ملخص الوحدة السادسة الأسس واللوغاريتمات

تاريخ نشر الملف على موقع المناهج: 03-02-2024 07:16:19 | اسم المدرس: فيصل بن علي الطائي شيماء عبد الرحمن أحمد نانسي محمد غريب

لماذا ظهر علم اللوغاريتمات ؟ وماهي الفائدة منها في حياتنا اليومية ؟

اللوغاريتم هو عملية حسابية تحدد عدد مرات ضرب رقم معين يسمى الأساس ، في نفسه للوصول إلى رقم آخر ، نظرا" لأن اللوغاريتمات تربط التقدم الهندسي بالتقدم الحسابي ، وتستخدم بشكل كبير في الحياة اليومية مثل تباعد خيوط الجيتار وصلابة المعادن وشدة الأصوات والنجوم والعواصف وقياس الزلازل والأحماض ، ويوجد نوعين من اللوغاريتمات ، وهما اللوغاريتم الطبيعي واللوغاريتم العشري

نعلم أنه يمكن كتابة العدد ٨ على الصورة : ٨ = ٢^{٣}

ويمكن التعبير عنها بالصيغة اللوغاريتمية على الصورة: ٣= لو$_{٢}$ ٨

وتُقرأ : لوغاريتم العدد ٨ للأساس ٢ = ٣ (الأس)

لوغاريتم العدد للأساس = الأس

وهكذا نجد أن كل صورة أسية

أساسها عدد حقيقي موجب ≠ ١

يمكن تحويلها إلى الصورة اللوغاريتمية

ملاحظات

١ – لا معنى للحديث عن لوغاريتم لعدد غير موجب ، ولا معنى للحديث عن لوغاريتم للصفر

لا معنى للوغاريتمات على الصورة لو$_{٢}$ -٣ ، لو$_{٦}$ صفر

٣ – اللوغاريتم المعتاد هو اللوغاريتم الذي أساسه ١٠ وقد اتفق على حذف هذا الأساس عند كتابة اللوغاريتم

أي أنه يمكن كتابة لو$_{١٠}$ ٣ على الصورة لو ٣ مباشرةً

الدالة اللوغاريتمية هي الدالة العكسية للدالة الأسية

عبر عن الصيغة الأسية بالصيغة اللوغاريتمية في كل من :

١) لو$_{٦}$ ٣٦ = ٢   **الحل**   ٦^{٢} = ٣٦

٢) لو$_{٤}$ ٦٤ = ٣   **الحل**   ٤^{٣} = ٦٤

حول الصيغة اللوغاريتمية إلى الصيغة الأسية

١) ١١^{٢} =١٢١   **الحل** ←   لو$_{١١}$ ١٢١ = ٢

اختر الإجابة الصحيحة فيما يلي

١) الصورة لو$_{م}$ س = ص تكافئ تماماً الصورة

لو$_{م}$ ص = س ، م^{س} = ص ، م^{ص} = س ، ص = م س

٢) مجموعة حل المعادلة لو$_{س}$ ٨١ = ٤ هو :

{ -٣ } ، { ٣ } ، { -٣ ، ٣ } ، { ٩ }

٣) إذا كان لو (س + ١١) = ٢ فإن : س = ...

-٩ ، ٢٢ ، ٨٩ ، ٩١

٤) إذا كان لو$_{٣}$ (٤ + لو$_{٢}$ س) = ٢ فإن : س = ...

١٦ ، ٣٢ ، ٦٤ ، ١٢٨

إذا كانت لو$_{٢}$ ١١ ≃ ٣,٤٦ **فأوجد القيمة التقريبية للمقدار** لو$_{٢}$ ١٢١

∵ ١١^{٢} = ١٢١

∴ لو$_{٢}$ ٢^{٣,٤٦}

= لو$_{٢}$ ٢

$\text{لو}_{\text{م}}\ \text{س} = \text{ص} \iff \text{م}^{\text{ص}} = \text{س}$ حيث م ∈ ح^{+} - { ١ } ، س ∈ ح^{+} ، ص ∈

حاول بنفسك (حول الصور التالية إلى الصورة الأسية)

١) $\text{لو}_{٢}\ ٦٤ = ٦$

٢) $\text{لو}_{٢}\ ٨\sqrt{٢} = \frac{٧}{٢}$

٣) $\text{لو}_{\frac{٢}{٥}}\ \frac{٤}{٢٥} = ٢$

أوجد قيمة المقدار $\text{لو}_{٣}\left(\frac{١}{٩^{-٢}} \div ٢٧^{٣} \right)$

الحل

بفرض أن $\text{لو}_{٣}\left(\frac{٩^{٢}}{٢٧^{٣}} \right) = \text{س}$

$\therefore \text{لو}_{٣}\left(\frac{٣^{٤}}{٣^{٩}} \right) = \text{س}$

حاصل قسمة الأسس طرحها

$\Leftarrow \text{لو}_{٣}\ ٣^{٤-٩} = \text{س}$

$\text{لو}_{٣}\ ٣^{-٥} = \text{س}$

نحول إلى الصيغة الأسية

$\Leftarrow ٣^{-٥} = ٣^{\text{س}}$

إذا كان الأساس = الأساس
فإن الأس = الأس

$\text{س} = -٥$

تذكر أن

$لو_{م}\ س = ص$

معرفة لجميع قيم س ، م

التي تحقق أن

س > ٠

م > ٠

لاحظ

$لو\ ١٠ = ١ \Leftarrow ١٠^{١} = ١٠$

$لو\ ١ = ٠ \Leftarrow ١٠^{٠} = ١$

$لو\ ١٠^{س} = س \Leftarrow ١٠^{س} = ١٠^{س}$

حول ما يلي إلى الصيغة اللوغاريتمية

١) $١٠^{س} = ٥٢$

$لو\ ٥٢ = س$

$س = ١,٧$

٢) $١٠^{س} = ٤$

$لو\ ٤ = س$

$س = ٠,٦$

٣) $١٠^{س} = ٦٠٠٠٠٠٠$

$لو\ ٦٠٠٠٠٠٠ = س$

$س = ٦,٧٧$

٤) $١٠^{س} = ٠,٦$

$لو\ ٠,٦ = س$

$س = -٠,٢٢$

حول مايلي إلى الصيغة الأسية ثم أوجد قيمة س

١) $لو\ (س + ١) = ٢$

$(س + ١) = ١٠^{٢}$

$س + ١ = ١٠٠$

$س = ١٠٠ - ١$

$س = ٩٩$

٢) $لو\ (٢س - ٤) = ١$

$٢س - ٤ = ١٠$

$٢س - ٤ = ١٠$

$٢س = ١٤$

$س = ٧$

٣) $لو\ \frac{٢س + ٨}{س} = ٠$

$\frac{٢س + ٨}{س} = ١٠^{٠}$

$\frac{٢س + ٨}{س} = ١$

$٢س + ٨ = س$

$٢س - س = -٨$

$س = -٨$

حاول بنفسك

حول الصيغة اللوغاريتمية التالية إلى الصيغة الأسية

$لو\ (٢٠س - ٠,٣٠) = -١$	$لو\ ((س \div ٢٠٠) -٢) = -٢$

إعداد وتقديم : أ/ فيصل بن علي الطائي ، أ/ شيماء عبد الرحمن أحمد ، أ / نانسي محمد غريب

ذكرنا في الدرس السابق

$\text{لو}_{١٠} ١٠ = ١ \iff ١٠^{١} = ١٠$

حيث الأساس = ١٠

$\text{لو}_{١٠} ١٠ = ١$ يمكننا القول بأن

$\text{لو}_{م} م = ١$

$\text{لو}_{١٠} ١ = ٠ \iff ١٠^{٠} = ١$

وبغض النظر عن الأساس حيث أن أي عدد مرفوع للأس صفر = ١ ماعدا الصفر نفسه يمكننا القول بأن

$\text{لو}_{م} ١ =$ صفر

تذكر أن

$م \in ح^{+} - \{١\}$

قوانين اللوغاريتمات

إذا كانت : $س \in ح^{+}$ ، $م \in ح^{+} - \{١\}$ ، $ن \in ح$

فإن $\text{لو}_{م} س^{ن} = ن \; \text{لو}_{م} س$

إذا كانت : س ، ص $\in ح^{+}$ ، $م \in ح^{+} - \{١\}$

فإن : $\text{لو}_{م} س ص = \text{لو}_{م} س + \text{لو}_{م} ص$

إذا كانت : س ، ص $\in ح^{+}$ ، $م \in ح^{+} - \{١\}$

فإن : $\text{لو}_{م} \frac{س}{ص} = \text{لو}_{م} س - \text{لو}_{م} ص$

أمثلة :

اكتب على صورة لوغاريتم واحد

١) $\text{لو}_{٣} ١٥ + \text{لو}_{٣} ٦$

الحل

$= \text{لو}_{٣} (١٥ \times ٦)$

$= \text{لو}_{٣} ٩٠$

٢) $\text{لو}_{٥} ١٠٠ - ٣ \; \text{لو}_{٥} ٢$

الحل

$= \text{لو}_{٥} ١٠٠ - \text{لو}_{٥} ٢^{٣}$

$= \text{لو}_{٥} \frac{١٠٠}{٨}$

٣) أي من العبارات التالية صحيحة ؟

- [x] لو ٢ - لو $\sqrt{٢}$ = لو $\sqrt{٢}$
- [ ] لو$_{١}$ ١ = صفر
- [ ] لو $\frac{٧}{٥}$ = $\frac{\text{لو ٧}}{\text{لو ٥}}$
- [ ] لو٧ ÷ لو ٢ = لو ٥

٤) إذا كان : لو س - لو ٢ = لو ٤ فإن : س =

- [ ] ٤
- [ ] ٦
- [x] ٨
- [ ] ١٦

حاول بنفسك

إذا كان : لو س + لو ٥ = ٢ فإن : س = ...

اختر الإجابة الصحيحة :

إذا كان لو س + ع = لو ص فإن س = ...

- [ ] ص × ١٠^{ع}
- [ ] $\frac{ع}{ص}$
- [ ] (١٠)^{ص} - ع
- [ ] $\frac{١}{ص}$ × (١٠)^{ع}

٥) إذا علمت أن س = لو$_{٢}$ م ، ص = لو$_{٢}$ ب فاكتب ما يلي بدلالة س ، ص

لو$_{٢}$ م ب

الحل

س = لو$_{٢}$ م ⟸ م = ٢^{س}

ص = لو$_{٢}$ ب ⟸ ب = ٢^{ص}

لو$_{٢}$ م ب = لو$_{٢}$ م + لو$_{٢}$ ب

= لو$_{٢}$ ٢^{س} + لو$_{٢}$ ٢^{ص}

= س لو$_{٢}$ ٢ + ص لو$_{٢}$ ٢

حيث أن لو$_{٢}$ ٢ = ١

= س + ص

حـــــــــــــل آخر

لو$_{٢}$ م ب = لو$_{٢}$ م + لو$_{٢}$ ب

= س + ص

إعداد ونقديم : أ/ فيصل بن علي الطائي ، أ/ شيماء عبد الرحمن أحمد ، أ / نانسي محمد غريب

ملاحظة هامة عند حل المعادلات اللوغاريتمية

إذا كانت س ∋ ح – { ٠ } ، م عدداً زوجياً لايساوي الصفر ، أ ∋ ح$^{+}$ – { ١ }

فإن : لو$_{أ}$ س^{م} = م لو$_{أ}$ | س | فمثلاً : لو$_{٣}$ س^{٤} = ٤ لو$_{٣}$ | س |

حل المعادلات اللوغاريتمية الآتية

١) لو$_{٢}$ س = ٧

س = ٢^{٧}

س = ١٢٨

٢) لو$_{٥}$ س = - ٢

س = ٥$^{-٢}$

س = $\frac{١}{٢٥}$

٣) لو$_{\frac{١}{٣}}$ س = - ١

س = $\left(\frac{١}{٣}\right)^{-١}$

س = ٣

٤) لو$_{٢}$ (س + ٣) = ٤

س + ٣ = ٢^{٤}

س + ٣ = ١٦

س = ١٦ – ٣

س = ١٣

٥) لو$_{٦}$ $\frac{٢}{س}$ = - ٢

$\frac{٢}{س}$ = ٦$^{-٢}$

$\frac{٢}{س}$ = $\frac{١}{٣٦}$

س = ٧٢

٦) لو$_{س}$ ٦٤ س = ٤

٦٤ س = س^{٤}

س^{٤} – ٦٤ س = ٠

س (س^{٣} – ٦٤) = ٠

إما أن

س = ٠ **(حل مرفوض)**

أو (س^{٣} – ٦٤) = ٠

س^{٣} = ٦٤ **بأخذ الجذر التكعيبي للطرفين**

س = ٤

٧) ٢ لو س – لو (س + ٢) = ٠

لو س^{٢} = لو (س + ٢)

س^{٢} = س + ٢

س^{٢} - س – ٢ = ٠

(س – ٢) (س + ١) = ٠

إما أن س = ٢

أو س = - ١ **(حل مرفوض)**

٨) لو$_{٢}$ (لو$_{٣}$ س) = ١

لو$_{٣}$ س = ٢^{١}

س = ٣^{٢}

س = ٩

٩) لو س^{٢} = لو ٤ + لو ٩

لو س^{٢} = لو (٤ × ٩)

س^{٢} = ٣٦ **(بأخذ الجذر التربيعي للطرفين)**

س = ± ٦

(الحلين مقبولين لأن أصل السؤال س^{٢})

١٠) س^{لوس} = ١٠

لو س^{لوس} = لو ١٠ **(بأخذ لو للطرفين)**

⟸ لو س × لو س = لو ١٠

(لو س)^{٢} = ١

لو س = ± ١

إما أن

لو س = +١

∴ س = ١٠

أو

لو س = - ١

∴ س = ٠,١

(راجع خواص اللوغاريتمات)

حاول بنفسك

أوجد قيمة س فيما يلي :

١) لو س^{٢} = (لو س)^{٢}

٢) لو$_{ب}$ (س + ٥) = لو$_{ب}$ س + لو$_{ب}$ ٥

٣) لو$_{٣}$ (٤ + لو$_{٢}$ س)= ٢

للمميزين

٤) لو$_{٢}$ (٢^{س} – ٤) + س – ٥ = ٠

راجع خواص اللوغاريتمات و

انتبه : للإجابات المرفوضة

إذا كان ص = $\text{ب}^{\text{س}}$

فإن س = $\frac{\text{لو ص}}{\text{لو ب}}$

حل المعادلات الآتية

١

$\text{٥}^{\text{س}}$ = ١٧

لو $\text{٥}^{\text{س}}$ = لو١٧

س لو ٥ = لو١٧

س = $\frac{\text{لو ١٧}}{\text{لو ٥}}$

س = ١,٧٦

٢

$\text{٢}^{\text{س - ١}}$ = ٧

لو $\text{٢}^{\text{س - ١}}$ = لو ٧

(س – ١) لو ٢ = لو ٧

(س – ١) = $\frac{\text{لو ٧}}{\text{لو ٢}}$

س = $\frac{\text{لو ٧}}{\text{لو ٢}}$ + ١

س = ٣,٨٠٧

٣

لو $\text{٥}^{\text{س + ١}}$ = لو $\text{٢}^{\text{٤ س – ٣}}$

(س + ١) لو ٥ = (٤ س – ٣) لو ٢

$\frac{\text{لو ٥}}{\text{لو٢}}$ = $\frac{\text{٤ س – ٣}}{\text{س + ١}}$

لو ٥ (س + ١) = لو ٢ (٤ س – ٣)

س لو ٥ + لو ٥ = ٤ س لو ٢ – ٣ لو ٢

٣ لو ٢ + لو ٥ = ٤ س لو ٢ – س لو ٥

٣ لو ٢ + لو ٥ = س (٤ لو ٢ – لو ٥)

$\frac{\text{٣ لو ٢ + لو ٥}}{\text{٤ لو ٢ – لو ٥}}$ = س

س = ٣,١٧

قواعد التقريب في الأرقام المعنوية

الرقم الذي نود اسقاطه أصغر من ال ٥

العدد ٥٦,٤٣٦٧٨ مقرباً إلى ثلاثة أرقام معنوية = ٥٦,٤

الرقم الذي نود إسقاطه أكبر من أو يساوي ٥

العدد ٧٣٦٨مقرباً إلى ثلاثة أرقام معنوية = ٧٣٧٠

عند اطلاق صاروخ بأعلى قوة ، تتزايد سرعته بشكل أسي . تعطي سرعة الصاروخ (س) م /ث من خلال الصيغة

ي = ٤٣٦ × (١,٠٥٦)^{ن} ، حيث ن هي عدد الثواني بعد الانطلاق

حاول بنفسك

أ) اكتب السرعة الابتدائية للصاروخ

السرعة الابتدائية = ٤٣٦ × (١,٠٥٦)^{٠} = ٤٣٦

ب) ماهي السرعة النسبية التي تتزايد وفقها سرعة الصاروخ كل ثانية ؟

١,٠٥٦ × ١٠٠ ٪ = ١٠٥,٦ ٪

ج) احسب وقرب إلى أقرب ثانية ، الزمن الذي يستغرقه الصاروخ ليصل إلى سرعة ٢كم/ث

١ كم = ١٠٠٠ م

٢ كم / ث = ٢٠٠٠ م / ث

٢٠٠٠ = ٤٣٦ × (١,٠٥٦)^{ن}

بأخذ (لو) للطرفين

$\frac{٢٠٠٠}{٤٣٦}$ = (١,٠٥٦)^{ن}

لو $\frac{٢٠٠٠}{٤٣٦}$ **= لو (١,٠٥٦)**^{ن}

بالقسمة على لو (١,٠٥٦)

ن لو (١,٠٥٦) = لو $\frac{٢٠٠٠}{٤٣٦}$

ن = ٢٧,٩٥ ث

ﻡ ب جـ مثلث قائم الزاوية في ﻡ ، ﻡ ب = لو$_{٤}$ ٣ سم ، ﻡ جـ = لو$_{٣}$ ٦٤ سم

فإن مساحة المثلث = ...

١,٥ ٣ لو ١٦ لو ٦٧