الدرس الأول: المبدأ الأساسي للعد

أولا: ملخص الدرس:

لقد تعلمت في هذا الدرس:

- التعرف على المبدأ الأساسي للعد واستخدامه

تعريف

مبدأ العد: إذا أمكن إجراء عملية ما على خطوتين وأجريت الخطوة الأولى بطرق عددها $ن_١$، والخطوة الثانية بطرق عددها $ن_٢$، فإن عدد طرق إجراء هذه العملية $= ن_١ \times ن_٢$

نتيجة

يمكن تعميم مبدأ العد: إذا أمكن إجراء عملية ما على خطوات عددها «ك»،الخطوة الأولى بطرق عددها $ن_١$، الخطوة الثانية بطرق عددها $ن_٢$، وهكذا حتى الخطوة الأخيرة ك التي تجرى بطرق عددها $ن_ك$، فيمكن إجراء هذه العملية بطرق عددها $= ن_١ \times ن_٢ \times \cdots \times ن_ك$

نتيجة

إذا أمكن إجراء عمل ما بـ «ن» من البدائل المختلفة، وكان البديل الأول يتم بـ «$م_١$» من الطرق، والبديل الثاني بـ «$م_٢$» من الطرق وهكذا حتى الخطوة الأخيرة. فإن عدد الطرق التي يمكن أن يتم إنجاز العمل بها $= م_١ + م_٢ + \cdots + م_ن$

الدرس الثاني: التباديل

أولا: ملخص الدرس:

لقد تعلمت في هذا الدرس:

- ايجاد مضروب العدد.
- ايجاد تباديل ن من العناصر مأخوذة ر في كل مرة .
- ايجاد تباديل ن من العناصر على دائرة .
- ايجاد تباديل ن من العناصر بعضها متشابهة

نتيجة

ناتج الضرب : ن × (ن − ١) × (ن − ٢) × … × ٣×٢×١ يسمى مضروب ن(Factorial)

ويرمز له بالرمز ن ! ، حيث ن ∈ ط*

ن ! = ن × (ن − ١) × (ن − ٢) × … ×٣×٢×١

تعريف

- يسمى كل ترتيب لعناصر مجموعة ما «تبديلا»
- عدد تباديل ن من العناصر مأخوذة ن في كل مرة = ن!

تعريف

عدد تباديل (ن) من العناصر مأخوذة (ر) في كل مرة بحيث ٠ ≤ ر≤ ن ،يرمز له بالرمز $^{ن}ل_{ر}$

ويقرأ «نون لام راء» ويعطى بالعلاقة:

$^{ن}ل_{ر}$ = ن × (ن − ١) × (ن − ٢) × … × (ن − ر + ١)

نتيجة

$$ن\,ل\,ر = \frac{ن!}{(ن - ر)!}$$

نتيجة

عدد تباديل ن من العناصر على دائرة = $\frac{ن!}{ن}$ = (ن − ١)!

نتيجة

عدد تباديل (ن) من العناصر تحوي (م) من العناصر المتشابهة فيما بينها، و(ل) من العناصر الأخرى المتشابهة فيما بينها = $\frac{ن!}{م!\,ل!}$

الدرس الثالث: التوافيق

أولا: ملخص الدرس:

لقد تعلمت في هذا الدرس:

- ايجاد توافيق ن من العناصر مأخوذة ر في كل مرة .

تعريف

عدد توافيق ن من العناصر مأخوذة ر في كل مرة حيث $٠ \leqslant ر \leqslant ن$ يرمز له بالرمز $\binom{ن}{ر}$، ويقرأ «ن فوق ر» .

نتيجة

تغيير ترتيب العناصر يؤثر في التباديل بينما لا يؤثر في حالة التوافيق، العلاقة بين التباديل والتوافيق هي $\binom{ن}{ر} = \frac{{}^{ن}ل_{ر}}{ر!} = \frac{ن!}{(ن-ر)! \times ر!}$

وفي حالة ر = ن، $\binom{ن}{ن} = \frac{{}^{ن}ل_{ن}}{ن!} = \frac{ن!}{ن!} = ١$

الدرس الرابع: نظرية ذات الحدين

أولا: ملخص الدرس: لقد تعلمت في هذا الدرس:

- ايجاد مفكوك $(أ + ب)^{ن}$
- ايجاد الحد الخالي من س .
- ايجاد الحد الوسط في مفكوك $(أ + ب)^{ن}$

نتيجة

يكتب مفكوك نظرية ذات الحدين كما يلي:

$$(أ+ب)^{ن} = \binom{ن}{0}أ^{ن} + \binom{ن}{1}أ^{(ن-1)}ب^{1} + \binom{ن}{2}أ^{(ن-2)}ب^{2} + \binom{ن}{3}أ^{(ن-3)}ب^{3} + \dots$$

$$+ \binom{ن}{ن-1}أ^{1}ب^{(ن-1)} + \binom{ن}{ن}ب^{ن} \quad \text{حيث } ن \in ص^{+}$$

ويمكن كتابة النتيجة السابقة باستخدام الرمز $\sum$:

$$(أ+ب)^{ن} = \sum_{ر=0}^{ن} \binom{ن}{ر} أ^{(ن-ر)} ب^{ر}$$

نتيجة

قانون الحد العام في مفكوك $(أ+ب)^{ن}$:

$$ح_{ر+1} = \binom{ن}{ر} أ^{ن-ر} ب^{ر} ، 0 \leqslant ر \leqslant ن$$

نتيجة

∵ عدد حدود مفكوك $(أ+ب)^{ن} = ن + 1$ ∴ سوف يكون لدينا حالتان هما:

1) إذا كان ن عددا زوجيا ، فإن عدد حدود المفكوك فرديا ، ويتعين حد أوسط واحد ترتيبه $\frac{ن}{2}+1$.

∴ الحد الأوسط هو $ح_{\frac{ن}{2}+1}$.

2) إذا كان ن عددا فرديا،فإن عدد حدود المفكوك زوجيا ، ويتعين في هذه الحالة حدان أوسطان.

ترتيب الحد الأوسط الأول $\frac{ن+1}{2}$ ، وترتيب الحد الأوسط الثاني $\frac{ن+3}{2}$.

الحدان الأوسطان هما $ح_{\frac{ن+1}{2}}$ ، $ح_{\frac{ن+3}{2}}$

نتيجة

في مفكوك المقدار $(أ+ب)^{ن}$ ، إذا وضعنا أ=1 ،ب=1 نحصل على:

$$(1+1)^{ن} = \binom{ن}{0} + \binom{ن}{1} + \dots + \binom{ن}{ن} = 2^{ن}$$

الدرس الأول: جبر الحوادث

أولا: ملخص الدرس:

لقد تعلمت في هذا الدرس:

- ايجاد احتمال الحدث
- ايجاد احتمال الحدث المتمم لحدث ما
- ايجاد احتمال الفرق بين الحوادث

ملاحظات :

احتمال وقوع الحدوث = $\dfrac{\text{عدد عناصر الحدث}}{\text{عدد عناصر فضاء الإمكانات}}$ ⟸ $\text{ل}(\text{ح}) = \dfrac{\text{ن}(\text{ح})}{\text{ن}(\Omega)}$

$\text{ل}(\text{ح}^{/}) = 1 - \text{ل}(\text{ح})$

$\text{ل}(\text{ح}_1 \cup \text{ح}_2) = \text{ل}(\text{ح}_1) + \text{ل}(\text{ح}_2) - \text{ل}(\text{ح}_1 \cap \text{ح}_2)$

قانوني ديمورغان :

١) $\text{ح}_1^{/} \cap \text{ح}_2^{/} = (\text{ح}_1 \cup \text{ح}_2)^{/}$ تقاطع متممتي حدثين يساوي متممة اتحادهما.

٢) $\text{ح}_1^{/} \cup \text{ح}_2^{/} = (\text{ح}_1 \cap \text{ح}_2)^{/}$ اتحاد متممتي حدثين يساوي متممة تقاطعهما.

$\text{ل}(\text{ح}_1 \cup \text{ح}_2)^{/} = 1 - \text{ل}(\text{ح}_1 \cup \text{ح}_2)$

نظرية

إذا كان ح١، ح٢ حدثين في فضاء الإمكانات (Ω) فإن:

$\text{ل}(\text{ح}_1 - \text{ح}_2) = \text{ل}(\text{ح}_1) - \text{ل}(\text{ح}_1 \cap \text{ح}_2)$

$\text{ل}(\text{ح}_2 \cap \text{ح}_1^{/}) = \text{ل}(\text{ح}_2 - \text{ح}_1)$

$= \text{ل}(\text{ح}_2) - \text{ل}(\text{ح}_2 \cap \text{ح}_1)$

احتمال عدم وقوع ح$_1$ ووقوع ح$_2$ = ل(حَ$_1$ $\cap$ ح$_2$)

احتمال عدم وقوع ح$_1$ أو عدم وقوع ح$_2$ =ل(حَ$_1$ $\cup$ حَ$_2$)

$\therefore$ ل(حَ$_1$ $\cup$ حَ$_2$) = ل$\overline{(ح_1 \cap ح_2)}$

احتمال وقوع أحدهما على الأقل = ل(ح$_1$ $\cup$ ح$_2$)

$\therefore$ ل(ح$_1$ $\cup$ ح$_2$)= ل(ح$_1$) + ل(ح$_2$) − ل(ح$_1$ $\cap$ ح$_2$).

احتمال وقوع أحدهما وليس كليهما = ل(ح$_1$ $\cup$ ح$_2$) − ل(ح$_1$ $\cap$ ح$_2$)

تعريف

عندما يتكون الحدث من اتحاد حدثين بسيطين أو أكثر من نفس فضاء الإمكانات فإنه يكون حدثاً مركباً ، والحدث البسيط هو كل حدث يتكون من واحد فقط من عناصر فضاء الإمكانات.

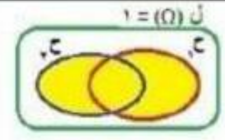
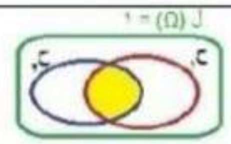
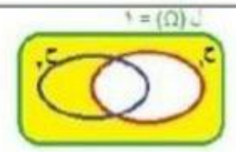
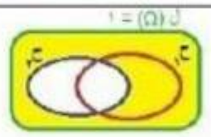
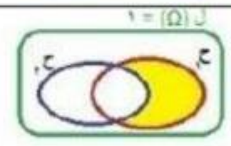
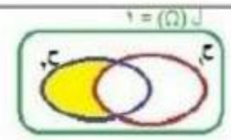
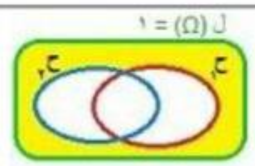
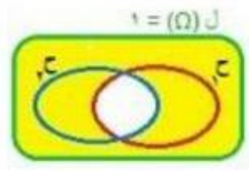
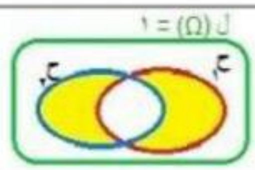
تعريف

الحوادث المتنافية هي تلك الأحداث التي لا يوجد بينها عناصر مشتركة.

أي أن ح$_1$ ، ح$_2$ متنافيان إذا وفقط إذا كان ح$_1$ $\cap$ ح$_2$ = ϕ وفي هذه الحالة يكون:

ل(ح$_1$ $\cap$ ح$_2$) = ٠

قوانين الاحتمالات

احتمال الحدث	التعبير عن احتمال الحدث لفظياً	تمثيل الحدث بشكل فـن
$ل(ع_{١} \cup ع_{٢})$ $= ل(ع_{١}) + ل(ع_{٢}) - ل(ع_{١} \cap ع_{٢})$	@ اتحاد حادثتين @ وقوع $ع_{١}$ أو $ع_{٢}$ @ وقوع أحد الحادثتين على الأقل	
$ل(ع_{١} \cap ع_{٢})$ $= ل(ع_{١}) + ل(ع_{٢}) - ل(ع_{١} \cup ع_{٢})$	@ تقاطع حادثتين @ وقوع الحادثتين معاً	
$ل(\overline{ع_{١}}) = ١ - ل(ع_{١})$	@ متمم الحادث $(ع_{١})$ @ عدم وقوع الحادث $(ع_{١})$	
$ل(\overline{ع_{٢}}) = ١ - ل(ع_{٢})$	@ متمم الحادث $(ع_{٢})$ @ عدم وقوع الحادث $(ع_{٢})$	
$ل(ع_{١} - ع_{٢}) = ل(ع_{١} \cap \overline{ع_{٢}})$ $= ل(ع_{١}) - ل(ع_{١} \cap ع_{٢})$	@ الفرق بين حادثتين @ وقوع $ع_{١}$ فقط @ وقوع $ع_{١}$ وعدم وقوع $ع_{٢}$	
$ل(ع_{٢} - ع_{١}) = ل(ع_{٢} \cap \overline{ع_{١}})$ $= ل(ع_{٢}) - ل(ع_{١} \cap ع_{٢})$	@ الفرق بين حادثتين @ وقوع $ع_{٢}$ فقط @ وقوع $ع_{٢}$ وعدم وقوع $ع_{١}$	
$ل(\overline{ع_{١}} \cap \overline{ع_{٢}}) = ل(\overline{ع_{١} \cup ع_{٢}})$ $= ١ - ل(ع_{١} \cup ع_{٢})$	@ تقاطع متممتي $ع_{١}$ ، $ع_{٢}$ @ متممة اتحاد $ع_{١}$ ، $ع_{٢}$ @ عدم وقوع أحد الحادثتين $ع_{١}$ ، $ع_{٢}$ على الأقل	
$ل(\overline{ع_{١}} \cup \overline{ع_{٢}}) = ل(\overline{ع_{١} \cap ع_{٢}})$ $= ١ - ل(ع_{١} \cap ع_{٢})$	@ اتحاد متممتي $ع_{١}$ ، $ع_{٢}$ @ متممة تقاطع $ع_{١}$ ، $ع_{٢}$ @ عدم وقوع الحادثتين $ع_{١}$ ، $ع_{٢}$ معاً @ وقوع أحد الحادثتين $ع_{١}$ ، $ع_{٢}$ على الأكثر @ عدم وقوع $ع_{١}$ أو عدم وقوع $ع_{٢}$	
$ل(ع_{١} \cup ع_{٢}) - ل(ع_{١} \cap ع_{٢})$ $= ل(ع_{١} - ع_{٢}) + ل(ع_{٢} - ع_{١})$	@ وقوع أحد الحادثتين $ع_{١}$ ، $ع_{٢}$ وليس كليهما @ وقوع $ع_{١}$ فقط أو وقوع $ع_{٢}$ فقط	

إعداد : الاستاذ / خميس المقاحمي

الدرس الثاني: استخدام مبدأ العد في الاحتمالات

أولا: ملخص الدرس:

لقد تعلمت في هذا الدرس:

- استخدام مبدأ العد في حساب الاحتمالات

نتيجة

إذا تكوّن فضاء الإمكانات (Ω) من $ن_1$ من النوع أ، $ن_2$ من النوع ب، ... فإن احتمال وقوع الحدث ح الذي يتكون من $ر_1$ من النوع أ، $ر_2$ من النوع ب، ... يعطى بالعلاقة :

$$ل(ح) = \frac{\binom{ن_1}{ر_1}\binom{ن_2}{ر_2}}{\binom{ن_1 + ن_2 + ...}{ر_1 + ر_2 + ...}}$$

الدرس الثالث: الاحتمال الشرطي

أولا: ملخص الدرس:

لقد تعلمت في هذا الدرس:

- التعرف على الاحتمال الشرطي واستخدامه

تعريف

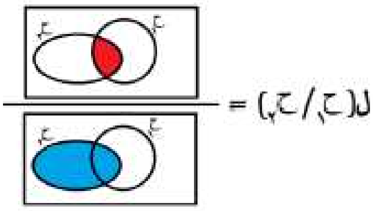
يسمى احتمال $ح_1$ إذا علم أن $ح_2$ قد حدث بالاحتمال الشرطي أو المشروط ويكتب $ل(ح_1/ح_2)$ ويقرأ ل $ح_1$ شرط $ح_2$.

$$ل(ح_1/ح_2) = \frac{ل(ح_1 \cap ح_2)}{ل(ح_2)} \text{، حيث } ل(ح_2) > 0$$

$$\text{وكذلك } ل(ح_2/ح_1) = \frac{ل(ح_2 \cap ح_1)}{ل(ح_1)} \text{، حيث } ل(ح_1) > 0$$

ويمكن التعبير عن التعريف بصورة أخرى كما يلي:

إذا كان الحادثان ح١ ، ح٢ حادثين جزئيين من فضاء العينة أو الامكانات ، وكان وقوع الحادث ح١ مشروطا بوقوع الحادث ح٢ فهذا يسمى بالاحتمال الشرطي ل (ح١ / ح٢) ويقرأ **ل ح١ شرط ح٢** ويسمى ح٢ في هذه الحالة بالفضاء العيني المختزل ويعطى الاحتمال الشرطي حسب العلاقة:



$$ل(ح_1/ح_2) = \frac{ل(ح_2 \cap ح_1)}{ل(ح_2)} \text{، حيث } ل(ح_2) > \text{صفر}$$

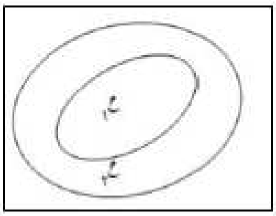
$$ل(ح_2/ح_1) = \frac{ل(ح_2 \cap ح_1)}{ل(ح_1)} \text{، حيث } ل(ح_1) > \text{صفر}$$

نتائج:

أ) إذا كان $ح_1 \subset ح_2$ فإن $ل(ح_1 \cap ح_2) = ل(ح_1)$ ومنها

$ل(ح_1/ح_2) = ل(ح_1)/ل(ح_2)$ حيث $ل(ح_2) >$ صفر

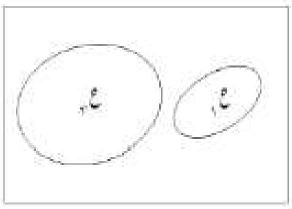
$ل(ح_2/ح_1) = ل(ح_1)/ل(ح_1) = 1$ حيث $ل(ح_1) >$ صفر



ب) إذا كان $ح_1$ ، $ح_2$ حادثين منفصلين فإن $ل(ح_1 \cap ح_2) =$ صفر

$ل(ح_1/ح_2) =$ صفر حيث $ل(ح_2) >$ صفر

$ل(ح_2/ح_1) =$ صفر حيث $ل(ح_1) >$ صفر



ملاحظة : يمكن تنبيه الطلبة لبعض الكلمات التي ترد في مسائل الاحتمال الشرطي مثل : شرط، بشرط، شريطة، علما بأن، إذا علم، وغيرها

نتيجة

إذا كان $ح_1$ ، $ح_2$ حدثين لتجربة ما فإن:

$$ل(ح_1 \cap ح_2) = ل(ح_1) \,.\, ل(ح_2/ح_1)$$

$$= ل(ح_2) \,.\, ل(ح_1/ح_2)$$

الدرس الرابع: الأحداث المتباعدة والشاملة

أولا: ملخص الدرس:

لقد تعلمت في هذا الدرس: التعرف على الحوادث المتباعدة والشاملة .

تعريف

إذا كانت ح$_1$، ح$_2$....... ح $_ن$ أحداثاً من الفضاء العيني Ω بحيث أن :
تقاطع أي حدثين منهما يعطي المجموعة الخالية (ϕ).
أي ح$_ر \cap$ ح$_م$ = ϕ $\forall$ ر $\neq$ م .
و ح$_1 \cup$ ح$_2 \cup$ .... $\cup$ ح$_ن$ = Ω
فإن :
الأحداث ح$_1$، ح$_2$، .... ح $_ن$ تسمى أحداثا متباعدة وشاملة.

الدرس الخامس: نظرية بيز

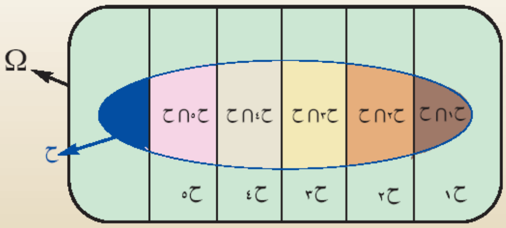
أولا: ملخص الدرس:

لقد تعلمت في هذا الدرس:

- استنتاج نظرية بيز
- استخدام نظرية بيز لحساب الاحتمال الحوادث

نظريةٌ

إذا كانت $ح_1، ح_2، ح_3، \dots ح_ن$ أحداث متباعدة وشاملة في تجربة عشوائية ، فضاؤها العيني Ω وكان ح حادثاً ما ، فإن :



أ) $ل(ح) = \sum_{ر=1}^{ن} ل(ح_ر) \,.\, ل(ح/ح_ر)$

ب) $ل(ح_ر/ح) = \dfrac{ل(ح_ر) \,.\, ل(ح/ح_ر)}{\sum_{ر=1}^{ن} ل(ح_ر)\, ل(ح/ح_ر)}$

استخدام نظرية بيز:

يمكن حل مسائل نظرية بيز باتباع الخطوات التالية:

١. تحديد الأحداث المتباعدة والشاملة التي ينقسم إليها الفضاء العيني، وهي التي يكون مجموع احتمالاتها يساوي دائما (١)، ونسميها $ح_1، ح_2، ح_3، \dots، ح_ن$، ونكتب احتمالاتها .

٢. تحديد الحدث الآخر (ح) الذي يتقاطع مع بعض أو كل الأحداث في الخطوة ١ .

٣. تعيين احتمال وقوع الحدث (ح) بشرط وقوع الحدث $ح_1$، واحتمال وقوع الحدث (ح) بشرط وقوع الحدث $ح_2$، واحتمال وقوع الحدث (ح) بشرط وقوع الحدث $ح_3$، . . . . أي تعيين $ل(ح/ح_1)$ ، $ل(ح/ح_2)$ ، $ل(ح/ح_3)$ ، . . . .

٤. تحديد الاحتمال المطلوب: احتمال وقوع أحد الأحداث في الخطوة (١) بشرط وقوع الحدث (ح) .

٥. حساب ل(ح) والاحتمال المطلوب بتطبيق النظرية .

أو يمكن تنظيم المعطيات في جدول كالتالي:

$ع_ر$	ل($ع_ر$)	ل(ع / $ع_ر$)	ل($ع_ر$).ل(ع / $ع_ر$)
$ع_١$			
$ع_٢$			
Σ	١	—	ل(ع)

ملاحظات على الجدول:

١. الخلية الأخيرة في العمود الثاني تمثل مجموع احتمالات الأحداث ودائما يكون المجموع (١) لأن الأحداث شاملة ومتباعدة.

٢. الخلية الأخيرة في العمود الأخير تمثل ل(ح) .

الدرس السادس: استقلال الحوادث

أولا: ملخص الدرس

لقد تعلمت في هذا الدرس:

- التعرف على استقلال الحوادث واستخدامها .

تعريف

يقال أن الحدث $ح_١$ مستقل عن الحدث $ح_٢$ إذا كانت نتيجة أحدهما لا تؤثر في نتيجة الآخر . أي أن :

$$ل(ح_١ / ح_٢) = ل(ح_١)، ل(ح_٢ / ح_١) = ل(ح_٢)$$

نتيجة

إذا كان $ح_١$ ، $ح_٢$ حدثين مستقلين فإن $ل(ح_١ \cap ح_٢) = ل(ح_١) . ل(ح_٢)$

نتيجة

الأحداث المستقلة لا تكون متنافية ما لم يكن احتمال أحدهما يساوي صفر.

الدرس الأول: النظام الستيني

أولا: ملخص الدرس:

لقد تعلمت في هذا الدرس:

- التعبير عن الزاوية بالدرجات والدقائق والثواني .
- ايجاد طول القوس المقابل لزاوية مركزية معلوم قياسها .

أ) النظام الستيني :

عندما يدور الضلع النهائي للزاوية دورة كاملة فإنه يكون قد دار ٣٦٠° والدورة الكاملة تتكون من أربع زوايا قوائم قياس كل منها ٩٠°.
في هذا النظام تقسم الدرجة إلى ٦٠ قسماً يسمى كل منها بالدقيقة ١° = ٦٠َ ، وكل دقيقة تقسم إلى ٦٠ قسماً يسمى كل منها بالثانية أي ١َ = ٦٠ً وهكذا يمكن تلخيص ما تم التوصل إليه بالآتي:

الدورة = ٤ قوائم
القائمة = ٩٠° (تسعون درجة)
الدرجة (١°) = ٦٠َ (ستون دقيقة)
الدقيقة (١َ) = ٦٠ً (ستون ثانية)

نتيجة

أ) لأي دائرة تكون النسبة بين المحيط وطول القطر مقداراً ثابتاً يرمز لها بالرمز π أو ط وقيمتها التقريبية $\frac{٢٢}{٧}$ أو ٣,١٤
ب) نسبة طول أي قوس في دائرة إلى محيط تلك الدائرة كنسبة قياس زاوية القوس المركزية إلى ٣٦٠°

$$\frac{\text{طول القوس}}{\text{محيط الدائرة}} = \frac{\text{قياس زاوية القوس المركزية بالدرجات}}{٣٦٠^\circ}$$

جـ) يقاس محيط الدائرة أو القوس بإحدى طريقتين:
١) وحدات الطول ويحسب كما في ب .
٢) بالدرجات وهو عبارة عن قياس الزاوية المركزية التي تقابل ذلك القوس .

الدرس الثاني: التقدير الدائري

أولا: ملخص الدرس:

لقد تعلمت في هذا الدرس:

- **التعرف على النظام الدائري**
- **تحويل الزاوية من النظام الستيني إلى التقدير الدائري والعكس .**
- **ايجاد طول القوس في الدائرة بمعلومية نصف قطر الدائرة والزاوية النصف قطرية**

تعريف

– تسمى الزاوية المركزية التي تقابل قوسا من محيط الدائرة طوله يساوي طول نصف قطر الدائره بالزاوية النصف قطرية Radian ويرمز لها بالرمز (د)

$$\text{قياس الزاوية بالزوايا النصف قطرية} = \frac{\text{طول القوس المقابل للزاوية}}{\text{نصف قطر الدائرة}} = \frac{ل}{نق}$$

– يسمى نظام قياس الزاوية باستخدام الزاوية النصف قطرية بالتقدير الدائري

الدرس الثالث:زاوية الاساس

أولا: ملخص الدرس:

لقد تعلمت في هذا الدرس:

- **تحديد الزاوية المرجعية للزواية**
- **ايجاد النسب المثلثية ومقلوباتها للزاوية المرتبطة بزاوية ما .**

نتيجة

لكل زاوية توجد زاوية حادة س ترتبط بها تسمى الزاوية المرجعية أو زاوية الأساس بحيث تحقق العلاقات التالية:

أ) جاس $= |$ جا $(\pi -$ س$)| = |$ جا $(\pi +$ س$)| = |$ جا$(2\pi -$ س$)|$

ب) جتاس $= |$ جتا $(\pi -$ س$)| = |$ جتا $(\pi +$ س$)| = |$ جتا $(2\pi -$ س$)|$

جـ) تتحدد إشارة النسبة المثلثية حسب الربع الذي يقع فيه ضلع الزاوية النهائي

الدرس الرابع: الدوال المثلثية وتمثيلها بيانيا

أولا: ملخص الدرس:

لقد تعلمت في هذا الدرس:

- **تمثيل الدوال ص= جا س ، ص= جتاس ، ص= ظاس ومقلوباتها ودراسة سلوك كل منها .**
-

نتيجة

١) كل نقطة على دائرة الوحدة تمثل نقطة مثلثية لزاوية في الوضع القياسي : ٠° ≤ س ≤ ٣٦٠°

٢) مدى كل من الدالة ص = جاس ، ص = جتا س هو الفترة [− ١ ، ١]

نتيجة

١) بيان الدالة ص = قتا س على الفترة ٠° ≤ س ≤ ٣٦٠° عبارة عن جزأين ،
المجال]٠° ، ٣٦٠°[− {١٨٠°} مداها ح −]− ١ ، ١[

٢) بيان الدالة ص = قا س على الفترة ٠° ≤ س ≤ ٣٦٠° عبارة عن
ثلاثة أجزاء ، المجال = [٠° ، ٣٦٠°] − {٩٠° ، ٢٧٠°} ومداها ح −]−١ ، ١[

٣) بيان الدالة ص = ظتا س على الفترة ٠° ≤ س ≤ ٣٦٠° عبارة عن
جزأين ، المجال =]٠° ، ٣٦٠°[− {١٨٠°} ومداها = ح

الدرس الخامس : الدوال الدورية

أولا: ملخص الدرس:

لقد تعلمت في هذا الدرس:

- **التعرف على الدوال الدورية ، السعة ، المدى ، القيمة الصغرى ، القيمة العظمى ، الإزاحة ، الدورة ، التردد وتحديدها للدوال التي بالصورة :**
  ص= أ جا ب (س+ هـ) + جـ
  ص= أ جتا ب (س+ هـ) + جـ
  ص= أ ظا ب (س+ هـ) + جـ
  وتمثيلها على المستوى الإحداثي .

وبشكل عام يمكن كتابة قياس الزاوية بالصورة $\theta \mp$ ٢ن π حيث ن ترمز إلى عدد الدورات الكاملة التي تقطعها النقطة على محيط الدائرة، وإشارة السالب وضعت على أساس أن الخيط قد لف مع اتجاه عقارب الساعة.

نتيجة

النقطة المثلثية للزاوية θ تنطبق على النقط المثلثية لجميع الزوايا θ + ٢ن π حيث ن ∈ صـ ولها نفس النسب المثلثية.

تعريف

- تسمى الدالة التي يعيد منحناها نفسه من فترة لأخرى بالدالة الدورية.
- الفترة التي يعيد المنحنى نفسه فيها هي الفرق بين قياس الزاوية عند نقطة البداية، و قياس الزاوية عند نهايتها ويأخذ المنحنى في هذه الفترة شكل الموجه Wave ويسمى دورة.
- يسمى نصف الفرق بين القيمة العظمى للموجة والقيمة الصغرى لها بالسعة Amplitude .
- معكوس طول الموجه يسمى التردد.

نتيجة

للدالة ص = م جاب (س + جـ) + هـ ، ص = م جتاب (س + جـ) + هـ

تكون: الإزاحة الأفقية Phase Shift = جـ وحدة إلى اليسار إذا كان جـ > ٠ ، وإلى اليمين إذا كان جـ < ٠

الإزاحة الرأسية Vertical Shift = هـ إلى الأعلى إذا كان هـ > ٠ ، وإلى الأسفل إذا كان هـ < ٠

تعريف

لكل ص = م جاب س و ص = م جتاب س حيث م ، ب ≠ صفر يكون:

م) السعة = |م| Amplitude

ب) الدورة = $\frac{٢\pi}{|ب|}$ Period

جـ) القيمة العظمى = |م| Maximum Value

د) القيمة الصغرى = −|م| Minimum Value

هـ) المدى = [−م، م]

و) التردد = $\frac{١}{\text{الدورة}}$ Frequency

الدرس السادس : المتطابقات

أولا: ملخص الدرس:

لقد تعلمت في هذا الدرس:

برهنه المتطابقات المثلثية في الجمع والطرح وتطبيقات عليها

استخدام متطابقات ضعفي الزاوية ، ونصف الزاوية

نتيجة

١) $\text{جا}(\text{أ}+\text{ب}) = \text{جاأ جتاب} + \text{جتاأ جا ب} \longleftrightarrow \text{جا٢أ} = \text{٢ جاأ جتاأ}$

٢) $\text{جتا}(\text{أ}+\text{ب}) = \text{جتاأ جتا ب} - \text{جاأ جا ب} \longleftrightarrow \text{جتا٢أ} = \text{جتا}^{2}\text{أ} - \text{جا}^{2}\text{أ}$

٣) $\text{ظا}(\text{أ}+\text{ب}) = \dfrac{\text{ظاأ} + \text{ظا ب}}{1 - \text{ظاأ ظا ب}} \longleftrightarrow \text{ظا٢أ} = \dfrac{\text{٢ظاأ}}{1 - \text{ظا}^{2}\text{أ}}$ ، $\text{ظاأظا ب} \neq 1$

٤) $\text{جا}(\text{أ}-\text{ب}) = \text{جاأ جتاب} - \text{جتاأ جاب}$

٥) $\text{جتا}(\text{أ}-\text{ب}) = \text{جتاأ جتاب} + \text{جاأ جاب}$

٦) $\text{ظا}(\text{أ}-\text{ب}) = \dfrac{\text{ظاأ} - \text{ظاب}}{1 + \text{ظاأ ظاب}}$ ، $\text{ظاأظاب} \neq -1$

$$\therefore \text{جتا}\frac{\text{أ}}{2} = \mp\sqrt{\frac{\text{جتاأ}+1}{2}}$$

$$\text{جا}\frac{\text{أ}}{2} = \mp\sqrt{\frac{1-\text{جتاأ}}{2}}$$ ،

الدرس السابع: مساحة المثلث

أولا: ملخص الدرس:

لقد تعلمت في هذا الدرس:

- **حساب مساحة المثلث بمعلومية طول ضلعين في مثلث وقياس الزاوية المحصورة بينهما .**
- **حساب مساحة المثلث بمعلومية أطوال اضلاعه .**

نتيجة

مساحة المثلث تساوي نصف حاصل ضرب أي ضلعين في جا الزاوية بينهما أي:

م △ أب جـ = $\frac{1}{2}$ أ′ × حـ′ جا ب = $\frac{1}{2}$ ب′ × حـ′ جا أ = $\frac{1}{2}$ أ′ × ب′ جا حـ

نتيجة

مساحة المثلث إذا علمت أطوال أضلاعه م = √(ح (ح − أ′) (ح − ب′) (ح − حـ′))

حيث ح ترمز إلى نصف المحيط ، أ′، ب′، حـ′ ترمز إلى أطوال أضلاع المثلث

الدرس الثامن : حل المثلث

أولا: ملخص الدرس:

لقد تعلمت في هذا الدرس:

نتيجة

لحل أي مثلث لابد من معرفة ثلاثة عناصر من عناصره الستة يكون أحدها ضلع.
وهنالك عدة حالات يمكن معها حل المثلث أو رسمه هي:

أ) إذا علم ثلاثة أضلاع
ب) إذا علم ضلعان وزاوية محصورة
جـ) إذا علم ضلع وزاويتان
د) إذا علم ضلعان وزاوية غير محصورة (الحالة المبهمة).
هـ) إذا علم ضلع ووتر والقائمة

نتيجة

لأي مثلث أ ب جـ يكون:

$$\frac{\text{أَ}}{\text{جا أ}} = \frac{\text{بَ}}{\text{جا ب}} = \frac{\text{حَ}}{\text{جا حـ}}$$

حيث أَ الضلع المقابل للزاوية أ، بَ الضلع المقابل للزاوية ب ،حَ الضلع المقابل للزاوية حـ

نتيجة

لأي مثلث أ ب جـ فإن:

$$\text{أَ}^2 = \text{بَ}^2 + \text{جـَ}^2 - 2\,\text{بَ}\,\text{جـَ}\,\text{جتا أ} \longrightarrow \text{جتا أ} = \frac{\text{بَ}^2 + \text{جـَ}^2 - \text{أَ}^2}{2\,\text{بَ}\,\text{جـَ}}$$

$$\text{بَ}^2 = \text{أَ}^2 + \text{جـَ}^2 - 2\,\text{أَ}\,\text{جـَ}\,\text{جتاب} \longrightarrow \text{جتاب} = \frac{\text{أَ}^2 + \text{جـَ}^2 - \text{بَ}^2}{2\,\text{أَ}\,\text{جـَ}}$$

$$\text{جـَ}^2 = \text{أَ}^2 + \text{بَ}^2 - 2\,\text{أَ}\,\text{بَ}\,\text{جتا جـ} \longrightarrow \text{جتا جـ} = \frac{\text{أَ}^2 + \text{بَ}^2 - \text{جـَ}^2}{2\,\text{أَ}\,\text{بَ}}$$