

العنصر في أ ب	صف في أ × عمود في ب	موقع العنصر في أ ب
١٩	أول صف في أ × أول عمود في ب	أول صف، أول عمود
٦	أول صف في أ × ثاني عمود في ب	أول صف، ثاني عمود
١٧	ثاني صف في أ × أول عمود في ب	ثاني صف، أول عمود
٨	ثاني صف في أ × ثاني عمود في ب	ثاني صف، ثاني عمود

ب) لإيجاد المصفوفة ب أ، نرتب المصفوفتَين بهذا الترتيب (ب أولًا، أ ثانيًا) ثم نقوم بالعمليات المطلوبة على العناصر كما يأتي:

$$\underset{ب}{\overset{٢ × ٢}{\begin{pmatrix} ٣ & ٢ \\ ٤ & ١ \end{pmatrix}}} \underset{أ}{\overset{٢ × ٢}{\begin{pmatrix} ١ & ٤ \\ ٣ & ٢ \end{pmatrix}}} = \begin{pmatrix} ٣ × ١ + ٢ × ٣ & ٣ × ٤ + ٢ × ٢ \\ ٤ × ١ + ١ × ٣ & ٤ × ٤ + ١ × ٢ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٣ + ٦ & ١٢ + ٤ \\ ٤ + ٣ & ١٦ + ٢ \end{pmatrix} = \underset{ب\,أ}{\overset{٢ × ٢}{\begin{pmatrix} ٩ & ١٦ \\ ٧ & ١٨ \end{pmatrix}}}$$

١) أوجد المصفوفة الناتجة من عمليات الضرب الآتية: [أ. إبراهيم السعدي]

أ) $\begin{pmatrix} ٢ & ٣ \end{pmatrix}\begin{pmatrix} ٥ \\ ٤ \end{pmatrix}$

ب) $\begin{pmatrix} ٤ & -٢ \end{pmatrix}\begin{pmatrix} ٦ \\ ٣ \end{pmatrix}$

ج) $\begin{pmatrix} -٧ & -٣ \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -٤ \\ -٢ \end{pmatrix}$

د) $\begin{pmatrix} ٣ & ٢ & ١ \end{pmatrix}\begin{pmatrix} ٣ \\ ٢ \\ ١ \end{pmatrix}$

هـ) $\begin{pmatrix} ٢ & -٣ & ٦ \end{pmatrix}\begin{pmatrix} ٤ \\ ٩ \\ -١ \end{pmatrix}$

و) $\begin{pmatrix} ٤ & ٢ & -٤ \end{pmatrix}\begin{pmatrix} ٢ \\ -٢ \\ ١ \end{pmatrix}$

مُساعَدة

قبل إجراء عملية الضرب عليك التحقق من أن عدد أعمدة المصفوفة الأولى مساوٍ لعدد صفوف المصفوفة الثانية.

٢) أوجد المصفوفة الناتجة من عمليات الضرب الآتية:

أ) $\begin{pmatrix} ٥ \\ ٤ \end{pmatrix}\begin{pmatrix} ٢ & ٣ \end{pmatrix}$

ب) $\begin{pmatrix} ٦ \\ ٣ \end{pmatrix}\begin{pmatrix} ٤ & -٢ \end{pmatrix}$

ج) $\begin{pmatrix} -٥ \\ ٧ \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -٨ & -٦ \end{pmatrix}$

د) $\begin{pmatrix} ٠,٥ \\ ٢,٥ \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -٦ & ٤ \end{pmatrix}$

هـ) $\begin{pmatrix} ١ \\ ٢ \end{pmatrix}\begin{pmatrix} ٥ & ٤ & ٣ \end{pmatrix}$

و) $\begin{pmatrix} ١ \\ ٢ \\ ٣ \end{pmatrix}\begin{pmatrix} ٠ & -٢ \end{pmatrix}$

ز) $٥\begin{pmatrix} ١ & ٠ \\ ٠ & ١ \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -٢,٧ \\ ٣,٦ \end{pmatrix}$

ح) $\begin{pmatrix} \frac{٣}{٢} & -\frac{٥}{٢} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} ٢ & ٠ \\ ٠ & ٢ \end{pmatrix}$

٣) أوجد المصفوفة الناتجة من عمليات الضرب الآتية:

أ) $\begin{pmatrix} ١ & ٢ \\ ٤ & ٣ \end{pmatrix}\begin{pmatrix} ٣ & ٤ \\ ٢ & ١ \end{pmatrix}$

ب) $\begin{pmatrix} ٣ & ٤ \\ ٢ & ١ \end{pmatrix}\begin{pmatrix} ١ & ٢ \\ ٤ & ٣ \end{pmatrix}$

ج) $\begin{pmatrix} ١ & \\ ١ & ١ \end{pmatrix}\begin{pmatrix} & \\ ٣ & ٢ \end{pmatrix}$ [أ. إبراهيم السعدي]

د) $\begin{pmatrix} ٥ & ٧ \\ ٣ & ٢ \end{pmatrix}\begin{pmatrix} ١ & ١ \\ ١ & ١ \end{pmatrix}$

هـ) $\begin{pmatrix} ٧ & -١ \\ -٢ & ٥ \end{pmatrix}\begin{pmatrix} ٩ & ٠ \\ ١ & -٦ \end{pmatrix}$

و) $\begin{pmatrix} -١ & ١٣ \\ ٩ & ٠ \end{pmatrix}\begin{pmatrix} ٨ & -٢ \\ ٤ & ١ \end{pmatrix}$

ز) $\begin{pmatrix} ٨ & -٢ \\ ٤ & ١ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -١ & ١٣ \\ ٩ & ٠ \end{pmatrix}$

ح) $\begin{pmatrix} ١ & ٠ \\ ٠ & ١ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -٣ & ٢ \\ ٧ & ٤ \end{pmatrix}$

٤) أوجد المصفوفة الناتجة من عمليات الضرب في كل حالة:

أ) ا = $\frac{١}{٢}\begin{pmatrix} ٤ & ٠ \\ ٠ & -٢ \end{pmatrix}$ ، ب = $\begin{pmatrix} ١ & ٢ \\ -٥ & ٣ \end{pmatrix}$ ، أوجد ا ب

[أ. إبراهيم السعدي]

ب) ل = $\begin{pmatrix} ١ & -٤ \\ ٢ & -١ \end{pmatrix}$ ، و = ٢ $\begin{pmatrix} ٣ & ٦ \\ -١ & ٤ \end{pmatrix}$ ، أوجد ل و

ج) س = $\frac{٢}{٣}\begin{pmatrix} ٣ & ٠ \\ -٦ & ١٥ \end{pmatrix}$ ، ص = -٣ $\begin{pmatrix} ٠ & -١ \\ -٢ & ٣ \end{pmatrix}$ ، أوجد س ص

المصفوفة المحايدة ٢ × ٢

[أ. إبراهيم السعدي]

المصفوفة المحايدة identity matrix التي غالبًا ما نعبّر عنها بـ م، تتعامل مع المصفوفات كما يتعامل العدد ١ في الضرب مع باقي الأعداد. عندما نضرب أي عدد في واحد من أي جهة، فإن هذا العدد يبقى كما هو: ١ × ٥ = ٥ × ١ = ٥

المصفوفة المحايدة من الرتبة ٢ × ٢ هي م = $\begin{pmatrix} ١ & ٠ \\ ٠ & ١ \end{pmatrix}$

عندما نضرب المصفوفة ا في المصفوفة المحايدة م، لا يطرأ أي تغيير على ا

عندما نضرب المصفوفة المحايدة م في المصفوفة ا، لا يطرأ أي تغيير على ا

ما يعني أن م ا = ا م = ا

لنضرب المصفوفة ا = $\begin{pmatrix} ٣ & ١ \\ ٧ & -٢ \end{pmatrix}$ في المصفوفة المحايدة م = $\begin{pmatrix} ١ & ٠ \\ ٠ & ١ \end{pmatrix}$

م ا = $\begin{pmatrix} ١ & ٠ \\ ٠ & ١ \end{pmatrix}\begin{pmatrix} ٣ & ١ \\ ٧ & -٢ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٣ + ٠ & ١ + ٠ \\ ٠ + ٧ & ٠ - ٢ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٣ & ١ \\ ٧ & -٢ \end{pmatrix}$ = ا

ا م = $\begin{pmatrix} ٣ & ١ \\ ٧ & -٢ \end{pmatrix}\begin{pmatrix} ١ & ٠ \\ ٠ & ١ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٣ + ٠ & ٠ + ١ \\ ٧ + ٠ & ٠ - ٢ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٣ & ١ \\ ٧ & -٢ \end{pmatrix}$ = ا

النتيجتان متساويتان: م ا = ا م = ا

نتيجة ٦

المصفوفة المحايدة من الرتبة ٢ × ٢، م = $\begin{pmatrix} ١ & ٠ \\ ٠ & ١ \end{pmatrix}$ حيث م ا = ا م = ا

وعند ضرب م في العدد القياسي ك يعطي

ك م = ك $\begin{pmatrix} ١ & ٠ \\ ٠ & ١ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ك & ٠ \\ ٠ & ك \end{pmatrix}$

٥) لدينا:

أ) $\begin{pmatrix} ١ & ٠ \\ ٠ & ١ \end{pmatrix}\begin{pmatrix} س & ٢ \\ -٣ & ص \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٧ & ٢ \\ -٣ & -٨ \end{pmatrix}$ ، أوجد قيمتَي س، ص

مثــال ٢

[أ. إبراهيم السعدي]

إذا كان $٢\begin{pmatrix} ١ & ٠ \\ ٠ & ١ \end{pmatrix}\begin{pmatrix} ٤ & ٧ \\ -٣ & -١ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{أ} & \text{ب} \\ -\text{جـ} & ٤\text{د} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} ١ & -٢ \\ ٣ & ٠ \end{pmatrix}$، فأوجد قيم أ، ب، جـ، د

الحــلّ:

$$٢\begin{pmatrix} ١ & ٠ \\ ٠ & ١ \end{pmatrix}\begin{pmatrix} ٤ & ٧ \\ -٣ & -١ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{أ} & \text{ب} \\ -\text{جـ} & ٤\text{د} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} ١ & -٢ \\ ٣ & ٠ \end{pmatrix}$$

استخدم م أ = أ، إذًا ك م أ = ك أ

$$٢\begin{pmatrix} ٤ & ٧ \\ -٣ & -١ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{أ} & \text{ب} \\ -\text{جـ} & ٤\text{د} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} ١ & -٢ \\ ٣ & ٠ \end{pmatrix}$$

اضرب الطرف الأيمن في العدد القياسي ٢

$$\begin{pmatrix} ٨ & ١٤ \\ -٦ & -٢ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{أ} & \text{ب} \\ -\text{جـ} & ٤\text{د} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} ١ & -٢ \\ ٣ & ٠ \end{pmatrix}$$

اجمع المصفوفتَين إلى اليسار

$$\begin{pmatrix} ٨ & ١٤ \\ -٦ & -٢ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{أ} + ١ & \text{ب} - ٢ \\ -\text{جـ} + ٣ & ٤\text{د} \end{pmatrix}$$

إذا كانت المصفوفتان متساويتَين، يكون كل عنصر في المصفوفة الأولى مساويًا للعنصر الذي يناظره في المصفوفة الثانية، والذي يعطينا أربع معادلات للحل:

٨ = أ + ١ ← أ = ٧

١٤ = ب − ٢ ← ب = ١٦

−٦ = − جـ + ٣ ← جـ = ٩

−٢ = ٤ د ← د = −٠,٥

ب) $\begin{pmatrix} ٢\text{ل} & -٣ \\ ٥ & \text{ق} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} ٢ & ٠ \\ ٠ & ٢ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٨ & -٦ \\ ١٠ & ٣ \end{pmatrix}$، أوجد قيمتَي ل، ق

ج) $\begin{pmatrix} ٢ & ٤ \\ -١ & ٣ \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \text{أ} + ١ & -٢ \\ ٥ & \text{ب} - ١ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٣٦ & ٤ \\ ٧ & ٨ \end{pmatrix}\begin{pmatrix} ١ & ٠ \\ ٠ & ١ \end{pmatrix}$، أوجد قيمتَي أ، ب

د) $\begin{pmatrix} \frac{١}{٢} & ٠ \\ ٠ & \frac{١}{٢} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -٤ & -١٢ \\ -٨ & ١٨ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{و} & ٢\text{س} \\ \text{ص} - ١ & \text{ع} + ٣ \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -٢ & ٤ \\ ٣ & -٢ \end{pmatrix}$، أوجد قيم س، ص، ع، و

٦) أ) لدينا مصفوفة ى = $\begin{pmatrix} -١ & ٥ \\ ٤ & -٣ \end{pmatrix}$، بيّن أن ى^٢ $\neq \begin{pmatrix} (-١)^٢ & ٥^٢ \\ ٤^٢ & (-٣)^٢ \end{pmatrix}$

مُساعَدة

يتم تربيع المصفوفة،
بإجراء ضربها في نفسها.

ب) أوجد ى^٢ − ى

٧) أ مصفوفة صف، ب مصفوفة عمود.

أ) ما شروط إيجاد أ ب و ب أ ؟

ب) إذا تم استيفاء هذه الشروط، فما نوع المصفوفتين أ ب و ب أ؟

أ) يجب أن يكون عدد الأعمدة في أ مساويًا لعدد الصفوف في ب.

ب) إذا كانت رتبة أ هي ١ × ن تكون رتبة ب هي ن × ١

∴ رتبة أ ب هي ١ × ١، رتبة ب أ هي ن × ن

أ ب مصفوفة مربعة من الرتبة ١ × ١، ب أ مصفوفة مربعة من الرتبة ن × ن

٧-٤ محدد المصفوفة من الرتبة ٢ × ٢

لكل مصفوفة مربعة **محدد** determinant يفيدنا في تحديد ما إذا كان للمصفوفة معكوس أم لا (ستدرس هذا الأمر في الدرس ٧-٥).

لإيجاد محدد مصفوفة مربعة من الرتبة ٢ × ٢، نحسب الفارق بين ناتج ضرب العناصر في **القطر الرئيسي** major diagonal وناتج ضرب العناصر في **القطر الثانوي** minor diagonal للمصفوفة.

قطرا المصفوفة المربعة:

الرئيسي الثانوي

إذا كانت $\underline{\text{أ}} = \begin{pmatrix} \text{أ} & \text{ب} \\ \text{ج} & \text{د} \end{pmatrix}$، فإن محدد $(\underline{\text{أ}})$ = أ د − ب ج

يمكن استخدام رمز Δ للتعبير عن المحدد، كما يمكننا استخدام خطّين رأسيين (| |) لنبيّن أننا في صدد إيجاد محدد المصفوفة.

نتيجة ٧

لكل $\underline{\text{أ}} = \begin{pmatrix} \text{أ} & \text{ب} \\ \text{ج} & \text{د} \end{pmatrix}$، يكون المحدد $\Delta = \begin{vmatrix} \text{أ} & \text{ب} \\ \text{ج} & \text{د} \end{vmatrix}$ = أ د − ب ج

مثال ١

أوجد محدد كل من المصفوفات المربعة الآتية:

(أ) $\underline{\text{أ}} = \begin{pmatrix} ٦ & ٣ \\ -٢ & ٥ \end{pmatrix}$ (ب) $\underline{\text{ب}} = \begin{pmatrix} ٤ & -٧ \\ -٢ & ١ \end{pmatrix}$ (ج) $\underline{\text{م}} = \begin{pmatrix} ١ & ٠ \\ ٠ & ١ \end{pmatrix}$ (د) $\underline{\text{ع}} = ٢\begin{pmatrix} ٤ & ٣ \\ ٨ & ٦ \end{pmatrix}$

الحل:

(أ) $|\underline{\text{أ}}| = ٦ \times ٥ - ٣ \times (-٢) = ٣٠ + ٦ = ٣٦$

(ب) $|\underline{\text{ب}}| = ٤ \times ١ - (-٢ \times -٧) = ٤ - ١٤ = -١٠$

(ج) $|\underline{\text{م}}| = ١ \times ١ - ٠ \times ٠ = ١$

(د) $|\underline{\text{ع}}| = \begin{vmatrix} ٨ & ٦ \\ ١٦ & ١٢ \end{vmatrix} = ٨ \times ١٢ - ٦ \times ١٦ = ٠$

تسمّى المصفوفة التي محددها يساوي الصفر مصفوفة **منفردة** singular.
تسمّى المصفوفة التي محددها لا يساوي الصفر مصفوفة **غير منفردة** non-singular.

نتيجة ٨

إذا كان Δ = ٠ ، فإن المصفوفة منفردة.
إذا كان Δ ≠ ٠ ، فإن المصفوفة غير منفردة.

مثال ٢

بيّن أن المصفوفة $\underline{\text{س}} = \begin{pmatrix} -٤ & ٦ \\ -٢ & \text{أ} \end{pmatrix}$ تكون:

(أ) غير منفردة عندما أ = ٢ (ب) منفردة عندما أ = ٣

الحل:

(أ) عندما أ = ٢، $|\underline{\text{س}}| = \begin{vmatrix} -٤ & ٦ \\ -٢ & ٢ \end{vmatrix} = -٤ \times ٢ - ٦ \times (-٢) = -٨ + ١٢ = ٤$ استخدم العنصر أ = ٢

س غير منفردة، لأن $|\underline{\text{س}}| \neq ٠$

(ب) عندما أ = ٣، $|\underline{\text{س}}| = \begin{vmatrix} -٤ & ٦ \\ -٢ & ٣ \end{vmatrix} = -٤ \times ٣ - ٦ \times (-٢) = -١٢ + ١٢ = ٠$ استخدم العنصر أ = ٣

س منفردة، لأن $|\underline{\text{س}}| = ٠$

١) أوجد محدد كل من المصفوفات الآتية:
وحدد ما إذا كانت المصفوفة منفردة أم غير منفردة:

(أ) $\underline{\text{ل}} = \begin{pmatrix} ٤ & ١ \\ ٥ & ٣ \end{pmatrix}$ (ب) $\underline{\text{و}} = \begin{pmatrix} ٧ & -٢ \\ ٨ & ١١ \end{pmatrix}$ (ج) $\underline{\text{س}} = \begin{pmatrix} -٣ & ٥ \\ ٤ & -٧ \end{pmatrix}$

(د) $\underline{\text{ز}} = \begin{pmatrix} -١٢ & ٨ \\ -٧ & ٥ \end{pmatrix}$ (هـ) $\underline{\text{ت}} = \begin{pmatrix} -٩ & ٣ \\ ٦ & ٢ \end{pmatrix}$ (و) $\underline{\text{ي}} = \begin{pmatrix} -١٢ & -٩ \\ ٨ & ٦ \end{pmatrix}$

(ز) ش = $\begin{pmatrix} ١,٨ & ٢,٥ \\ -٣,٦ & -٤,٢ \end{pmatrix}$

(ح) و = $\begin{pmatrix} -٠,٢ & ٤ \\ ٠,٧٥ & -١٥ \end{pmatrix}$

٢) م مصفوفة محايدة من الرتبة ٢ × ٢، ك عدد قياسي، أوجد محدد ك م

ك $\begin{pmatrix} ٠ & ١ \\ ١ & ٠ \end{pmatrix}$ = $\begin{pmatrix} ٠ & ك \\ ك & ٠ \end{pmatrix}$

المحدد=

[أ. إبراهيم السعدي]

٣) (أ) أ = $\begin{vmatrix} أ & ٦ \\ ٣ & ٢ \end{vmatrix}$ ، Δ أ = ٤، أوجد قيمة أ

(ب) أوجد قيمة ب إذا كانت ب = ٢ $\begin{pmatrix} -٣ & ٥ \\ ب & ٤ \end{pmatrix}$، |ب| = ٥٤

[أ. إبراهيم السعدي]

(ج) أوجد قيمة جـ إذا كانت ج = $\frac{١}{٣}$ $\begin{pmatrix} \frac{١}{٢}جـ & ٥ \\ -٦ & ٤ \end{pmatrix}$ مصفوفة منفردة.

(د) إذا كانت د = $\begin{pmatrix} -٣ & ٢ \\ د & ٤ \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} ٠ & ٣ \\ ٣ & ٠ \end{pmatrix}$ مصفوفة منفردة، فأوجد قيمة د

(هـ) لدينا هـ = $\begin{pmatrix} ص & س \\ ٩ & -٤ \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} ٢ & ١ \\ ٤ & -٣ \end{pmatrix}$، هـ مصفوفة منفردة، اكتب ص بدلالة س

٧-٥ معكوس المصفوفة

[أ. إبراهيم السعدي]

لكل مصفوفة غير منفردة معكوس يسمى **معكوس المصفوفة inverse matrix**.

يُكتب معكوس المصفوفة $\underline{أ}$ على الشكل $\underline{أ}^{-١}$

ضرب المصفوفة في معكوسها يساوي المصفوفة المحايدة $\underline{م}$ بغض النظر عن ترتيب هذا الضرب. بعبارة أخرى: $\underline{أ}\ \underline{أ}^{-١} = \underline{أ}^{-١}\ \underline{أ} = \underline{م}$

لإيجاد معكوس المصفوفة $\underline{أ} = \begin{pmatrix} ١ & ٢ \\ -٣ & ٤ \end{pmatrix}$ نتبع الخطوات الآتية:

	الخطوة	النتيجة
١	إيجاد $\lvert\underline{أ}\rvert$	$\lvert\underline{أ}\rvert = \begin{vmatrix} ١ & ٢ \\ -٣ & ٤ \end{vmatrix} = ١ \times ٤ - ٢ \times (-٣) = ١٠$
٢	تبديل العناصر في القطر الرئيسي في $\underline{أ}$	$\begin{pmatrix} ١ & ٢ \\ -٣ & ٤ \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} ٤ & ٢ \\ -٣ & ١ \end{pmatrix}$
٣	ضرب العناصر في القطر الثانوي في $\underline{أ}$ في -١	$\begin{pmatrix} ٤ & -\times ٢ \\ -\times -٣ & ١ \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} ٤ & -٢ \\ ٣ & ١ \end{pmatrix}$
٤	ضرب نتيجة الخطوة (٣) في العدد القياسي $\frac{١}{\lvert\underline{أ}\rvert}$	$\underline{أ}^{-١} = \frac{١}{١٠}\begin{pmatrix} ٤ & -٢ \\ ٣ & ١ \end{pmatrix}$ أو $\begin{pmatrix} ٠,٤ & -٠,٢ \\ ٠,٣ & ٠,١ \end{pmatrix}$

معكوس المصفوفة $\underline{أ} = \begin{pmatrix} ١ & ٢ \\ -٣ & ٤ \end{pmatrix}$ هو $\underline{أ}^{-١} = \frac{١}{١٠}\begin{pmatrix} ٤ & -٢ \\ ٣ & ١ \end{pmatrix}$

إذا كانت إجابة معكوس المصفوفة صحيحة، فإن كلا الضربيَن $\underline{أ}\ \underline{أ}^{-١}$، $\underline{أ}^{-١}\ \underline{أ}$ يجب أن يساوي المصفوفة المحايدة $\underline{م} = \begin{pmatrix} ١ & ٠ \\ ٠ & ١ \end{pmatrix}$

التحقّق ١:

$$\underline{أ}\ \underline{أ}^{-١} = \begin{pmatrix} ١ & ٢ \\ -٣ & ٤ \end{pmatrix}\frac{١}{١٠}\begin{pmatrix} ٤ & -٢ \\ ٣ & ١ \end{pmatrix}$$
$$= \frac{١}{١٠}\begin{pmatrix} ١ & ٢ \\ -٣ & ٤ \end{pmatrix}\begin{pmatrix} ٤ & -٢ \\ ٣ & ١ \end{pmatrix}$$
$$= \frac{١}{١٠}\begin{pmatrix} ٤ + ٦ & -٢ + ٢ \\ -١٢ + ١٢ & ٦ + ٤ \end{pmatrix}$$
$$= \frac{١}{١٠}\begin{pmatrix} ١٠ & ٠ \\ ٠ & ١٠ \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} ١ & ٠ \\ ٠ & ١ \end{pmatrix}$$

الضرب في عدد ما عملية إبدالية

التحقّق ٢:

$$\underline{أ}^{-١}\ \underline{أ} = \frac{١}{١٠}\begin{pmatrix} ٤ & -٢ \\ ٣ & ١ \end{pmatrix}\begin{pmatrix} ١ & ٢ \\ -٣ & ٤ \end{pmatrix}$$
$$= \frac{١}{١٠}\begin{pmatrix} ٤ + ٦ & ٨ - ٨ \\ ٣ - ٣ & ٦ + ٤ \end{pmatrix}$$
$$= \frac{١}{١٠}\begin{pmatrix} ١٠ & ٠ \\ ٠ & ١٠ \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} ١ & ٠ \\ ٠ & ١ \end{pmatrix}$$

نتيجة ٩

معكوس المصفوفة $\underline{أ} = \begin{pmatrix} أ & ب \\ ج & د \end{pmatrix}$ (من الرتبة ٢ × ٢) هو

$\underline{أ}^{-١} = \frac{١}{أ\,د - ب\,ج}\begin{pmatrix} د & -ب \\ -ج & أ \end{pmatrix}$، حيث أ د − ب ج ≠ ٠

مُساعَدة

ليس للمصفوفة المنفردة معكوس لأن محددها يساوي الصفر، ولا يمكن القسمة على الصفر.

مثال ١

[أ. إبراهيم السعدي]

أوجد معكوس كل مصفوفة:

أ) $\underline{ن} = \begin{pmatrix} ٥ & -٧ \\ -٢ & ٣ \end{pmatrix}$

ب) $\underline{ل} = \begin{pmatrix} -٣ & ٢ \\ -٨ & ٦ \end{pmatrix}$

الحـلّ:

أ) $\lvert\underline{ن}\rvert = \begin{vmatrix} ٥ & -٧ \\ -٢ & ٣ \end{vmatrix} = ٥ \times ٣ - (-٧) \times (-٢) = ١$

∴ $\underline{ن}$ غير منفردة ولها معكوس.

$\underline{ن}^{-١} = \frac{١}{١}\begin{pmatrix} ٣ & ٧ \\ ٢ & ٥ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٣ & ٧ \\ ٢ & ٥ \end{pmatrix}$

ب) $\lvert\underline{ل}\rvert = \begin{vmatrix} -٣ & ٢ \\ -٨ & ٦ \end{vmatrix} = (-٣) \times ٦ - ٢ \times (-٨) = -٢$

∴ $\underline{ل}$ غير منفردة ولها معكوس.

$\underline{ل}^{-١} = \frac{١}{-٢}\begin{pmatrix} ٦ & -٢ \\ ٨ & -٣ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -٣ & ١ \\ -٤ & ١,٥ \end{pmatrix}$

١) أوجد معكوس كل من المصفوفات الآتية إن أمكن:

أ) $\underline{ى} = \begin{pmatrix} ١ & ٢ \\ ٣ & ٤ \end{pmatrix}$ ب) $\underline{ش} = \begin{pmatrix} -٢ & ٣ \\ -٥ & ٩ \end{pmatrix}$ ج) $\underline{و} = \begin{pmatrix} ٠ & ١ \\ -٤ & ٧ \end{pmatrix}$

د) $\underline{س} = \begin{pmatrix} -١٠ & -٦ \\ ٥ & ٣ \end{pmatrix}$ هـ) $\underline{ص} = \begin{pmatrix} -١١ & -١٨ \\ -١٤ & -١٢ \end{pmatrix}$ و) $\underline{غ} = \begin{pmatrix} ١٩ & ١٣ \\ -١١ & -٦ \end{pmatrix}$

٢) إذا علمت أن المصفوفتَين $\underline{أ} = \begin{pmatrix} ٩ & ٤ \\ -١ & -٢ \end{pmatrix}$ ، $\underline{ب} = \begin{pmatrix} ٥ & ٦ \\ ٣ & ٢ \end{pmatrix}$.

أ) **أوجد** $\underline{أ}^{-١}$

[أ. إبراهيم السعدي]

ب) **أوجد** $\underline{ب}^{-١}$

٣) إذا علمت أن المصفوفتَين $\underline{ل} = \begin{pmatrix} ٢ & ٧ \\ -١ & ٥ \end{pmatrix}$ ، $\underline{ن} = \begin{pmatrix} ٢ & ٥ \\ ٢ & -٢ \end{pmatrix}$

أ) **أوجد المصفوفة** $\underline{ل} - \underline{ن}$

ب) **أوجد معكوس المصفوفة** $\underline{ل} - \underline{ن}$

ج) **بيّن أن المصفوفة** $\underline{ل} + \underline{ن}$ **ليس لها معكوس.**

تمارين مراجعة نهاية الوحدة السابعة

١) (أ) أوجد قيمة ل إذا كان محدد $\begin{pmatrix} ل - ٥ & ٧ \\ ل & -١٣ \end{pmatrix}$ = ٢٢٥

(ب) أوجد معكوس المصفوفة $\begin{pmatrix} -١٧ & ٣٨ \\ ٢٤ & -٤٨ \end{pmatrix}$

٢) أوجد قيم أ، ب، جـ، بحيث $\begin{pmatrix} جـ + ٥ & ٣٩ \\ أ - ب & ٢جـ - ٨ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٤ & أ \\ ٣ & ٢ب \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -١ & ٧ \\ -٣ & ٤ \end{pmatrix}$

٣) $\begin{pmatrix} ٣ & ٤ \\ ٥ & -٢ \end{pmatrix}$ − ٦م = ن، حيث م المصفوفة المحايدة من الرتبة ٢ × ٢

أوجد معكوس ن ، محدد $ن^{-1}$

٤) أ = $\begin{pmatrix} ١ & ٣ \\ -١ & ٢ \end{pmatrix}$ أوجد معكوس المصفوفة المربعة لـ أ، أي $(أ^{٢})^{-1}$

٥) لدينا ل = $\begin{pmatrix} -٣ & ٥ \\ ٤ & -٦ \end{pmatrix}$، ن = $\begin{pmatrix} ٣ & ٧ \\ ٤ & ٩ \end{pmatrix}$

(أ) أوجد معكوس ل ومعكوس ن

(ب) أوجد المصفوفة س، بحيث $ل^{-1}$ − ٢ س = $ن^{-1}$