

تم تحميل هذا الملف من موقع المناهج العُمانية



*للحصول على أوراق عمل لجميع الصفوف وجميع المواد اضغط هنا

<https://almanahj.com/om>

* للحصول على أوراق عمل لجميع مواد الصف الحادي عشر اضغط هنا

<https://almanahj.com/om/11>

* للحصول على جميع أوراق الصف الحادي عشر في مادة رياضيات بحتة ولجميع الفصول, اضغط هنا

https://almanahj.com/om/11pure_math

* للحصول على أوراق عمل لجميع مواد الصف الحادي عشر في مادة رياضيات بحتة الخاصة بـ الفصل الثاني اضغط هنا

https://almanahj.com/om/11pure_math2

* لتحميل كتب جميع المواد في جميع الفصول للـ الصف الحادي عشر اضغط هنا

<https://almanahj.com/om/grade11>

للتحدث إلى بوت على تلغرام: اضغط هنا

https://t.me/omcourse_bot



سَلْطَنَةُ عُمَانِ
وَدَارُ الثَّرِيَّةِ وَالْبَعْلِيَّةِ

الرياضيات البحتة

للفصل الحادي عشر

الفصل الدراسي الثاني

الطبعة الأولى ١٤٢٧ هـ - ٢٠٠٦ م



الرياضيات البحتة

للفصل الحادي عشر

الفصل الدراسي الثاني

الطبعة الأولى ١٤٢٧هـ - ٢٠٠٦م



حضرة صاحب الجلالة سلطان قابوس بن سعيد المعظم

كتاب الرياضيات البمتة للمصن المادي عشر

جميع حقوق الطبع والنشر والتوزيع محفوظة لوزارة التربية والتعليم

ألفت هذا الكتاب لجنة مشكلة بموجب القرار الوزاري رقم ١٣٢ / ٢٠٠٣م والمؤلفة من :

رئيس اللجنة :

د. زويتة بنت صالح المسكرية

أعضاء اللجنة :

عضواً	محمد بن راشد بن سعيد الحديدي
عضواً	سعد مقبل بشير الجبور
عضواً	سالم بن سعيد بن حميد الوهبي
عضواً	يعقوب بن مبارك بن محمد الرحي
عضواً	خليفة بن زايد الشقصي
عضواً	طارق بن حمد بن حميد العامري
عضواً	عزة بنت حمود الحارثية

تم تطوير هذا الكتاب في قسم مناهج الرياضيات
بداثة تطوير مناهج العلوم التطبيقية.
بالمديرية العامة للمناهج

الإشراف الفني :

مركز تقنيات التعليم والكتاب المدرسي بالمديرية العامة للمناهج .

قائمة المحتويات

الموضوع	الصفحة
الوحدة الرابعة (المتتاليات والمتسلسلات)	٩
- المتتاليات.	١٣
- المتتالية الحسابية.	١٨
★ الأوساط الحسابية.	٢٢
- تمارين ومسائل (١).	٢٤
- مجموع المتسلسلة الحسابية.	٢٦
- تمارين ومسائل (٢).	٣٠
- المتتالية الهندسية.	٣٢
★ الحد العام.	٣٣
★ الأوساط الهندسية.	٣٥
- تمارين ومسائل (٣).	٣٧
- مجموع حد الأول من المتسلسلة الهندسية.	٣٩
★ مجموع المتسلسلة الهندسية غير المنتهية.	٤١
- تمارين ومسائل (٤).	٤٣
- تمارين ومسائل عامة.	٤٥
الوحدة الخامسة (هندسة الفضاء)	٤٧
- هندسة الفضاء.	٥١
★ مسلمات هندسية.	٥٣
- تمارين ومسائل (١).	٥٩
- الفراغ (الفضاء).	٦١
المستقيمات والمستويات في الفضاء.	٦٣
- تمارين ومسائل (٢).	٦٩
- الاحداثيات في ثلاثة أبعاد.	٧١
★ المسافة بين نقطتين واحداثيات منتصف البعد بينهما.	٧٤
★ احداثيات نقطة منتصف المسافة بين نقطتين.	٧٤

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

المقدمة

الحمد لله رب العالمين والصلاة والسلام على خاتم الأنبياء والمرسلين وخير خلق الله أجمعين سيدنا محمد وعلى آله وصحبه والتابعين لهم بإحسان إلى يوم الدين ... وبعد،،،

أخي الطالب / أختي الطالبة:

يسر وزارة التربية والتعليم أن تضع بين يديك هذا الكتاب وهو الجزء الثاني من سلسلة تتكون من جزئين يغطيان موضوعات مادة الرياضيات البحتة المقررة لطلبة الصف الحادي عشر، حيث يدرس الجزء الأول في الفصل الدراسي الأول، أما الجزء الثاني فيدرس في الفصل الدراسي الثاني.

بُني منهاج الرياضيات البحتة للصف الحادي عشر على فلسفة وأسس واضحة منها:

- * التشجيع على التحليل والاستقصاء.
- * التركيز على جوانب التعلم الذاتي والتعلم التعاوني.
- * تنمية التفكير العلمي والبحث وتشجيع الابتكار.
- * التركيز على المهارات العلمية.
- * ارتباط محتوى الكتاب بصورة وثيقة بحياة الطالب اليومية.

هذا وقد اشتمل الجزء الأول على ثلاث وحدات، هي:

الوحدة الأولى : التباديل والتوافيق.

الوحدة الثانية : الاحتمالات.

الوحدة الثالثة : الدوال الدائرية.

٧٥	★ المساقط العمودية.
٧٧	★ الزاوية الزوجية (الزاوية بين مستويين وقياسها).
٧٨	★ الزاوية المستوية لزاوية زوجية.
٨٠	- تمارين ومسائل (٣).
٨٢	- تمارين ومسائل عامة.
٨٥	الوحدة السادسة (الدوال)
٨٩	- مطلق العدد.
٩٠	★ دالة المطلق.
٩٣	- صحيح العدد.
٩٥	- دالة الصحيح.
٩٥	★ د (س) = [س]
٩٦	★ الدالة د (س) = $\frac{1}{س}$
٩٧	- تمارين ومسائل (١).
٩٨	- الدالة المحايدة.
٩٩	- الدالة العكسية.
١٠٥	- تمارين ومسائل (٢).
١٠٦	- الدالة الأسية.
١١٣	- تمارين ومسائل (٣).
١١٤	- الدالة اللوغاريتمية.
١١٧	- تمارين ومسائل (٤).
١١٨	- العمليات على اللوغاريتمات
١٢٢	★ اللوغاريتم الاعتيادي.
١٢٤	★ اللوغاريتم الطبيعي.
١٢٧	★ خواص اللوغاريتم الطبيعي.
١٢٨	★ تطبيقات على اللوغاريتمات باستخدام الحاسبة.
١٣٠	- تمارين ومسائل (٥).
١٣١	- تطبيقات حياتية على اللوغاريتمات.
١٣٥	- تمارين ومسائل (٦).
١٣٦	- تمارين ومسائل عامة.

الوحدة الرابعة
المتتاليات والمتسلسلات
(Sequences and Series)

واشتمل الجزء الثاني على ثلاث وحدات، هي:
الوحدة الرابعة : المتتاليات والمتسلسلات.
الوحدة الخامسة : الهندسة الفضائية.
الوحدة السادسة : الدوال.

إن دائرة تطوير مناهج العلوم التطبيقية وهي تقدم هذا الكتاب لتأمل منك أن تتعاون مع زملائك الطلبة ومعلميك وأفراد أسرتك في الاستفادة القصوى منه، وأن تحاول ترجمة المقترحات الواردة فيه إلى حقائق من خلال ربطه بأنشطتك اليومية، وأن تتعد عن الحفظ الذي لا يستند على فهم.

اكتشف الرياضيات في بيتك ومدرستك وشوارع مدينتك أو قريرتك وفي المحلات التجارية والبنوك، واعتبرها مادة حياتية ومهارة يومية تستعين بها في حل المشكلات الرياضية التي تواجهك من خلال تعاملك اليومي مفكرا وناقدا ومحللا. هذا كله خلق الله فتفكر فيه.

والله من وراء القصد وهو يهدي السبيل.

المؤلفون

* المفردات *

- ١ تعريف المتتالية الحسابية وتوضيحها وإيجادها.
- ٢ إيجاد الحد النوني في متتالية حسابية.
- ٣ تعريف الأوساط الحسابية وإيجاد المطلوب منها بين الحدود المعطاة.
- ٤ إيجاد مجموع أول «ن» حدا من متسلسلة حسابية (بما في ذلك استخدام الرمز Σ).
- ٥ تعريف المتتالية الهندسية وتوضيحها وإيجادها.
- ٦ إيجاد الحد النوني في متتالية هندسية.
- ٧ إيجاد الأوساط الهندسية المطلوبة للمتتالية الهندسية بين الحدود المعطاة.
- ٨ إيجاد مجموع متسلسلة هندسية (بما في ذلك استخدام رمز المجموع).
- ٩ إيجاد مجموع متسلسلات هندسية لا نهائية.
- ١٠ حل مسائل تتضمن متتاليات حسابية أو هندسية ومتسلسلات.

المتتاليات Sequences

تمهيد :

تساعد الرياضيات على اكتشاف وتمثيل الأنماط، والتي قد تكون منتهية أو غير منتهية، حيث يمكن تواجدها في الطبيعة أو يمكن تكوينها، كثير من الأنماط الرقمية التي لها استخدامات في الحياة العملية توجد في صورة متتالية، وقد كانت الإنجازات القديمة في مجال المتتاليات والمتسلسلات ذات قيمة نظرية فقط، ولكن الدراسات حديثاً أثبتت أن لها تطبيقات في مجالي العلوم والهندسة .

نشاط ١: إيجاد أطوال أضلاع المربعات:

الأدوات : قلم ، ورق ، مسطرة .

الخطوات :

- ١) ارسم مربعين متجاورين ومتلاصقين طول ضلع كل منهما وحدة طول واحدة.
- ٢) اطلب من زميلك رسم مربع بطول ضلع وحدتين طوليتين أسفل المربعين أعلاه ويلاصقهما .
- ٣) ارسم مربعاً آخر ملاصقاً للمربع الذي طول ضلعه وحدة واحدة والمربع الذي طول ضلعه وحدتين . ما طول ضلع المربع الناتج؟
- ٤) دع زميلك يرسم مربعاً أسفل المربعين اللذين أطوال أضلاعهما ٢ ، ٣ وحدات طول وملاصقاً لهما . ما طول ضلع المربع الناتج؟
- ٥) استمر في الرسم بهذا النمط إلى أن ينتج المربع الذي طول ضلعه ٨ وحدات .
- ٦) دوّن أطوال أضلاع المربعات الناتجة في كل مرة .
- ٧) ابحث مع زميلك عن العلاقة بين أطوال أضلاع المربعات الناتجة وقارنه مع ما توصل إليه زملائك في المجموعات الأخرى .



تشكل أطوال أضلاع المربعات في النشاط أعلاه ما يعرف بمتتالية فيبوناتشي Fibonacci Sequences حيث تدل النقاط الثلاث (١، ١، ٢، ٣، ٥، ٨، ١٣، ٢٠، ٣٢) التي تتبع حدود المتتالية على أن المتتالية غير منتهية. تصف متتالية فيبوناتشي عدد من أنماط الأعداد التي توجد في الطبيعة مثل ترتيب بذور زهرة دوار الشمس . ولعلك

almanahj.com/om

almanahj.com/om

نشاط ٢: دالة المتتالية:

الأدوات: ورقة وقلم .

الخطوات:

اعتبر المتتالية : ٢، ٦، ١٠، ١٤، ١٨، ...

- (١) ادرس نمط المتتالية ثم أوجد الحد السادس والحد السابع .
- (٢) اطلب من زميلك أن يجد الحد الثامن والتاسع .
- (٣) ما الطريقة التي اتبعتها للحصول على الإجابة؟
- (٤) ناقش زملاءك في القاعدة (الحد العام) التي يمكن إيجاد كل حدود المتتالية، وقارن ما توصلت إليه مع ما توصلت إليه المجموعات الأخرى، ثم أجب عن الأسئلة الآتية :

(٢) جد قيمة د (١)، د (٢)، د (٣)، د (٤) حيث د (ن) = ٤ - ٢
ب) قارن قيم د (ن) عند ن = ١، ٢، ٣، ... بحدود المتتالية أعلاه، ماذا تلاحظ؟

تدريب ٣

- أوجد الأربع حدود الأولى للدالة د(ن) = ٣ - ٢ن + ٣

تعريف

المتتالية هي دالة حقيقية (Real Function) مجالها (Domain) مجموعة الأعداد الصحيحة الموجبة \mathbb{N}^+ أو مجموعة جزئية منها على الصورة {١، ٢، ٣، ...، م} ومداهها (Range) مجموعة جزئية من \mathbb{R} .

- إذا كانت "د" متتالية، فإن حدها العام (أو الحد النوني) يرمز له بالرمز ح ن أي أن :
د(ن) = ح ن وقد تكتب المتتالية على الصورة ح ١، ح ٢، ح ٣، ...، ح ن-١، ح ن
أو على الصورة (ح ن).
- *إذا لم يذكر مجال المتتالية فإنه يعتبر \mathbb{N}^+ .

تدريب ٤

أوجد الحد العام لكل من : (٢) متتالية الأعداد الفردية الموجبة .

ب) المتتالية : ١، ٨، ٢٧، ٦٤، ...

توصلت من النشاط السابق : أن الحد الأول والثاني يساوي ١ وكل حد بعدها ينتج من مجموع الحدين السابقين له .

تدريب ١

ابحث في الإنترنت وبالموقع (www. go.hrw.com Fibonacci) عن معلومات وأمثلة من الطبيعة تمثل متتالية فيبوناتشي واعرضها لزملائك في الصف .

مثال ١

أكمل الأماكن الفارغة بالجدول التالي، ثم أجب عن السؤال الذي يليه :

ن	٤	٣	٢	١	طول ضلع المربع
	٢٥	٤	١	المساحة

- اكتب المتتالية التي تمثل مساحة المربع.

الحل

ن	٥	٤	٣	٢	١	طول ضلع المربع
٢ن	٢٥	١٦	٩	٤	١	المساحة

∴ المتتالية التي تمثل مساحة المربعات هي : (١ ، ٤ ، ٩ ، ١٦ ، ٢٥ ، ... ، ٢ن)

- نسمي القيم ١ ، ٤ ، ٩ ، ١٦ ، ٢٥ حدود المتتالية حيث ١ هو الحد الأول ويرمز له بالرمز ح_١

أو الرمز P ، ٤ الحد الثاني ويرمز له بالرمز ح_٢ ... وهكذا ، والحد النوني ح_ن أي أن

$$ح_١ = ١ ، ح_٢ = ٤ ، ح_٣ = ٩ ، ح_ن = ٢ن$$

- مما سبق هل توصلت إلى تعريف للمتتالية ؟

تدريب ٢

من المثال السابق أوجد متتالية محيط المربعات .

almanahj.com/om

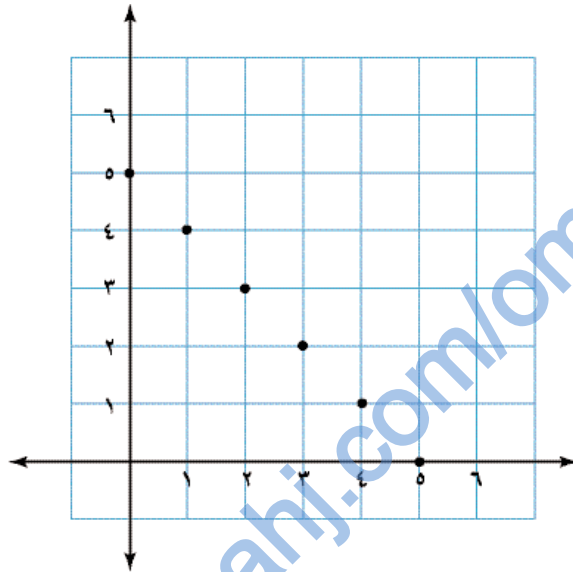
الإحداثيات الرأسية تزايد بازدياد الإحداثيات الأفقية لها ، إن مثل هذه المتتالية تسمى متتالية متزايدة .

(ب) حدود المتتالية ح_ن هي : ٤ ، ٣ ، ٢ ، ١ ، ٠ ، ...

وبمقارنة ح_ن ، ح_{ن+١} نجد أن :

$$ح_{ن+١} - ح_{ن} = (١ + ن) - ٥ - (ن - ٥) = ١ - ١ = ٠ >$$

أي أن حدود المتتالية تتناقص كلما زادت قيم ن (تسمى ح_ن = ٥ - ن متتالية متناقصة).



- في التمثيل البياني للمتتالية لماذا تؤخذ على محور السينات الأعداد ١ ، ٢ ، ٣ ، ... ؟
* اشرك زميلك وحاول أن تعطي تعريفاً للمتتالية المتزايدة والمتتالية المتناقصة .

تدريب ٦

اختبر تزايد وتناقص المتتالية : ح_ن = (١ - ن)

تعريف

يقال للمتتالية (ح_ن) أنها :

(١) متزايدة إذا فقط إذا كان : ح_{ن+١} < ح_ن لكل ن ∈ مجال المتتالية

(٢) متناقصة إذا فقط إذا كان : ح_{ن+١} > ح_ن لكل ن ∈ مجال المتتالية

تدريب ٧

اختبر تزايد وتناقص كل من المتتاليتين :

(ب) $(\frac{1}{2})^n$

(٢) $(١ - ٢)$

almanahj.com/om

مثال ٢

حدد أي مما يلي يمثل متتالية، وبين ما إذا كانت متتالية منتهية أم غير منتهية :

- (أ) $د(ن) = 1 + \frac{3}{ن}$ ، $ن \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$
 (ب) $د(ن) = 2^n$ ، $ن \in \mathbb{N}$
 (ج) $د(ن) = 2$ ، $ن \in \mathbb{N}^+$
 (د) $(3, 4, 5, \dots)$

الحل

- (أ) $د(ن)$ دالة حقيقية مجالها $\mathbb{N}^+ = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ (كم عدد حدودها؟)
 ∴ $د(ن) = 1 + \frac{3}{ن}$ متتالية منتهية .
 (ب) $د(ن) = 2^n$ ليست متتالية . (لماذا؟)
 (ج) $د(ن) = 2$ دالة حقيقية مجالها \mathbb{N}^+ ، فهي متتالية غير منتهية .
 اكتب الخمسة حدود الأولى منها ، ماذا تلاحظ ؟
 (كل متتالية على صورة $د(ن) = P$ ، $P \in \mathbb{N}$ تسمى متتالية ثابتة) .
 (د) $(3, 4, 5, \dots)$ متتالية غير منتهية . (لماذا؟)

تدريب ٥

- (أ) أكتب الأربع حدود الأولى من المتتالية $ح(ن) = 2^n$ ، ومثلها بيانياً .
 (ب) مثل بيانياً المتتالية $ح(ن) = 3 - n$ موضحاً الخمسة حدود الأولى .

مثال ٣

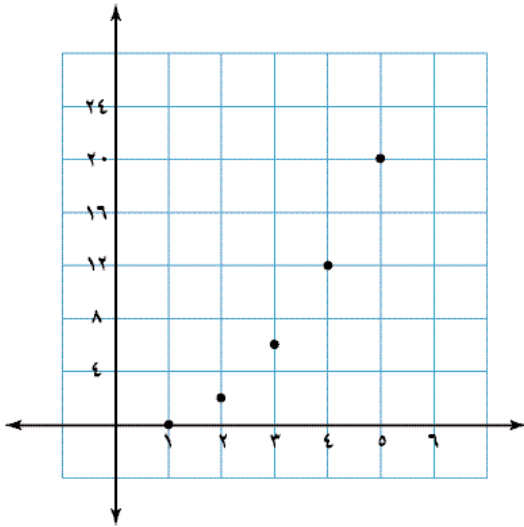
ادرس حدود كل من المتتاليتين الآتيتين :

(أ) $ح(ن) = 2^n - n$

(ب) $ح(ن) = 5 - n$

الحل

- (أ) المتتالية $ح(ن) = 2^n - n = 2, 3, 6, 12, 20, \dots$
 ماذا تلاحظ بالنسبة لحدود المتتالية ؟
 يتضح من التمثيل البياني للمتتالية أن



almanahj.com/om

إذا كان P هو الحد الأول لمتتالية حسابية، $P + 2$ هو الحد الثاني، $P + 4$ هو الحد الثالث فاكتب الحد الخامس، الحد العاشر، H_5 ، H_n .

تعريف

المتتالية التي يكون فيه الفرق بين كل حد والذي يسبقه مباشرة مقداراً ثابتاً تسمى متتالية

حسابية ويسمى المقدار الثابت أساس المتتالية ويرمز له بالرمز (d)

$$\text{أي أن } H_2 = H_1 + d, H_3 = H_2 + d = H_1 + 2d, H_4 = H_3 + d = H_1 + 3d, \dots, H_n = H_1 + (n-1)d$$

وإذا رمزنا للحد الأول بالرمز P والحد الأخير بالرمز L فإن الصورة العامة للمتتالية الحسابية:

$$P, P + d, P + 2d, \dots, P + (n-1)d, L$$

مثال ٥

أوجد الحدود الخمسة الأولى للمتتاليات الحسابية الآتية:

$$(P) \quad H_1 = 1, H_2 = -2$$

$$(B) \quad H_1 = 3, H_2 = 19$$

$$(J) \quad H_1 = 17, H_2 = 32$$

الحل

$$(P) \quad H_1 = 1, H_2 = -2, H_3 = 1 + (-2) = -1, H_4 = -1 + (-2) = -3, H_5 = -3 + (-2) = -5$$

$$H_1 = 3, H_2 = 19, H_3 = 3 + 16 = 19, H_4 = 19 + 16 = 35, H_5 = 35 + 16 = 51$$

$$H_1 = 17, H_2 = 32, H_3 = 17 + 15 = 32, H_4 = 32 + 15 = 47, H_5 = 47 + 15 = 62$$

الحدود الخمسة الأولى للمتتالية: $-5, -3, -1, 1, 3$

$$(B) \quad H_1 = 3, H_2 = 19, H_3 = 3 + 16 = 19, H_4 = 19 + 16 = 35, H_5 = 35 + 16 = 51$$

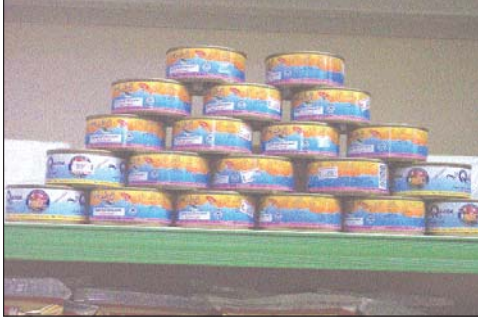
$$H_1 = 17, H_2 = 32, H_3 = 17 + 15 = 32, H_4 = 32 + 15 = 47, H_5 = 47 + 15 = 62$$

$$H_1 = 17, H_2 = 32, H_3 = 17 + 15 = 32, H_4 = 32 + 15 = 47, H_5 = 47 + 15 = 62$$

$\therefore P = 28$ وبإضافة -3 لكل حد نحصل على باقي الحدود

أي أن الحدود الخمسة الأولى للمتتالية هي: $28, 25, 22, 19, 16$

almanahj.com/om



مثال ٦

أراد خالد عرض بعض المعلبات في بقالته بطريقة جذّابة. ساعد خالد في تحديد عدد العلب اللازمة لترتيبها في الصف العاشر علماً بأن الصف العلوي يمثل الصف الأول ويحتوي على علبتين.

الحل

عدد العلب في الصفوف تشكل متتالية حسابية حدها الأول $a_1 = 2$ وأساسها $d = 1$
 \therefore عدد العلب في الصف العاشر يمثل ح. ١٠.

$$ح. ١٠ = 2 + (10 - 1) \times 1$$

$$11 = 2 + 9 =$$

مثال ٧

إذا كان مجموع الحدود الثلاثة الأولى من متتالية حسابية هو ١٥ ومجموع مربعاتها ٩٣ فما هذه المتتالية؟

الحل

بفرض الثلاثة حدود الأولى هي: $a, a+d, a+2d$

$$15 = a + (a+d) + (a+2d) \leftarrow 15 = 3a + 3d$$

$$\therefore 5 = a + d$$

$$93 = a^2 + (a+d)^2 + (a+2d)^2$$

$$93 = a^2 + (a+5)^2 + (a+10)^2$$

$$93 = a^2 + 2a + 25 + 75$$

$$18 = a^2 + 2a \quad \therefore d = 2 \quad \therefore a = 3$$

إذا كانت $d = 3$ فإن المتتالية: (٢، ٥، ٨، ...)

إذا كانت $d = -3$ فإن المتتالية: (٨، ٥، ٢، ...)

تدريب ١٢

أوجد المتتالية الحسابية التي فيها $27 = a_6 + a_5$ ، $a_8 = a_7 + a_6$

almanahj.com/om

$$(ج) \quad 17 = 4 + P \quad (1)$$

$$(2) \quad 32 = 9 + P$$

بطرح (1) من (2) ينتج $3 = د$ وبالتعويض عن د في (1)

$$5 = P \quad \leftarrow \quad 3 \times 4 + P = 17$$

∴ الحدود الخمسة الأولى للمتتالية : 5 ، 8 ، 11 ، 14 ، 17

نشاط 3: العلاقة بين الدالة الخطية ومعامل ن:

أعمل في مجموعة ثنائية.

الأدوات: ورقة رسم بياني - قلم - بطاقات على كل منها دالة على الصورة:

$$د(ن) = P + ب$$

الخطوات:

- (1) ضع البطاقات بشكل مقلوب، واطلب من زميلك سحب بطاقة واحدة .
- (2) أوجد الحد الأول والأساس للمتتالية التي تمثلها الدالة على البطاقة .
- (3) مثل المتتالية بيانيا ، ماذا تلاحظ؟
- (4) اسحب بطاقة أخرى، واطلب من زميلك إيجاد الحد الأول والأساس للدالة على البطاقة، ثم تمثيلها بيانيا.
- (5) كرر العملية بالتناوب مع زميلك عدة مرات .
- (6) ما العلاقة بين معامل ن والأساس؟

تدريب 10

أوجد أساس المتتالية الحسابية ح ن = $3 - \frac{2}{5} ن$

تعريف

المتتالية د (ن) متتالية حسابية إذا وفقط إذا كان د(ن) مقداراً من الدرجة الأولى في ن، ويكون معامل ن هو أساس المتتالية .

تدريب 11

أي مما يلي يمثل متتالية حسابية :

$$P \quad (ن) = (6 - 3ن)$$

$$ب \quad (ن) = 2ن^2$$

الأوساط هي :

$$٢ = ٨ - ١٠$$

$$٦- = ٨ - ٢$$

$$١٤- = ٨ - ٦-$$

$$٢٢- = ٨ - ١٤-$$

∴ الأوساط الحسابية : ٢ ، ٦- ، ١٤- ، ٢٢-

تدريب ١٤

ادخل ستة أوساط حسابية بين العددين : ٢ ، ٥,٥

almanahj.com/om

- كيف تحسب الوسط الحسابي (المتوسط) لأي عددين p ، b ؟

• اعتبر المتتالية : ٣ ، ٨ ، ١٣ ، ١٨ ، ٢٣ ، ٢٨

- أوجد الوسط الحسابي للحددين :

$$p \quad (\quad) \quad ح١ ، ح٣$$

ب) $ح٢ ، ح٤$. ماذا تلاحظ ؟

إذا شكلت الأعداد p ، b ، $ح$ متتالية حسابية فإن $p - ح = ح - b$ (لماذا) ؟

$$p + ح = ٢ب \leftarrow ب = \frac{p + ح}{٢}$$

وكذلك إذا كانت p ، b ، $ح$ ، $د$ متتالية حسابية فإن $ب = \frac{ج + p}{٢}$ ، $ح = \frac{د + ب}{٢}$

وفي هذه الحالة تسمى $ب$ وسط أول ، $ح$ وسط ثاني .

* نتيجة

إذا شكلت $ح١ ، ح٢ ، ح٣ ، \dots ، ح٤ ، \dots ، ح٥$ متتالية حسابية فإن $ح٢ ، ح٣ ، \dots ، ح٤ ، \dots ، ح٥$ تسمى أوساطاً حسابية .

ففي المتتالية : (٣ ، ٨ ، ١٣ ، ١٨ ، ٢٣) تعتبر الحدود : ٨ ، ١٣ ، ١٨ أوساطاً حسابية بين الحددين ٣ ، ٢٣

تدريب ١٣

جد الحد الناقص في المتتالية الحسابية : ٨٤ ، ، ١١٠

مثال ٨

أوجد أربعة أوساط حسابية بين العددين : ١٠ ، -٣٠

الحل

إذا أدخلت ٤ أوساط بين العددين فإن المتتالية المتكونة : ١٠ ، ١٠ ، ١٠ ، ١٠ ، ١٠ ، -٣٠

$$ح٢ = p + (١ - ٦) د$$

$$-٣٠ = ١٠ + ٥ د$$

$$د = -٨$$

almanahj.com/om

١٢) إذا كان الحدان الأول والخامس من متتالية حسابية يساويان على الترتيب الحدين الرابع والسابع من متتالية حسابية أخرى فاثبت أن الحد التاسع من المتتالية الأولى يساوي الحد العاشر من المتتالية الثانية .

١٣) س ، ص ، ع ، ل هي قيم أربعة حدود من متتالية حسابية فإذا كان مجموع رتبتي الحدين اللذين قيمتهما س ، ل يساوي مجموع رتبتي الحدين اللذان قيمتهما ص ، ع .
فاثبت أن $س + ل = ص + ع$.

almanahj.com/om

(١) مثل بيانياً كلاً من المتتاليات التالية موضحاً الحدود الخمسة الأولى إذا كانت المتتالية غير منتهية، ثم اختبر أي منها متزايدة وأي منها متناقصة .

(٢) د (ن) $1 - 2^n =$

ب (هـ) (ن) $(-2)^n =$ ، $\{1, 2, 3, 4\} \ni n$

ح (ل) (ن) $4 - =$

د (م) (ن) $=$ } n ، n عدد زوجي
 $n-1$ ، n عدد فردي

(٢) اكتب الحدود الخمسة الأولى للمتتالية الحسابية في كل من الحالات الآتية :

(٢) $2 = 4$ ، $7 = 4$

ب (٢) $3 = 4$ ، $5 - = 4$

ح (٢) $4 - = 4$ ، $\frac{1}{4} = 4$

(٣) أوجد قيمة كل من ح_{١٢} ، ح_{٢٠} من المتتالية الحسابية : ٤ ، ٧ ، ١٠ ، ١٣ ، ...

(٤) أوجد قيمة ح_{٢٠} + ح_{١٠} من المتتالية الحسابية : ٢٦ ، ٢١ ، ١٦ ، ...

(٥) إذا كانت (٢، ٩ ، ... ، ب ، ٥١) متتالية حسابية وكانت ب = ٧ ، أوجد قيمة كل من ب_{١٠} وكذا ترتيب حدها الأخير .

(٦) في المتتالية (٨ ، ١٣ ، ١٨ ، ... ، ١٥٨) أوجد ح_{١٣} معتبراً ١٥٨ حدها الأول ، ٨ حدها الأخير .

(٧) متتالية حسابية فيها ح_١ = ٥١ ، ح_{٢٢} = ٢٢٥ فما أساسها ؟

(٨) يتناول هيثم نوعاً من العقار الطبي، وقد طلب منه الطبيب أن يقلل من استخدام العقار بمعدل حبتين كل أسبوع عن الأسبوع الذي يسبقه مباشرة، فإذا بدأ هيثم بتناول العقار بمعدل ١٤ حبة في الأسبوع الأول، فبعد كم أسبوع سوف يتوقف عن تناول العقار ؟

(٩) متتالية حسابية حدها الخامس يزيد عن حدها الثالث بمقدار ٨ ، ومجموع حديها السادس والثامن يساوي ٥٨ . أوجد المتتالية، وحدها العام .

(١٠) أدخل خمسة أوساط حسابية بين العددين ٥ ، ١٧ .

(١١) أدخلت عدة أوساط حسابية بين العددين ١٤ ، ٣٤ وكان مجموع الواسطين الأول والثالث يساوي ٤٤ فما عدد هذه الأوساط ؟

almanahj.com/om

مثال ١

أوجد مجموع الخمسة عشرة حداً الأولى لمتسلسلة حسابية حدها الأول = ٤ وحدها الأخير = ٢٦ .

الحل

$$\text{جـ } \frac{15}{2} = (26 + 4) \Rightarrow 225$$

تدريب ٢

أوجد مجموع كل الأعداد الزوجية من ٢ إلى ٢٠٠ .
- يمكن إيجاد جـ ن بمعلومية الحد الأول والأساس وعدد الحدود كما يلي :

$$\text{جـ ن } = \frac{n}{2} (1 + n)$$

$$\text{جـ ن } = \frac{n}{2} (2 + (n-1) \cdot 2)$$

$$\text{جـ ن } = \frac{n}{2} (2 + 2(n-1)) \leftarrow (2)$$

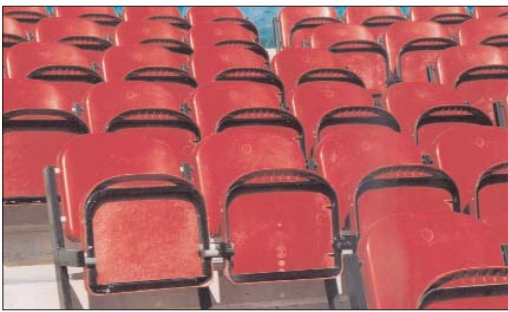
مثال ٢

أوجد مجموع العشرين حداً الأولى للمتسلسلة الحسابية : ٦ + ٤ + ٢ + ...

الحل

$$4 = 6, \quad 2 = 4, \quad n = 20$$

$$\text{جـ } \frac{20}{2} = (2 \times 6 + 19 \times 2) = 260$$



تدريب ٣

- إذا علمت أن إحدى قاعات التدريس تحتوي ١٠ صفوف بحيث تحتوي على ٨ مقاعد في الصف الأول ، ٩ مقاعد في الصف الثاني ، ١٠ مقاعد في الصف الثالث وهكذا، فما مجموع عدد المقاعد ؟

- يمكن التعبير عن مجموع حدود المتتالية باستخدام الرمز \sum وهو حرف إغريقي يقرأ مجموع

فمثلاً مجموع المتسلسلة ٢ + ٤ + ٦ + ٨ + ١٠ يكتب كالتالي : $\sum_{i=1}^5 (2i)$

almanahj.com/om

مجموع المتسلسلة الحسابية Sum of n Terms of an Arithmetic Series

– فكر بطريقة يمكن بها إيجاد ناتج جمع حدود المتتالية : ١ ، ٢ ، ٣ ، ... ، ١٠ دون أن تجري عملية الجمع المعتادة لجميع الحدود .



– لقد أثار العالم الألماني جاوس دهشة معلمه وهو في سن السابعة من عمره (في المرحلة الابتدائية) عندما أوجد ناتج جمع الأرقام من ١ إلى ١٠٠ بصورة سريعة وذلك بملاحظته أن المجموع عبارة عن ٥٠ زوجاً من الأرقام كل زوج مجموعها ١٠١ .

– تعرف المتسلسلة الحسابية بأنها حدود المتتالية الحسابية وضعت بينها عملية جمع (+) .
فمثلاً في المتتالية الحسابية : ١ ، ٢ ، ٣ ، ... فإن مجموع ٦ حدود الأولى من المتتالية يرمز له بالرمز ج_٦

$$(١) \quad ٦ + ٥ + ٤ + ٣ + ٢ + ١ = ج_٦ \quad \text{أي أن ج}_٦ = ١ + ٢ + ٣ + ٤ + ٥ + ٦$$

وبعكس ترتيب الحدود نحصل على :

$$(٢) \quad ١ + ٢ + ٣ + ٤ + ٥ + ٦ = ج_٦$$

– اجمع (١) (٢) ماذا تستنتج ؟

يمكن التوصل إلى القانون العام لمجموع ن حداً الأولى لمتسلسلة حسابية كالاتي :

$$ج_٦ = ٦ + (٥ + ١) + (٤ + ٢) + (٣ + ٣) + (٢ + ٤) + (١ + ٥) \quad (١)$$

فكر أن تجد مجموع الحدود هكذا :

$$ج_٦ = ١ + (٢ + ٥) + (٣ + ٤) + (٤ + ٣) + (٥ + ٢) + ٦ \quad (٢)$$

بجمع (١) ، (٢)

$$٢ ج_٦ = (٦ + ١) + (٥ + ٢) + (٤ + ٣) + (٣ + ٤) + (٢ + ٥) + (١ + ٦)$$

$$٢ ج_٦ = ن (٦ + ١) \quad \leftarrow ج_٦ = \frac{ن}{٢} (٦ + ١)$$

تدريب ١

مستخدماً القانون الذي توصلت إليه ، أوجد مجموع حدود المتتالية د(ن) = ن حيث ن ≥ ١ ، ثم تحقق من الجمع باستخدام طريقة الجمع المعتادة .

وبشكل عام يمكن إيجاد مجموع ن حداً الأولى من متسلسلة حسابية بمعلومية حدها الأول والأخير

$$ج_٦ = \frac{ن}{٢} (٦ + ح_٦) \quad (١) \quad \leftarrow$$

في مسابقة لاحدى شركات المياه الغازية وضعت ٢٤ زجاجة على خط مستقيم واحد والمسافة بين كل زجاجة وأخرى ٥ أمتار، ووضع صندوق مجاور للزجاجة الأولى، فإذا قام متسابق بجمع هذه الزجاجات واحدة تلو الأخرى، ثم يضعها في الصندوق دون تحريك الصندوق. فأوجد المسافة التي قطعها المتسابق حتى أتم جمع الزجاجات كلها.

almanahj.com/om

مثال ٣

أوجد قيمة $\sum_{n=1}^{12} (2n-6)$

الحل

ح $n = 2n - 6$ دالة خطية مجالها $n \in \mathbb{N}^+$

ح n متتالية حسابية حيث $a = 4$ ، $d = -2$

المطلوب إيجاد مجموع ١٢ حداً الأولى للمتسلسلة الحسابية .

$$S_{12} = \frac{12}{2} (2 \times 4 + (12-1) \times (-2)) = 84 - 84 = 0$$

تدريب ٤

احسب قيمة $\sum_{n=1}^{10} (5n + 4)$

مثال ٤

خزان ماء مملوء سعته ٣٩٠ جالوناً (الجالون = ٣,٧ لتر) ، يستخدم لسقي مزرعة فإذا انساب منه في اليوم الأول ٦٦ جالوناً، وكان ما ينساب منه في كل يوم تال ينقص عما ينساب في اليوم السابق مباشرة بمقدار ٦ جالونات . فبعد كم يوم يصبح الخزان فارغاً؟

الحل

كمية الماء المتسرب في اليوم الأول = ٦٦ جالوناً

كمية الماء المتسرب في اليوم الثاني = ٦٠ جالوناً

كمية الماء المتسرب في اليوم الثالث = ٥٤ جالوناً وهكذا

يتسرب الماء وفق المتسلسلة الحسابية : ٦٦ + ٦٠ + ٥٤ + ٠٠

ولكي يصبح الخزان فارغاً يجب أن يكون مجموع ما تسرب من الماء ٣٩٠ جالوناً .

$$\frac{n}{2} (6 + (n-1) \times 6) = 390$$

$$\frac{n}{2} (6 + 6n - 6) = 390$$

$$3n^2 - 390 = 0$$

$$n^2 - 130 = 0$$

$$n(n-13) = 0$$

$$n = 13 ، n = 0$$

يصبح الخزان فارغاً بعد ١٠ أيام . لماذا؟

almanahj.com/om

(٧) متتالية حسابية حدها الأول ٥ وحدها الأخير ٣٢ وعدد حدودها ٢٠ حدا فما مجموعها؟

$$(٨) \text{ أوجد قيمة } \frac{٤١+...+٥+٣+١}{٤٤+...+٨+٥+٢}$$

(٩) كم حداً يلزم أخذها من المتتالية (-١٦ ، -١٤ ، -١٢ ، ...) ابتداءً من الحد الأول ليكون مجموعها صفراً؟

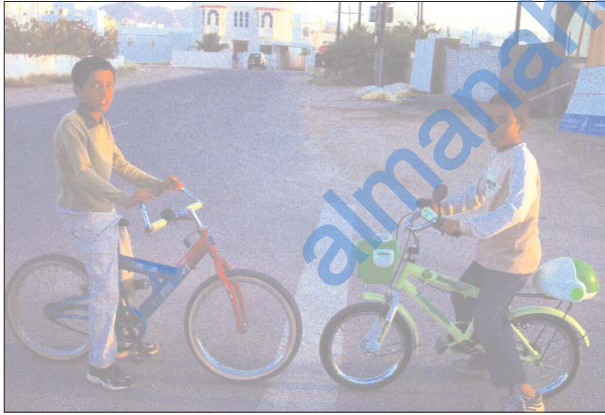
(١٠) حوض يتسع ٦٢٥ لتراً مركب عليه صنوبر يصب ماء في الحوض بمعدل ٤٠ لتر في الساعة وبتزايد قدرها ٥ لترات في كل ساعة عن الساعة التي قبلها فبعد كم ساعة يمتلئ الحوض؟

(١١) طريق طوله ٣٩٦ متر سار رجلان في وقت واحد أحدهما من أول الطريق والثاني من نهايته وفي اتجاهين متضادين، فإذا كان الرجل الأول يقطع مسافات ٣٦ ، ٣٣ ، ٣٠ ، من الأمتار في الثواني الأولى والثانية والثالثة و..... وفي نفس الوقت يقطع الرجل الثاني مسافات ١٩ ، ١٨ ، ١٧ ، من الأمتار في الثواني الأولى والثانية والثالثة و..... أوجد متى يتقابلا علماً بأنهما يتقابلا بعد عدد صحيح من الثواني، وما طول المسافة التي قد قطعها كل منهما حتى يتقابلا؟

- (١) افتتح عبد الله محلاً لبيع المواد الغذائية، وباع في اليوم الأول بمبلغ ٥٠ ر.ع وكان مقدار ما يبيعه في كل يوم يزيد بمقدار ٦ ر.ع عن اليوم السابق له . أوجد إجمالي المبلغ بعد ١٥ يوم؟
- (٢) أوجد مجموع الحدود الثلاثين الأولى من المتتالية الحسابية : ٤ ، ٩ ، ١٤ ، ...
- (٣) بدأ سالم العمل براتب وقدره ٤٠٠ ر.ع شهرياً فإذا كان يحصل على علاوة سنوية قدرها ١٠ ر.ع فكم يكون مجموع ما حصل عليه من رواتب في نهاية السنة العاشرة؟



- (٤) شاحنة لنقل الأنابيب تقوم بنقل أنابيب المياه من المخزن إلى منطقة سكنية لتوصيل المياه للمنازل فإذا قام صاحب الشاحنة بترتيب الأنابيب في الشاحنة بحيث وضع ١٠ أنابيب في الصف السفلي ثم ٩ أنابيب في الصف الذي يعلوه ثم ٨ أنابيب وهكذا. فما عدد الأنابيب في ٦ صفوف ابتداء من الصف السفلي؟



- (٥) قرر سعيد وأحمد التسابق بدراجتيهما على طريق مستقيم طوله ٧٩٢ متراً حيث ابتداء التحرك في نفس اللحظة أحدهما أول الطريق والآخر من نهايته في اتجاهين متضادين فإذا قطع سعيد مسافة ٤٠ متراً في الثانية الأولى ، ٤٣ متراً في الثانية الثانية ، ٤٦ متراً في الثانية الثالثة وهكذا . أما أحمد فقطع المسافات التالية

٣١، ٣٦، ٤١ ، ... على الترتيب في كل ثانية ، فما هو الزمن الذي بعده يتقابل فيه سعيد وأحمد بدراجتيهما؟ وما المسافة التي قطعها كل منهما؟

- (٦) مدير أحد المزارع يدفع مبلغ ٢٠٠ ريال للموظف الجديد على أن يدفع له علاوة سنوية مقدارها ٣٠ ريالاً . بينما مدير المزرعة الثانية يدفع مبلغ ٢٥٠ ريالاً للموظف الجديد على أن يدفع له علاوة سنوية مقدارها ٢٠ ريالاً . احسب مجموع ما سيدفعه مدير كل مزرعة للموظف الجديد خلال ١٠ سنوات .

almanahj.com/om

أي مما يلي يمثل متتالية هندسية :

$$(1) \quad ح_n = 1 - n \quad (2) \quad ح_n = 3^n$$

الحد العام:

- متتالية هندسية حدها الأول = p ، وأساسها = r
أوجد كل من : $ح_2$ ، $ح_3$ ، $ح_4$ ، $ح_10$ ، $ح_{n+1}$. ماذا تلاحظ ؟

* نتيجة

إذا كانت $(ح_n)$ متتالية هندسية أساسها r فإن :
 $ح_n = ح_1 \cdot r^{(n-1)}$
وإذا رمزنا للحد الأول لمتتالية هندسية بالرمز p فإن الصورة العامة هي :
 $ح_n = p \cdot r^{(n-1)}$ ، $ح_2 = p \cdot r$ ، $ح_3 = p \cdot r^2$ ، $ح_4 = p \cdot r^3$ ، $ح_{n+1} = p \cdot r^n$

مثال ٢

يمارس مروان رياضة المشي على الأقدام فإذا قطع في اليوم الأول مسافة ٣٠٠ متراً وكان يقطع في كل يوم تال ضعف المسافة التي قطعها في اليوم السابق له مباشرة . أكتب متتالية المسافة التي يقطعها مروان في كل يوم ولمدة ٥ أيام .

الحل

المسافة المقطوعة في اليوم الأول ٣٠٠ متر ($ح_1 = 300$)
∴ المسافة المقطوعة في كل يوم تساوي ضعف المسافة في اليوم السابق ($ر = 2$)
∴ المتتالية هي : ٣٠٠ ، ٦٠٠ ، ١٢٠٠ ، ٢٤٠٠ ، ٤٨٠٠

اكتب المتتالية الهندسية التي فيها :
الحد الأول = 6 ، الأساس = 3 موضحاً الحدود الخمسة الأولى

المتتالية الهندسية Geometric Sequence

نشاط ١: حدود المتتالية الهندسية:

اعمل في مجموعة ثنائية:

الأدوات: ورقة مربعة ، مقص

الخطوات:

- (١) اقسم الورقة المربعة إلى أربعة مناطق متطابقة .
- (٢) اقسم كل منطقة من هذه المناطق إلى ٤ مناطق مربعة، كم عدد المربعات الناتجة؟
- (٣) كرر هذه العملية ٥ مرات وفي كل مرة اكتب عدد المربعات الناتجة . ماذا تلاحظ؟
- (٤) دون نتائجك في جدول ، ما العلاقة بين عدد المربعات الناتجة بعد كل عملية مع عدد المربعات الناتجة في العملية السابقة لها مباشرة ؟
- (٥) قارن ما توصلت إليه مجموعتك مع ما توصلت إليه المجموعات الأخرى .

تدريب ١

- أ) أكتب مجموعة أعداد تحقق الخاصية التي توصلت إليها في النشاط .
 ب) أوجد النسبة بين كل حد والذي يسبقه مباشرة في المتتالية : ٤ ، -٨ ، ١٦ ، -٣٢ ، ٦٤ .
 ماذا تلاحظ ؟

تعريف

المتتالية (ح_ن) تسمى متتالية هندسية إذا وفقط إذا كان :

$$r = \frac{H_n + 1}{H_n}$$
 لكل $n \in \mathbb{N}^+$ حيث r عدد حقيقي ثابت، $H_n \neq 0$
 تسمى r أساس المتتالية الهندسية .

مثال ١

أوجد الأساس في كل من المتتاليتين الآتيتين : (٢ ، ٤ ، ٨ ، ١٦ ، ٣٢ ، ...) ،
 (٢٧ ، ٩ ، ٣ ، ١ ، $\frac{1}{3}$ ، ...)

الحل

الأساس = $\frac{1}{3}$

$$\frac{1}{3}, 1, 3, 9, 27, \dots, 32, 16, 8, 4, 2$$

$$\frac{1}{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} \times \dots \quad 2 \times 2 \times 2 \times 2$$

الأساس = ٢

مثال ٥

يزداد عدد الطلبة المتحقين بالصف الأول بمعدل ٤٪ كل سنة في إحدى مناطق السلطنة. فإذا كان عددهم حالياً ٢٠ ألف طالب فكم سيكون عدد الطلبة بعد ٦ سنوات؟

الحل

عدد الطلبة حالياً = ٢٠٠٠٠

عدد الطلبة في السنة الثانية = $٢٠٠٠٠ + ٢٠٠٠٠ \times ٤\%$

$$= ٢٠٠٠٠(١ + ٠,٠٤)$$

$$= ٢٠٠٠٠(١,٠٤)$$

عدد الطلبة في السنة الثالثة = $٢٠٠٠٠(١,٠٤) + (١,٠٤) \times ٢٠٠٠٠ \times ٤\%$

$$= ٢٠٠٠٠(١,٠٤)(١ + ٠,٠٤)$$

$$= ٢٠٠٠٠(١,٠٤)^٢$$

وهكذا

عدد الطلبة بعد ست سنوات ح = $٢٠٠٠٠(١,٠٤)^٦$

$$= ٢٥٣٠٦,٤ = ٢٠٠٠٠(١,٠٤)^٦ \text{ طالباً.}$$



تدريب ٤

سيارة قيمتها ٧٠٠٠ ريال عماني إذا علمت أن قيمة السيارة في نهاية كل سنة تكون بنسبة ٨٠٪ من سعرها. أوجد سعر السيارة بعد ٨ سنوات.

الأوساط الهندسية (Geometric Means)

— إذا كانت $٢ = ٤$ ، $٩ = ٦$

(١) أوجد $\sqrt[٢]{٢ \times ٩}$

(٢) اشترك مع زميلك وابحث العلاقة بين ٢ ، ٦ ، $\sqrt[٢]{٢ \times ٩}$

إذا شكلت الأعداد ٢ ، ٦ ، ٩ متتالية هندسية فإن $\frac{٦}{٢} = \frac{٩}{٦}$ ← $٢ = ٩$ جـ

∴ $\sqrt[٢]{٢ \times ٩} = ٦$ وفي هذه الحالة يسمى ب الوسط الهندسي للعددين ٢ ، ٩ جـ

وبصورة عامة تسمى الأعداد: ج، د، ...، ل أوساطاً هندسية للعددين الحقيقيين الموجبين ٢ ، ٩ إذا كانت ٢ ، ج، د، ...، ل ، ب متتالية هندسية .

almanahj.com/om

مثال ٣

أكتب المتتالية الهندسية التي حدها الأول = ٩ وحدها السادس = ٢٨٨

الحل

$$\begin{aligned} \text{ح} \quad r^5 &= 288 \\ 288 &= r^9 \quad \leftarrow \\ r^5 &= 288 \\ r^2 &= 9 \quad \leftarrow \\ \text{المتتالية هي : } & 9, 18, 36, 72, 144, \dots \end{aligned}$$

مثال ٤

ثلاثة أعداد تكون متتالية هندسية فإذا كان مقلوب الحد الأول يزيد عن مقلوب الحد الثاني بمقدار ٢ وكان الحد الثالث يزيد عن الحد الثاني بمقدار ١٨ فما هذه الأعداد؟

الحل

نفرض أن الأعداد هي r^2, r, r^2

$$(1) \quad \frac{1}{r^2} - \frac{1}{r} = 2 \quad \leftarrow \quad 2 = \frac{1-r}{r^2} \quad \leftarrow \quad 2r^2 = 1-r$$

$$(2) \quad r^2 - r = 18 \quad \leftarrow \quad 18 = r(r-1)$$

بقسمة (١) على (٢)

$$36 = r^2(1-r) \quad \leftarrow \quad \frac{(1-r)}{18} = \frac{r^2}{(1-r)r^2}$$

$$1-r = 6 \quad \leftarrow \quad r = 7 \quad \text{أو} \quad r = 5$$

$$\text{فإذا كانت } r = 7 \text{ فإن } 14 = r^2 \quad \leftarrow \quad \frac{3}{7} = r^2 \text{ الأعداد هي : } 3, 7, 21$$

$$\text{وإذا كانت } r = 5 \text{ فإن } 10 = r^2 \quad \leftarrow \quad \frac{3}{5} = r^2 \text{ الأعداد هي : } 3, 5, 15$$

(١) حدد المتتالية الهندسية فيما يلي :

(أ) ٥ ، ٢٥ ، ٦٢٥ ، ...

(ب) $36 - \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$ ، ... ، ١ - ، ٦ ، ٣٦ -

(ج) $\left(\frac{1}{n}\right)$

(د) $\frac{1}{n^3}$

(٢) أكتب الحدود الأربعة الأولى للمتتاليات الهندسية التالية وأذكر ما إذا كانت متزايدة أم متناقصة

(أ) $r = 3$ ، $a = 2$

(ب) $r = \frac{1}{3}$ ، $a = 81$

(ج) $r = 6$ ، $a = 1$

(٣) مجموع الحدود الثلاثة الأولى لمتتالية هندسية جميع حدودها موجبة يساوي ٧ . فإذا كان حدها الثالث يساوي ١ فما حدها السادس ؟

(٤) أوجد المتتالية الهندسية التي حدها الثالث = ٣٦ وحدها السادس = ٩٧٢

(٥) في المتتالية (٢ ، ٦ ، ١٨ ، ...) أوجد رتبة الحد الذي قيمته ١٤٥٨

(٦) متتالية هندسية مجموع حديها الثاني والخامس ٩٠ ومجموع حديها الثالث والسادس ١٨٠ . أوجد المتتالية .

(٧) سقطت كرة مطاطية من ارتفاع ٢٥٠ قدم فوق سطح الأرض . فإذا كانت الكرة تترد إلى أعلى بعد كل اصطدام ارتفاعاً قدره (٥٠٪) من ارتفاعها السابق مباشرة ، فكم يكون ارتفاعها بعد الاصطدام الخامس ؟

(٨) تتضاعف البكتيريا في وسط معين كل يوم فإذا كان عددها في اليوم الأول = ١٠٠ ، احسب عددها بعد ٧ أيام .

(٩) إذا كان الوسط الهندسي للعددين ٢ ، س هو ٨ فما قيمة س ؟

(١٠) أدخل أربعة أوساط هندسية بين العددين ٤ ، ١٢٨ .

(١١) عددان موجبان الفرق بينهما ٨ ووسطهما الهندسي ٣ فما هما العددان ؟

تدريب ٥

أوجد قيمة s بحيث تكون ٥ ، s ، ١٨ متتالية هندسية .

مثال ٦

أدخل ٣ أوساط هندسية بين العددين ٤ ، ٦٤

الحل

بإدخال ٣ أوساط تكون المتتالية بالصورة : ٤ ، ؟ ، ؟ ، ؟ ، ٦٤

أي أن عدد حدود المتتالية = ٥ وحدها الأول = ٤ ، ح. = ٦٤

$$ح. = ٤^٤$$

$$٦٤ = ٤ \times ر^٤$$

$$١٦ = ر^٤ \leftarrow ر = ٢ \pm$$

تنتج متتاليتين هندسيتين الأولى أساسها ٢ والأوساط الهندسية هي : ٨ ، ١٦ ، ٣٢

والثانية أساسها ٢- والأوساط الهندسية : ٨- ، ١٦- ، ٣٢-

تدريب ٦

أوجد الحدود الناقصة في المتتاليات الهندسية التالية :

(١) (٥ ، ، ٢٠ ، ...) (ب) (٣ ، ، ، ، ٤٨)

(٢) اثبت أن الوسط الحسابي لعددين حقيقيين موجبين مختلفين أكبر من وسطهما الهندسي .

almanahj.com/om



مجموع ن حدا الأولى من المتسلسلة الهندسية

نشاط ١: مجموع الأقراص على رقعة الشطرنج:

اعمل في مجموعة ثنائية:

الأدوات: رقعة شطرنج ، أقراص العد (أو قطع نقد)

الخطوات:

- ١) ضع قرصاً (أو قطعة نقدية) في المربع الأعلى من جهة اليمين .
- ٢) اطلب من زميلك أن يضع قرصين في المربع الثاني .
- ٣) ضع في المربع الثالث أربع أقراص .
- ٤) تابع مع زميلك المتتالية مضاعفاً عدد الأقراص في كل مربع جديد حتى المربع السادس (عند نفاذ الأقراص أكتب أعداد المربعات) . (يمكن استخدام الحاسبة في مضاعفة العدد)
- ٥) الطالب الذي يضع العدد الصحيح من الأقراص في المربع يكسب نقاطاً حسب عدد الأقراص.
- ٦) ما مجموع عدد الأقراص ؟

المتسلسلة الهندسية هي عبارة عن حدود المتتالية الهندسية وضع بينها إشارة جمع (+) .
ففي المتتالية (٢ ، ٤ ، ٨ ، ١٦ ، ...) فإن ٢ + ٤ + ٨ + ١٦ + ... تسمى متسلسلة هندسية ويرمز لمجموع الحدود بالرمز جن .

ويمكن التوصل إلى قاعدة لإيجاد مجموع ن حدا من المتسلسلة الهندسية كالاتي :

$$\text{جن} = ٢ + ٢ر + ٢ر^٢ + \dots + ٢ر^{ن-١} \quad (١)$$

$$\text{ر جن} = ٢ر + ٢ر^٢ + ٢ر^٣ + \dots + ٢ر^{(ن-١)} \quad (٢)$$

بطرح (٢) من (١) :

$$\text{جن} - \text{ر جن} = ٢ - ٢ر^n$$

$$\text{جن} (١ - ر) = ٢(١ - ر^n) \quad \text{جن} = \frac{٢(١ - ر^n)}{(١ - ر)}$$

almanahj.com/om

(١٢) ثلاثة أعداد متتالية هندسية مجموعها $\frac{1}{2}$ و حاصل ضربها ٣٤٣ أوجد الأعداد الثلاثة وأوجد الفرق بين الوسط الحسابي والهندسي للعددين الأول والثالث.

(١٣) إذا كان ثلاثة أمثال الوسط الحسابي بين عددين يساوي خمسة أمثال وسطهما الهندسي فاثبت أن أحد العددين تسعة أمثال الآخر.

almanahj.com/om

مثال ٢

أوجد قيمة $\sum_{n=1}^6 2 \times 3^{(n-1)}$

الحل

مجموع ٦ حدود الأولى من متسلسلة هندسية حدها الأول = ٢ وأساسها = ٣

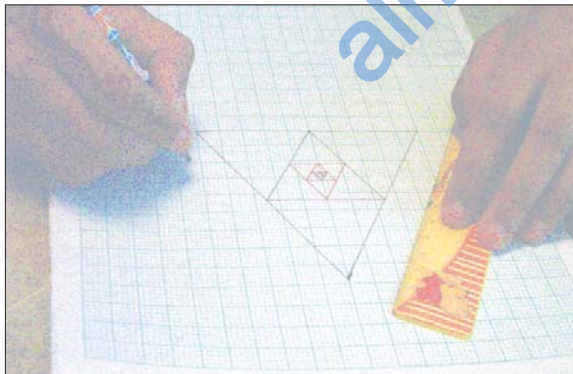
$$ج_٦ = \frac{(3-1)2}{3-1} = 728$$

تدريب ٢

(١) أوجد قيمة $\sum_{m=1}^5 4 \times 2^{(m-1)}$

(٢) مجموع الأربع حدود الأولى من متتالية هندسية يساوي ٨٠ ، حدها الأول ينقص عن حدها الخامس بمقدار ١٦٠ . أوجد المتتالية .

مجموع المتسلسلة الهندسية غير المنتهية



رسمت أمل الشكل الهندسي المجاور حيث بدأت برسم مثلث منتظم بطول ضلع = ٢٠ سم ثم رسمت المثلث الثاني بتوصيل النقاط التي تمثل منتصفات كل ضلع واستمرت برسم المثلثات الداخلية بنفس الطريقة .

– هل عدد المثلثات الناتجة منتهية ؟ لماذا ؟

يمكن تمثيل مجموع طول ضلع كل مثلث من المثلثات الناتجة بالمتسلسلة الهندسية أدناه :

$$20 + 10 + 5 + 2,5 + 1,25 + \dots$$

– قدر مجموع هذه المتسلسلة الهندسية .

قاعدة :

$$\begin{aligned} \text{ج ن} &= \text{ن} \text{ إذا كانت } r = 1 \\ \text{ج ن} &= \frac{\text{ن}(\text{ن}-1)}{(r-1)} \text{ إذا كانت } r \neq 1 \end{aligned}$$

- هل يصح ان تكتب $\text{ج ن} = \frac{\text{ن}(\text{ن}-1)}{(1-r)}$ ؟

مثال ١

لدى إبراهيم مزرعة لإنتاج البيض فإذا باع في الأسبوع الأول ٤٠٠ صندوق من البيض وكان مقدار ما يبيعه من البيض في كل أسبوع مثلي ما يبيعه في الأسبوع السابق له مباشرة . فما مجموع عدد صناديق البيض المباع بعد أربعة أسابيع ؟

الحل

عدد صناديق البيض المباعة في كل أسبوع يكون متتالية هندسية حيث :

$$r = 2, \quad 400 = \text{ن}$$

مجموع صناديق البيض المباعة بعد أربعة أسابيع = ج ن

$$\text{ج ن} = \frac{\text{ن}(\text{ن}-1)}{r-1} = \frac{400(400-1)}{2-1} = 159600 = 15 \times 400 = 60000 \text{ صندوق}$$

- إذا علمت أن الربح في كل صندوق ٢ ريال فما مجموع أرباح إبراهيم بعد أربعة أسابيع ؟

تدريب ١

أراد أبو ماجد توفير مبلغ من المال لتدريس ابنه في كلية خاصة بعد إكمال مرحلة التعليم العام فقرر بأن يوفر في السنة الأولى ٥٠ ريالاً وفي السنة الثانية ١٠٠ ريال وفي الثالثة ٢٠٠ ريال وهكذا. ما مقدار ما سيوفره أبو ماجد بعد :

(أ) ٤ سنوات

(ب) ٨ سنوات

(١) أوجد مجموع الحدود التسعة الأولى للمتتالية الهندسية التي حدها الأول = ٥ وأساسها = ٢

(٢) أوجد مجموع الستة حدود الأولى للمتتالية : -١٢ ، ٤ ، - $\frac{4}{3}$ ، ...

(٣) أوجد :

$$(أ) \sum_{n=1}^7 \frac{1}{2^n}$$

$$(ب) \sum_{n=1}^8 \left(-\frac{1}{4}\right)^{n+1}$$

(٤) عندما كان عمر راشد ٥ سنوات وفر ٥٠٠ بيسة وكان في كل سنة تالية يوفر ٣ أمثال ما يوفره

في السنة السابقة ، إذا علمت أن عمر راشد الآن ١٣ عاماً وأراد شراء جهاز حاسوب بقيمة

٥٠٠ ريال عماني. هل مجموع ما يوفره راشد منذ أن كان عمره ٥ سنوات حتى الآن يكفي

لشراء الجهاز؟ أثبت ذلك؟

(٥) كم حدا يلزم أخذها من المتتالية الهندسية (٣ ، ٩ ، ٢٧ ، ...) ليكون المجموع ١٢٠؟

(٦) مجموع الحدين الأول والثاني في متتالية هندسية حدودها موجبة ٩ وحدها الثالث ١٢ ، فما

مجموع الحدود الستة الأولى؟

(٧) حدد أي من المتتاليات التالية يمكن إيجاد مجموع حدودها إلى ما لا نهاية . ثم أوجد المجموع

إن أمكن.

$$(أ) ح \quad 3 = \left(\frac{1}{3}\right)^n \quad (ب) ح \quad 4 = 2^n \quad (ج) ح \quad 1 + 2^n = 1$$

(٨) وصلت منتصفات أضلاع مربع لتكوين مربع جديد إذا كررت هذه العملية لكل مربع

جديد أوجد مجموع متسلسلة محيط المربعات غير النهائية علماً بأن طول ضلع المربع الأساسي

١٠ سم.



١٠ سم

almanahj.com/om

مجموع المتسلسلة الهندسية عندما $|r| > 1$

وهذا يعني أن $1 - r > 1$ وفي هذه الحالة نجد أن

$$\frac{p}{r-1} = \infty \text{ وذلك لأن } r^n = \text{صفر عندما } |r| > 1$$

هل يمكن إيجاد مجموع متسلسلة هندسية لا نهائية عندما $|r| \leq 1$ ؟

نتيجة

مجموع متسلسلة هندسية غير منتهية عندما $|r| < 1$:

$$\text{ج} = \frac{p}{1-r}$$

تدريب ٣

مستخدماً القانون أوجد مجموع طول ضلع كل من المثلثات اللانهائية في الشكل الهندسي الذي رسمته أمل فيما سبق .

مثال ٣

أوجد مجموع المتسلسلة اللانهائية : $3+2+1+0,48+0,192+\dots$ إذا كان ممكناً

الحل

$$0,4 = \frac{4r}{3r} = \frac{3r}{2r} = \frac{2r}{1r}$$

المتتالية هندسية وأساسها $0,4 < 1$

$$\therefore \text{ج} = \frac{3}{(0,4-1)} = 5$$

تمارين ومسائل عامة

- (١) كم حدا يلزم أخذها من المتتالية (١٦، ١٢، ٨، ...) ليكون مجموعها -٢٠؟
- (٢) أوجد عدد حدود المتتالية (-١٠، -٧، -٤، ...) (١٤).
- (٣) إذا كانت (٥، ٢، ...)، ١٥، ٢، ٦٥) متتالية حسابية فأوجد قيمة s وكذلك رتبة حدها الأخير .
- (٤) صنوبر ماء يصب في الدقيقة الأولى ٢١ لتر ثم يزيد ما يصبه بعد ذلك ٣ لترات في الدقيقة. بعد كم دقيقة يكون مجموع ما يصبه ٩٩٠ لتر؟
- (٥) مجمع رياضي به ١٢ مقعداً في الصف الأول فإذا كان كل صف آخر يتسع لعدد من المقاعد يزيد على الصف الذي يسبقه مباشرة بمقدار ٦ مقاعد. كم عدد المقاعد في هذا المجمع إذا كان يتسع لعدد ٦٠ صفاً؟
- (٦) فكرت عائلة هلال القيام برحلة سياحية إلى إحدى الدول العربية في أول يونيو لمدة أسبوع وعلم من خلال أحد المواقع السياحية في الإنترنت أن تكلفه الرحلة ١٥٠٠ ريالاً عمانياً ولكي يوفر هذا المبلغ بدأ بتوفير ١٠٠ ريالاً في شهر نوفمبر وعلى أن يزيد ما يوفره بنسبة ٢٠٪ كل شهر عن الشهر السابق له. هل يستطيع هلال توفير تكاليف الرحلة في الموعد المحدد؟ بماذا تنصح هلال؟
- (٧) أوجد المتتالية الهندسية التي حدها الثاني = ١٠ وحدها السادس = ١٦٠
- (٨) متتاليتان جميع حدودهما موجبة إحداهما هندسية والأخرى حسابية فإذا كان الحد الأول في كل منهما = ٢ وكان الحد الثالث في الهندسية يساوي الحد الرابع في الحسابية وكان الحد الخامس في الهندسية يساوي ضعف الحد الثامن في الحسابية. فأوجد كلاً من المتتاليتين .
- (٩) عاملان بدأ كل منهما العمل براتب سنوي قدره ٥٠٠ ريال وكان الأول يحصل على علاوة سنوية ثابتة قدرها ٥٠ ريال، والثاني يحصل على علاوة سنوية قدرها ٥٪ من راتبه في السنة السابقة، أحسب راتب كل منهما في السنة الخامسة والعشرين. وكم ينبغي أن تكون العلاوة السنوية للأول حتى يتساوى راتبه مع زميله؟
- (١٠) بئر بتروك ينتج ٥٠٠ برميل خلال الشهر الأول من عمله ويهبط الإنتاج إلى ٨٠٪ من هذا الإنتاج في الشهر الثاني وإلى ٨٠٪ من إنتاج الشهر السابق له مباشرة في الشهر الثالث وهكذا. أوجد كمية الإنتاج بعد مرور ١٠ شهور .
- (١١) أوجد مجموع عدد لا نهائي من حدود المتتالية التي حدها النوني $(\frac{2}{3})^{n-1}$ ابتداءً من الحد الأول .

almanahj.com/om

٩) أوجد مجموع المتسلسلة الهندسية غير المنتهية إذا كانت $P = 18$ ، $r = \frac{2}{7}$

١٠) أوجد قيمة $\sum_{n=1}^{\infty} 2 \left(\frac{5}{8}\right)^{n-1}$

١١) أسقط خالد كرة رأسياً من إرتفاع معين وكانت الكرة ترتد كل مرة عند الاصطدام بالأرض إلى أعلى ارتفاعاً قدره $\frac{2}{3}$ الإرتفاع السابق مباشرة ، فإذا كان الإرتفاع الذي ارتدت إليه الكرة بعد الإصطدام الأول هو ١٤ قدماً :

٢) ما الإرتفاع الذي ترتد إليه الكرة بعد الإصطدام السادس ؟

ب) ما مجموع المسافات التي قطعتها الكرة منذ لحظة سقوطها حتى اللحظة التي اصطدمت بالأرض للمرة السادسة .

ح) أوجد مقدار الإزاحة التي حدثت للكرة حتى سكنت في الأرض .

١٢) صهريج مياه سعته ٦٣٠٥ لتراً كان فارغاً ثم ملئ بالماء بواسطة صنوبر يصب في الساعة الأولى ١٢٨ لتراً، ويصب في كل ساعة تالية مرة ونصف المرة قدر ما صبه في الساعة السابقة. بعد كم ساعة يمتلئ الصهريج؟

الوحدة الخامسة

هندسة الفضاء

(Space Geometry)

١٢) إقتصد رجل في نهاية سنة ما ٨٠ ريالاً وأخذ يقتصد كل سنة تالية ١٥ ريالاً زيادة عما اقتصده في السنة السابقة لها، أوجد ما إقتصده الرجل في السنة الخامسة عشرة وأوجد كذلك مقدار ما إقتصده في السنوات الخمسة عشرة.

١٣) إذا كان عدد من دخلوا المعرض في اليوم الأول ٤٠ ألف نسمة وأخذ هذا العدد يتزايد بمقدار ثابت قدره (د) كل يوم عن اليوم السابق له مباشرة وكانت مدة المعرض ١٥ يوماً وفي نهاية المدة كان مجموع من دخل المعرض ٩١٥ ألف نسمة فما عدد الذين دخلوا المعرض في يومه السابع.

١٤) متتالية هندسية حدودها موجبة وكان $ح_١ + ح_٣ = ٢٠$ ، $ح_٣ + ح_٥ = ٥٠$ أوجد المتتالية.

١٥) في متتالية هندسية إذا كان $ح_٣ + ح_٥ = م$ ، $ح_٥ - ح_٣ = ن$ أثبت أن $ح_٥ = م \left(\frac{ن}{م} \right)^{\frac{١}{٢}}$.

١٦) ضع كلاً من الكسور العشرية الدائرية الآتية على صورة كسر اعتيادي:

أ) $٠,٣$

ب) $٣,٤١٢$

ج) $٠,٢٤$

* أهدافنا *

- ١ تعريف المصطلحات التالية - المستوى - الفضاء . وتحديدها وكذلك المسلمات الخاصة بها.
- ٢ حل مسائل في المثلثات تتضمن ثلاثة أبعاد.
- ٣ إيجاد إحداثيات نقطة ممثلة في النظام الإحداثي ثلاثي الأبعاد.
- ٤ تمثيل نقطة في النظام الإحداثي ثلاثي الأبعاد.
- ٥ إيجاد المسافة بين نقطتين في الفضاء وإحداثيات منتصف القطعة المستقيمة الواصلة بينها.
- ٦ إيجاد مسقط نقطة على مستقيم مستوى ومسقط قطعة مستقيمة على مستوى.
- ٧ تعريف الزاوية الزوجية (الزاوية بين مستويين) وإيجاد قياسها.
- ٨ برهنة بعض النظريات ذات العلاقة بالهندسة الفضائية .

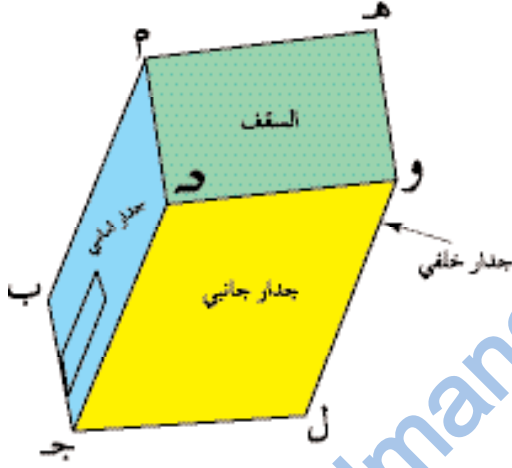
هندسة الفضاء Space Geometry

من خلال دراستك السابقة للهندسة المستوية أجب عما يلي :

- ٢) ما مفهومك للنقطة؟
- ب) كم نقطة تكفي لرسم خط مستقيم؟
- ج) من خلال خارطة سلطنة عمان بماذا تمثل مدينتك أو قريرتك؟
- د) كيف تمثل الشوارع والطرق في الخرائط؟
- هـ) ماذا يمثل لك كل من سطح الطاولة؟ أرضية الغرفة؟ جدار غرفة الصف؟

تدريب ١

بالاستعانة بالشكل المجاور صنّف كلاً مما يلي إلى



- ٢) السقف
 - ب) الجدار
 - ج) زوايا الجدار الأمامي
 - د) حدود السقف
 - هـ) تقاطع الجدار الخلفي مع الجدار الجانبي
 - و) تقاطع جدارين متجاورين مع السقف
 - ز) مما سبق استنتج تعريفا للمستوى.
- أمثلة لبعض المستويات:



أمثلة لأسطح غير مستوية:

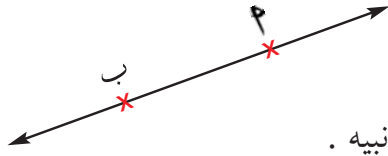


ينطلق أي بناء رياضي عادة من أمور بديهية أو مسلم بها دون حاجة إلى برهانها، وتعتبر مثل هذه المسلمات الركيزة الأولى في بناء وبرهنة مفاهيم البناء الرياضي اللاحقة :

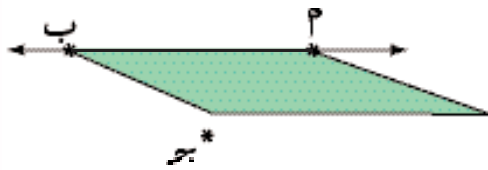
المسلمة الأولى :

- (أ) يتضمن الخط المستقيم نقطتين مختلفتين على الأقل، أو يتحدد المستقيم تحديداً تاماً إذا علم عليه نقطتان مختلفتان .
- (ب) يتضمن المستوى ثلاث نقاط على الأقل بحيث لا تقع على استقامة واحدة، أو يتحدد المستوي تحديداً تاماً إذا علم ثلاث نقاط ليست على استقامة واحدة.

يمكن توضيح المسلمة الأولى بالآتي :



- (أ) • حدد نقطتين مختلفتين على الورقة مثل 'أ' ، 'ب' .
- صل 'أ' ب بخط مستقيم ومدّه على استقامته من جانبيه .
- حاول أنت وزميلك رسم مستقيم آخر يمر بالنقطتين 'أ' ، 'ب' ولا ينطبق على المستقيم الأول ستجد أنه يستحيل رسم المستقيم الآخر وهذا يعزز المسلمة الأولى.
- (ب) • ضع ثلاثة نقاط ليست على استقامة واحدة 'أ' ، 'ب' ، 'ج' ، صل 'أ' ب بمستقيم.



- خذ قطعة من الورق المقوى على شكل مستطيل
- وثب طرفها على المستقيم 'أ' ب.
- دور الشكل حول المستقيم 'أ' ب حتى ينطبق على النقطة 'ج' .

- كم وضعاً تنطبق فيه النقطة 'ج' على مستوى الورقة خلال دوران الورقة دورة كاملة ؟

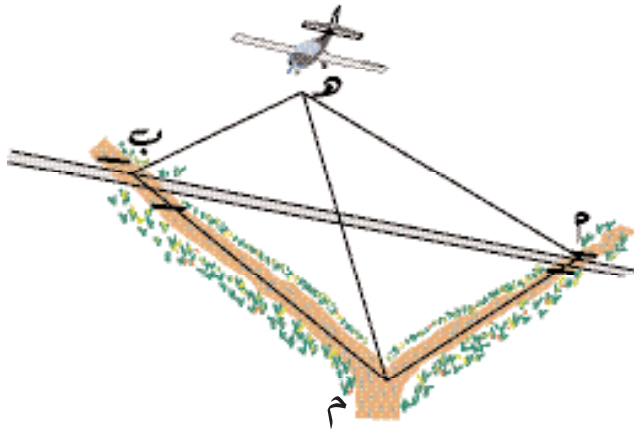
تدريب ٤

ارسم مجسماً يحتوي على ٨ أوجه (مستويات) .

رصد طيار في إحدى اللحظات واديين يلتقيان في نقطة ويمر فوقهما شارع قبل نقطة تلاقيهما. مثل المشهد بالرسم وحدد عدد المستويات المتكونة .

الحل

يمثل كل من الأودية والشارع خطأً مستقيماً فيما يمثل موقع الطائرة في تلك اللحظة نقطة خارجة .



٢) الشارع عبارة عن مستقيم وموقع الطائرة عبارة عن نقطة هـ خارج المستقيم .
الشارع مع موقع الطائرة يمثل مستوى هـ ب م

ب) الوادي ب م مع موقع الطائرة عبارة عن مستقيم ونقطة خارجة تحدد مستوى هـ ب م .

ج) الوادي ب م وموقع الطائرة هـ عبارة عن مستقيم ونقطة خارجة فهي تمثل مستوى هـ ب م

د) مستوى الأرض ب م ب والمتكون من النقاط ب، م، ب والتي لا تقع على استقامة واحدة .
∴ هناك أربعة مستويات .

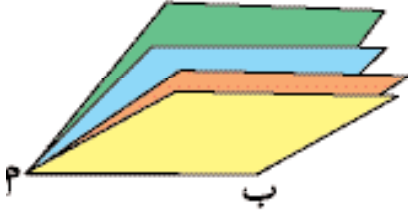
تدريب ٦

راقب سالم أبنائه من مكان مرتفع أثناء نصب شبكة لصيد السمك الكبير، وأخرى لصيد سمك السردين فإذا أخذت الشبكة الأولى اتجاه عمودياً على الشاطئ فيما أخذت الشبكة الثانية اتجاه موازياً للشاطئ فمثل المشهد من موقع سالم ثم حدد عدد المستويات .

نظرية (٢) :

المستقيمان المتقاطعان يحددان مستوى وحيد .

المسلمة الثانية : يمر بأي نقطتين مختلفتين عدد لا نهائي من المستويات .



خذ كراسة و اعتبر كعب الكراسة يمثل مستقيماً ، وكل صفحة من الصفحات تمثل مستوى فكم صفحة ترتبط بكعب الكراسة ؟

كم مستوى يمر بالمستقيم الذي يمثل كعب الكراسة ؟

هل يمكن إضافة صفحات أخرى تمر بكعب الكراسة ؟

هل تستطيع تحديد عدد المستويات التي يمكن أن تمر

بالمستقيم الذي يمثل كعب الكراسة ؟

هل تستطيع تحديد عدد المستويات التي تمر بالمستقيم الذي

يشكل محور الشكل المرسوم جانباً ؟



تدريب ه

اعط مثالاً من الحياة تبين فيه اشتراك عدة مستويات في مستقيم واحد .

نظرية (١) :

يمر بمستقيم معلوم ل ونقطة خارجة عنه جـ مستوى وحيد .

توضيح للنظرية :

انظر إلى محور دوران الباب في غرفة الصف، واعتبره الخط المستقيم، وحدد نقطة خارج هذا الخط مثل نقطة التقاء القفل مع الإطار الخارجي للباب . ستلاحظ أن الباب يأخذ أوضاعاً كثيرة جداً أثناء دورانه، منها حالة وحيدة يلامس النقطة وهي عند إغلاق الباب .



برهان النظرية :

لاحظ أن :

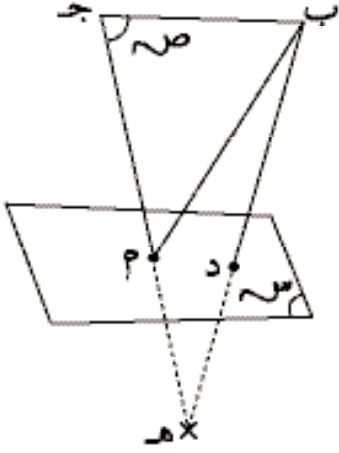
$$P \ni \vec{PB} , B \ni \vec{PB} , B \not\ni \vec{PB}$$

جـ x

∴ P، B، جـ نقاط ليست على اسقامة واحدة . فهي تحدد مستوى وحيد . (المسلمة الأولى ب)

نظرية (٣) :

إذا اشترك مستويان في نقطة فإنهما يشتركان في مستقيم.



المعطيات : المستوى S ، والمستوى P يشتركان في النقطة P

المطلوب : إثبات أنهما يشتركان في مستقيم .

العمل : مد المستقيم h إلى $هـ$ في الجهة الثانية من المستوى S

البرهان : $\vec{h} \subset P$ ، $هـ \in S$. (من تعريف المستوى)

$ب \in S$ ، $هـ \in S$

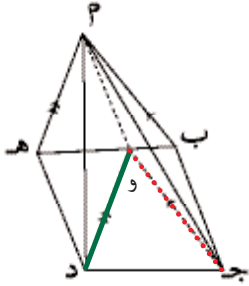
$\therefore \vec{b} \subset S$. (من تعريف المستوى)

لكن النقطتان $ب$ ، $هـ$ تقعان في جهتين مختلفتين من المستوى S

$\therefore \vec{b} \cap هـ$ يقطع المستوى S في نقطة مثل $د$

$\therefore د \in S$ ، $د \in P$ ، $د \in S$

\therefore المستقيم $د$ يقع في المستويين S ، P



مثال ٤

الشكل المقابل يمثل هرم قاعدته مربع $ب د هـ$. $پ$ ب ح ، $د هـ$ مستويان يشتركان في النقطة $پ$ أثبت أنهما يشتركان في مستقيم

الحل

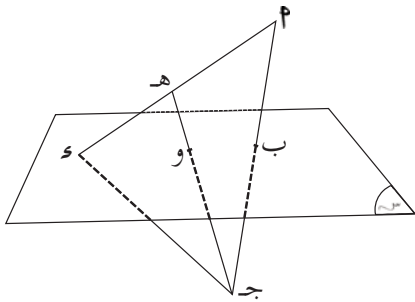
من $ج$ ارسم مستقيماً في المستوى $پ$ ب ح (لاحظ أن المستوى $پ$ ب ح ممتد من جميع الجهات) يوازي

$ب د$ ، وارسم من $د$ مستقيماً في المستوى $پ$ د هـ يوازي $پ هـ$ سيلتقيان في نقطة مثل $و$ حيث أن $پ \in ب ح$ ،

$پ \in د هـ$ ، وكذلك $پ \in ب ح$ ، و $پ \in د هـ$ فإن $\vec{ب ح} \cap \vec{د هـ} = پ$ ، $پ \in ب ح$ ، $پ \in د هـ$.

\therefore المستويان يشتركان في مستقيم .

مثال ٥

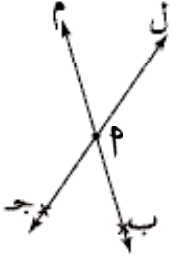


$\vec{ب ح}$ تقطع المستوى S في نقطة $ب$ رسم $\vec{ب ح}$ يلاقي

المستوى S في $و$ ثم أخذت نقطة $هـ \in ب ح$ ورسم $\vec{هـ ج}$

فقطع المستوى S في $و$ أثبت أن النقط $ب$ ، $و$ ، $س$ على

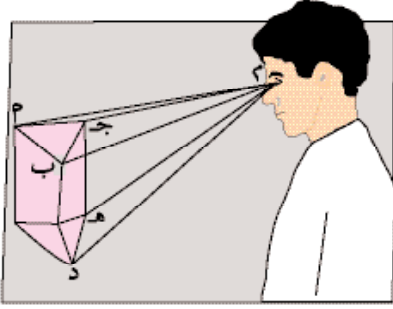
استقامة واحدة .



البرهان:

ل يتحدد بالنقطتين P ، $ح$ مثلا، $\vec{م}$ يتحدد بالنقطتين P ، $ب$ مثلا، النقاط P ، $ب$ ، $ح$ ليست على استقامة واحدة فهي تحدد مستوى وحيد مثل $س$
 $\therefore \vec{ل} \subset س$ ، $\vec{م} \subset س$

مثال ٣



اكتب عدد المستويات المتكونة من الأشعة الواردة من الجسم إلى عين المشاهد في الصورة واذكر اسم اثنين منها.

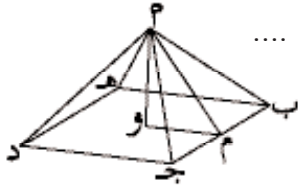
الحل

عدد الأشعة في الشكل = ٥

كل خطين متقاطعين (متلاقيين) تشكل مستوى

\therefore عدد المستويات = $\binom{5}{2} = \frac{5 \times 4}{2} = 10$ مستويات

من هذه المستويات : $م$ ، $ح$ ، $ب$ ، $م$ ، $ب$ ، $ح$ ، $م$ ، $د$ ، ...



تدريب ٧

أوجد عدد المستويات المتشكلة في الشكل المرافق .

تدريب ٨

أثبت أنه: إذا وجد خطين مستقيمين متوازيين فإنهما يعينان مستوى وحيد.

نتيجة *

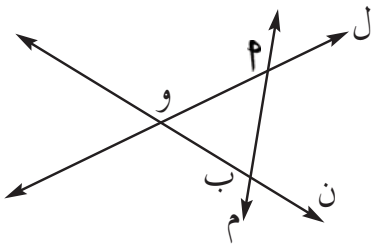
إذا تقاطعت ثلاث مستقيمات مثني مثني فإنها تحدد مستوى وحيد .

المعطيات :

$\vec{ل}$ ، $\vec{م}$ ، $\vec{ن}$ بحيث $\vec{ل}$ يقطع $\vec{م}$ ، $\vec{ن}$ في P ، وعلى الترتيب، $\vec{م}$ يقطع $\vec{ل}$ ، $\vec{ن}$ في P ، $ب$ على الترتيب، $\vec{ن}$ يقطع $\vec{ل}$ ، $\vec{م}$ في $و$ ، $ب$ على الترتيب.

المطلوب: إثبات أن المستقيمات $ل$ ، $م$ ، $ن$ يجمعها مستوى وحيد.

البرهان: لاحظ أن النقطتين P ، $ب$ تنتميان للمستقيم $م$ لكن النقطة $و$ لا تنتمي للمستقيم $م$.
 \therefore النقاط P ، $و$ ، $ب$ ثلاث نقاط ليست على استقامة واحدة



\therefore يجمعها مستوى واحد P و $ب$

$\vec{ل} \subset$ المستوى P و $ب$

$\vec{م} \subset$ المستوى P و $ب$

$\vec{ن} \subset$ المستوى P و $ب$

\therefore المستقيمات $ل$ ، $م$ ، $ن$ يجمعها مستوى وحيد

- (١) إذا كانت النقاط P ، ب، ح ليست على استقامة واحدة فما عدد المستقيمات التي تمر بها معاً؟ وما عدد المستويات التي تمر بها؟
- (٢) إذا كانت P ، ب، ح ثلاث نقاط على استقامة واحدة فما عدد المستقيمات التي تمر بهذه النقاط؟ وما عدد المستويات التي تمر بالنقاط الثلاثة؟
- (٣) انقل إلى دفترك، واملأ الفراغ فيما يلي :
- (P) ——— تحدد خط مستقيم (ب) ثلاث نقاط ——— تحدد مستوى
 (ج) مستقيمان ——— يحددان مستوى (د) مستويان ——— يحددان مستقيم
- (٤) اذكر نص التعريف أو المسلمة أو النظرية التي تعالج كلاً من النقاط التالية علماً بأن النقاط P ، ب، ج ليست على استقامة واحدة .
- (P) ب ح مستوى وحيد (ب) \vec{P} \vec{B} مستقيم وحيد
 (ح) \vec{P} \vec{B} ، \vec{B} \vec{C} ، \vec{P} \vec{C} تقع في المستوى P ب ج .
 (د) المستوي م ب ح، والمستوى P ب ج يتقاطعان في المستقيم \vec{B} \vec{C} .
- (٥) كم مستقيماً تستطيع رسمه في كل حالة مما يلي؟
- (P) ثلاث نقاط ليست على استقامة واحدة (ب) تقاطع مستويين .
 (ح) أربع نقاط مستوية منها ثلاث على استقامة واحدة .
 (د) أربع نقاط مستوية لا تقع أي ثلاث منها على استقامة واحدة .
- (٦) كم مستوى تستطيع تحديده في كل حالة مما يلي :
- (P) أربع نقاط غير مستوية لا تجمع أي ثلاثة منها خط مستقيم .
 (ب) خمس نقاط غير مستوية منها ثلاث على استقامة واحدة .
- (٧) (P) فسر متى تستقر طاولة بثلاثة أرجل على الأرض .
 (ب) بين متى لا يمكن لطاولة لها أربع أرجل أن تستقر على الأرض .

المعطيات:

\overline{P} جـ تقطع المستوى π في ب ، \overline{P} و \overline{Q} يلاقيان المستوى π في ϵ ، \overline{H} جـ تقطع المستوى π في ν .

المطلوب:

إثبات أن النقط ب ، و ، ϵ على استقامة واحدة.

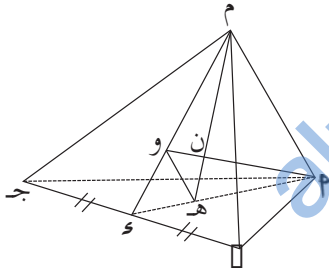
البرهان:

\overline{P} ، \overline{Q} ، والنقطة جـ يعينان مستويًا هو \overline{PQ} و \overline{H} وليكن المستوى ν ،
: $\exists \overline{P} \subset \nu$ ، $\exists \overline{Q} \subset \nu$ ، $\exists \overline{H} \subset \nu$ ،
ولكن النقط ب ، و ، ϵ تنتمي جميعها للمستوى π
: \therefore النقط ب ، و ، ϵ واقعة في المستويين π ، ν ،
وحيث أن المستويين غير منطبقين
: $\therefore \overline{PQ}$ و \overline{H} هو خط تقاطع المستويين π ، ν
أي أن ب ، و ، ϵ على استقامة واحدة. (وهو المطلوب)

تدريب ٩

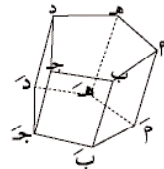
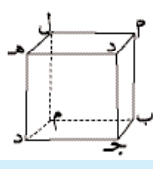
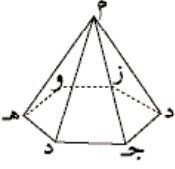
م . \overline{P} بـ جـ هرم ثلاثي قاعدته المثلث \overline{PQR} بـ جـ فإذا كانت \overline{H} هي ملتقى المتوسطات في القاعدة \overline{PQR} بـ جـ ، وهي ملتقى المتوسطات في الوجه م ب جـ ، فاثبت أن:

\overline{P} ، و ، \overline{H} يجمعهما مستوى واحد.



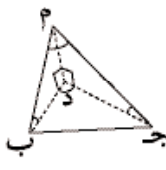
الفراغ (الفضاء) Space

نشاط ١: تحديد المجسمات (الفراغ)



الأدوات: مجسمات هندسية (هرم ثلاثي ، هرم رباعي ، مكعب ، منشور)

الخطوات:



(١) خذ أحد المجسمات وحدد في جدول عدد النقاط (الرؤوس) ، عدد المستقيمت (الحواف) عدد المستويات (الأوجه) .

(٢) يأخذ زميلك مجسماً آخر ويقوم بنفس العمل تحتسب درجة لمن يكمل العمل بشكل صحيح.

(٣) تناوب وزميلك العمل حتى تنهيا جميع المجسمات .

أجب عن الأسئلة التالية :

هل يمكن رسم مستوى يمر بجميع رؤوس المجسم ؟ وضح إجابتك .

هل يمكن رسم مستقيم يمر بجميع الرؤوس ؟ وضح إجابتك .

هل يمكن رسم مستقيم يقطع جميع مستويات الأوجه ؟ وضح إجابتك .

ما المجسم الذي له أقل عدد من الرؤوس ؟

ما أقل عدد من النقاط يمكن أن تكون رؤوس مجسم ؟ اعط وصفاً لهذه النقاط .

لعلك توصلت من النشاط السابق أن أقل عدد من النقاط التي يمكن أن تشكل مجسماً وتحتل حيزاً في الفراغ هي أربع نقاط وذلك في حالة الهرم الثلاثي حيث تكون عبارة عن ثلاث نقاط مستوية (تقع في مستوى واحد) ونقطة خارجة .

المسلمة الثالثة :

يتحدد الفراغ بأربع نقط غير مستوية (لا يجمعها مستوى واحد) على الأقل .

تدريب ١

حدد أية أربع نقاط غير مستوية وحاول تمرير مستوى بكل ٣ نقاط، كم مستوى تحتاج؟ وما الشكل الذي ينتج لديك؟

(٨) أجب عما يلي :

(٢) كم مستقيماً يمكن أن يمر بنقطة معلومة؟

(ب) كم مستوى يمكن أن يمر بمستقيمين متوازيين؟

(ج) إذا تقاطعت ثلاث مستويات فما أقل عدد، وما أكبر عدد من المستقيمتين يمكن الحصول عليها؟ مثل ذلك على غرفة الصف .

(٩) اثبت أن أضلاع المستطيل تقع جميعاً في مستوى واحد.

(١٠) \overline{P} جـ تقطع المستوى π في B بحيث $B = \overline{P} \cap \pi$ ، رسم \overline{P} . يقطع المستوى π في D

ثم نصفت \overline{PD} في H ورسم H جـ فقطع المستوى π في O .

اثبت إن:

(٢) النقط B ، O ، D تقع على استقامة واحدة.

(ب) B و $O = \frac{1}{2} OD$ ، H و $O = \frac{1}{2} OD$ و H .

(١١) إذا كان L_1 ، L_2 مستقيمين مختلفين متقاطعين في نقطة P ، $L_1 \subseteq \pi_1$ ، $L_2 \subseteq \pi_2$ ، $L_1 \cap \pi_2 = \emptyset$ ، $L_2 \cap \pi_1 = \emptyset$

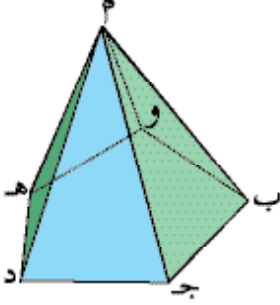
آخر π_2 وتوجد نقطة أخرى B تقع على L_1 وتوجد نقطة أخرى C تقع على L_2

ارسم شكلاً يبين ذلك، ثم أكمل:

(٢) المستوى π جـ $\pi_1 \cap \pi_2 = \dots$

(ب) المستوى π جـ $\pi_1 \cap \pi_2 = \dots$

(ج) $\pi_1 \cap \pi_2 \cap \pi = \dots$

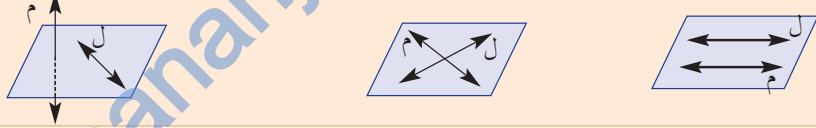


- أنظر إلى الشكل المجاور فهو يمثل هرمًا خماسيًا، وأجب عما يلي :
- كم مستوى (وجه) يكون الجسم ؟
 - كم مستقيماً (حافة) يوجد في الشكل ؟
 - ابحث عن مستقيمين في مستوى يكونان غير متقاطعين وغير متوازيين
 - هل تتلاقى جميع المستقيمات معاً ؟
 - اعط مثلاً على ثلاثة مستقيمات متلاقية في نقطة .
 - اعط مثلاً على مستقيمين متلاقين.
 - اعط مثلاً على مستقيمين لا يلتقيان أبداً ولا يتوازيان .

نتيجة *

- إذا وقع مستقيمان في مستوى فإما أن يكونا متوازيين أو متقاطعين .
- لأي مستقيمين في الفضاء ثلاثة أوضاع .

١) متوازيان (ب) متقاطعان (ج) متخالفتان (غير متوازيين وغير متقاطعين).



مثال ٢

- ١) اذكر ثلاثة أزواج من المستقيمات المتخالفة في غرفة الصف .
- ب) اذكر أربعة أزواج لمستقيمات متوازية في غرفة الصف وبين المستوى الذي يجمع كل زوج منها .
- ج) اذكر زوجين من المستقيمات المتقاطعة (المتلاقية) في غرفة الصف ثم بين المستوى الذي يجمعهما .

الحل

افرض أن الشكل المقابل يمثل غرفة الصف :

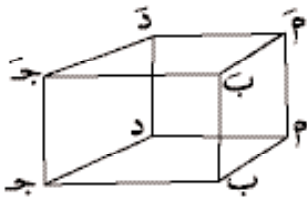
١) مستقيمات متخالفة : $(\overleftrightarrow{PP}, \overleftrightarrow{JD})$ ، $(\overleftrightarrow{BB'}, \overleftrightarrow{DD'})$ ، $(\overleftrightarrow{AB'}, \overleftrightarrow{D'D})$.

ب) مستقيمات متوازية :

$(\overleftrightarrow{AB}, \overleftrightarrow{A'B'})$ في المستوى P ب P'

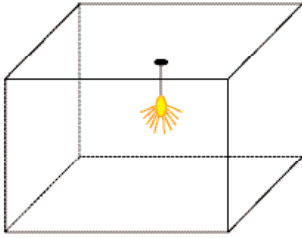
$(\overleftrightarrow{AD}, \overleftrightarrow{A'D'})$ في المستوى P د ج ب
 $(\overleftrightarrow{BC}, \overleftrightarrow{B'C'})$ في المستوى P ج ب
 $(\overleftrightarrow{CD}, \overleftrightarrow{C'D'})$ في المستوى P د ج ب
 $(\overleftrightarrow{AB}, \overleftrightarrow{A'B'})$ في المستوى P ب P'

ج) مستقيمات متقاطعة : $(\overleftrightarrow{AB}, \overleftrightarrow{A'B'})$ ، $(\overleftrightarrow{BC}, \overleftrightarrow{B'C'})$ ، $(\overleftrightarrow{CD}, \overleftrightarrow{C'D'})$ ، $(\overleftrightarrow{AD}, \overleftrightarrow{A'D'})$



almanahj.com/om





استخدم الاستنتاج الذي توصلت إليه وأجب عما يلي :

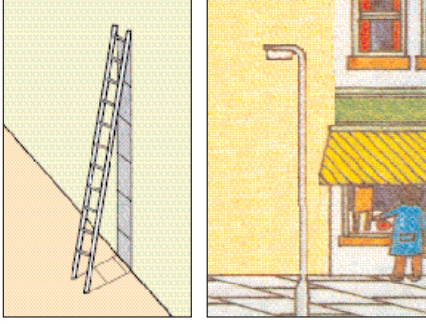
(أ) يتدلى مصباح من السقف بسلك ، ما علاقة المستقيم الذي يمثله السلك مع جدران الغرفة؟

(ب) إذا ارتكز سلم على الأرض وعلى جدار رأسي فما علاقة المستقيم الذي يمثله السلم بكل من مستوى الأرض ، ومستوى الجدار؟

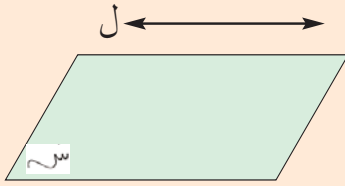
(ج) ما علاقة المستقيم الذي يمثل ظل عمود الكهرباء مع مستوى الأرض؟

(د) ما علاقة المستقيم الذي يمثل رجل الطاولة مع مستوى سطح الطاولة؟

لعلك توصلت مما سبق إلى النتائج التالية :



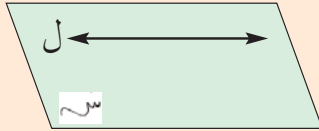
نتائج *



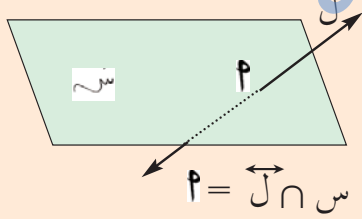
علاقة المستقيم بالمستوى تتحدد:

أولاً: المستقيم \vec{L} يوازي المستوى S وهناك حالتان:

$$(1) \vec{L} \cap S = \emptyset \quad \text{أي لا توجد نقاط مشتركة بينهما.}$$



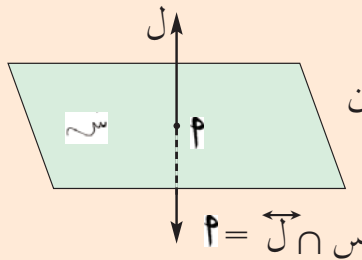
(2) $\vec{L} \subset S$ أي جميع نقاط المستقيم مشتركة مع المستوى (المستقيم واقع بتمامه في المستوى).



ثانياً: المستقيم يقطع المستوى في نقطة وله حالتان:

(1) يكون المستقيم مائل على المستوى أي قياس

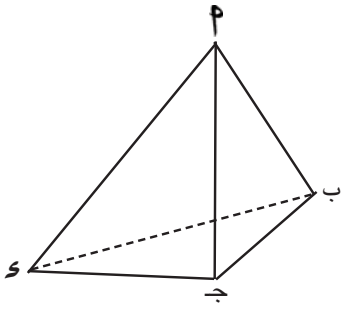
$$\text{الزاوية بين المستقيم والمستوى } \neq 90^\circ$$



(2) المستقيم يُعامد المستوى أي قياس الزاوية بين

$$\text{المستقيم والمستوى } = 90^\circ$$

في الشكل الموضح:



هرم ثلاثي رأسه P وقاعدته Δ ب ج د

(أ) اذكر أسماء ثلاث مستويات.

(ب) اذكر خط تقاطع كل زوج منها.

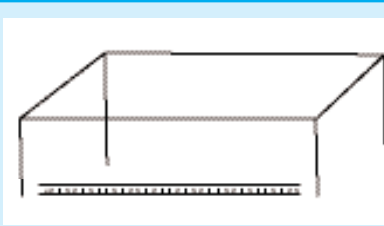
(ج) اذكر اسم كل مستوى والقطع المستقيمة القاطعة له.

(د) اذكر خط تقاطع مستوى القاعدة ب ج د مع الوجه الجانبي P ج د .

(هـ) اذكر اسم ثلاث أزواج من المستقيمات المتخالفة.

(ب) علاقة مستقيم مع مستوى

نشاط ٢: أوضاع المستقيم المختلفة:



المواد: طاولة ، متر خشبي

الخطوات:

(١) ضع المتر الخشبي على الأرض أسفل الطاولة

ثم أجب عن الأسئلة التالية:

(أ) هل هنالك نقاط مشتركة بين مستوى سطح الطاولة α والمتر الخشبي ل؟

$\alpha \cap \text{ل} = ?$

(ب) هل جميع النقاط على المتر الخشبي تبعد عن سطح الطاولة نفس البعد؟

(ج) ما علاقة الخط المستقيم الذي يمثله المتر الخشبي مع

المستوى الذي يمثله سطح الطاولة؟



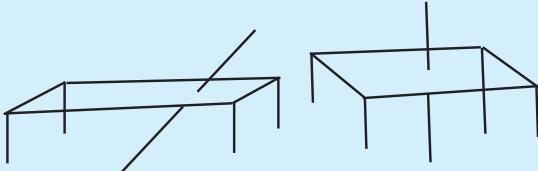
(٢) ضع المتر الخشبي على سطح الطاولة، ثم أجب عن

الأسئلة الثلاثة السابقة .

(٣) ضع المتر الخشبي بشكل مائل على الأرض بحيث يمس طرفه العلوي السطح

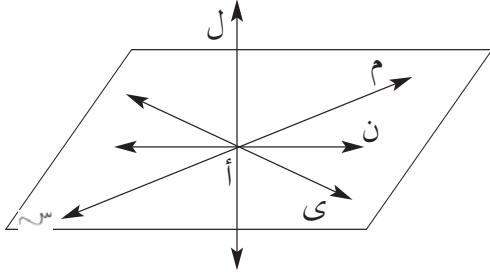
السفلي للطاولة، ثم أجب عن

الأسئلة السابقة .



مما سبق استنتج أوضاع المستقيم المختلفة مع المستوى .

يقال لمستقيم ل أنه عمودي على المستوى π إذا كان المستقيم ل عمودياً على جميع المستقيمت الواقعة في المستوى π ، ونعبر عن ذلك بالرموز كالاتي: $\vec{l} \perp \pi$.



ففي الشكل المقابل:

$$\{أ\} = \pi \cap l$$

ل عمودي على المستقيمت: م، ن، ...
الواقعة في المستوى π ، والمارة بنقطة أ.
∴ $l \perp \pi$.

نظرية (٤):

المستقيم العمودي على مستقيمين غير متوازيين في المستوى يكون عمودياً على المستوى.

توضيح للنظرية: لاحظ خط تقاطع جدارين في غرفة الصف يكون عمودياً على كل من خطي تقاطع الجدارين مع مستوى سطح الأرض، فإذا رسمت عدة مستقيمت في مستوى أرض الغرفة تمر بنقطة التقاطع فما قياس الزوايا بين خط تقاطع الجدارين مع تلك المستقيمت.

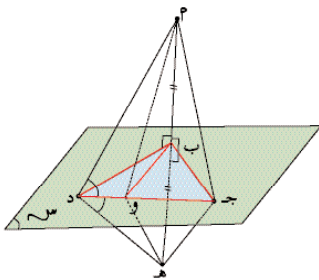
برهان النظرية:

المعطيات:

π مستوى فيه $\vec{b} \perp \vec{c}$ ، \vec{b} غير متوازيين (متلاقين)،
 $\vec{a} \perp \vec{b}$ ، $\vec{a} \perp \vec{c}$

المطلوب: إثبات أن \vec{a} يعامد مستقيماً آخر في المستوى مثل \vec{b} و

العمل: نصل \vec{a} ، \vec{c} ، ونمد \vec{a} تحت المستوى
بقدر طوله إلى \vec{h} ، نصل \vec{c} ، \vec{h} ، \vec{d} ، \vec{e} ، \vec{f}



البرهان: من تطابق المثلثين $\triangle abc$ ، $\triangle hcd$ ، $\triangle hde$ ينتج أن

$$\angle hcd = \angle hde$$

ومن تطابق المثلثين $\triangle hcd$ ، $\triangle hde$ ينتج أن $\angle hcd = \angle hde$

ومن تطابق المثلثين $\triangle hcd$ ، $\triangle hde$ ينتج أن $\angle hcd = \angle hde$
أي $\angle hcd = \angle hde$.

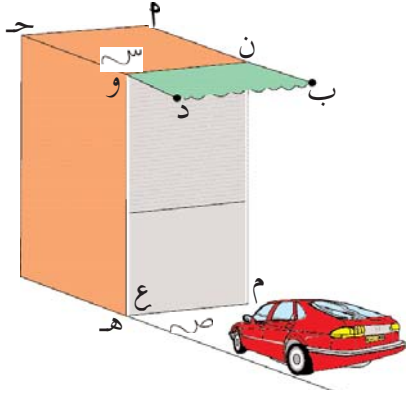
من تطابق المثلثين $\triangle hcd$ ، $\triangle hde$ ينتج أن $\angle hcd = \angle hde$

ومن تطابق المثلثين $\triangle hcd$ ، $\triangle hde$ ينتج أن $\angle hcd = \angle hde$
لكن مجموعهما 180° على استقامة واحدة.

$$\therefore \vec{a} \perp \vec{b} \text{ و}$$

$$\therefore \vec{a} \perp \pi \text{ وهو المطلوب.}$$

مثال ٣



(٢) قام عامر ببناء كراج لسيارته الجديدة كما عمل مظلة من القماش أمام الكراج . وضع علاقة الأذرع التي تحمل مظلة القماش $\overline{٢ب}$ ، $\overline{ح د}$ بكل من : مستوى سطح الكراج . مستوى أرض الكراج ، مستوى باب الكراج .

- (ب) هل $\overrightarrow{٢ب}$ يوازي كل مستقيم في مستوى أرض الكراج ؟ وضح إجابتك .
 (ج) هل $\overline{ح د}$ يلتقي مع كل مستقيم في مستوى باب الكراج ؟ وضح إجابتك .

الحل

(٢) الأذرع $\overline{٢ب}$ ، $\overline{ح د}$ تقع في مستوى سطح الكراج ، $\overline{٢ب} \cap \overline{ح د} = \emptyset$ أي أن $\overline{٢ب} \parallel \overline{ح د}$ - الأذرع $\overline{٢ب}$ ، $\overline{ح د}$ لا يلتقي نهائياً مع مستوى أرض الكراج $\overline{٢ب} \cap \overline{ح د} = \emptyset$ ، $\overline{٢ب} \parallel \overline{ح د}$ - الأذرع $\overline{٢ب}$ ، $\overline{ح د}$ تتقاطع مع مستوى الباب في النقطتين ن ، و ، $\overline{٢ب} \cap \overline{ح د} = \{ن\}$ ، $\overline{ح د} \cap \overline{ع و} = \{و\}$ وعمودية عليه .

(ب) $\overline{٢ب} \parallel \overline{ح د}$ لكنه لا يوازي كل مستقيم فيه فمثلاً $\overline{م هـ} \supseteq \overline{ح د}$ لكن $\overline{٢ب} \not\parallel \overline{م هـ}$ $\therefore \overline{٢ب}$ ، $\overline{م هـ}$ متخالفان

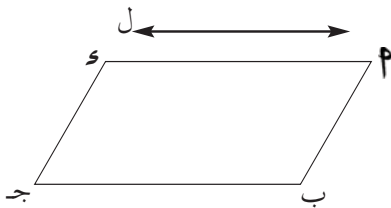
(ج) $\overline{ح د} \cap \overline{ع و} = \{و\}$ لكنه لا يلتقي مع كل مستقيم في $\overline{ع و}$ فمثلاً $\overline{م ن} \supseteq \overline{ح د}$ لكن $\overline{م ن} \cap \overline{ح د} = \emptyset$ $\therefore \overline{م ن}$ ، $\overline{ح د}$ متخالفان

تدريب ٥

اعط أمثلة واقعية على مستقيم يوازي مستوى إلا أنه لا يوازي كل مستقيم في المستوى .

نتيجة *

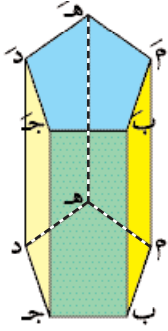
إذا وازى مستقيم مستوى فإن المستقيم لا يوازي كل مستقيم في المستوى



لاحظ أن:

$$\overline{ل} \parallel \overline{م}$$

لكن $\overline{ل} \not\parallel \overline{سب}$ ، كذلك $\overline{ل} \not\parallel \overline{جد}$



استخدم شكل مكعب أو منشور رباعي ، سداسي ، ثماني وحدد فيه ما يلي:

- (أ) الأوجه (المستويات) المتوازية .
 (ب) المستويات المتقاطعة وحدد خطوط التقاطع .
 (ج) هل هنالك مستويات ليست متقاطعة ؟ اذكرها إن وجدت .

نتائج *

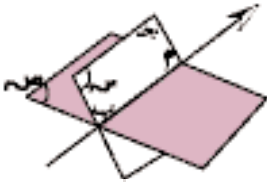
لأي مستويين في الفضاء مثل π ، ρ توجد ثلاث حالات مختلفة هي:

- (١) $\pi \parallel \rho$ ويكون $\pi \cap \rho = \emptyset$
 (٢) $\pi \parallel \rho$ ويكون المستوى π ينطبق على المستوى ρ .
 (٣) $\pi \cap \rho = \vec{l}$ أي المستوى π يتقاطع مع المستوى ρ في خط مستقيم.

تمارين ومسائل ٢ *



- (أ) من الرسم المقابل أجب عما يلي :
 (أ) اذكر ثلاثة أزواج من المستقيمت المتوازية .
 (ب) اذكر زوجان من المستقيمت المتخالفة .
 (ج) اذكر جميع المستويات التي تشكل أوجه الشكل
 ب ج د هـ ب ج د هـ .
 (د) اذكر أزواج المستويات التي يكون خطوط تقاطعها ، \vec{b} ج د ، \vec{c} ج د ، \vec{d} ج د هـ .
 (هـ) ما علاقة \vec{b} ج د بالمستوى ب ج د هـ ؟



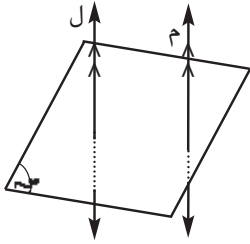
- (٢) اعتمد على الشكل المقابل، وأجب عما يلي :

- (أ) ضع نقطة مثل ج د في المستوى π وبحيث لا تقع في المستوى ρ . هل يمكن للنقطة ج د أن تقع على الخط ρ ب ؟ ولماذا ؟

- (ب) ضع نقطة مثل هـ بحيث تقع في كل من المستويين π ، ρ فأين يمكن لهذه النقطة أن تقع ؟ وضح إجابتك .

- (٣) من نقطة على عمود للكهرباء كم مستقيماً يمكن أن ترسم بحيث يوازي مستوى الأرض ؟
 (٤) من خلال جدران غرفة الصف، وأرضيتها، والسقف. بين كيف يمكن تمثيل المستويات، والنقاط، والمستقيمت؟ ثم اعط أمثلة على: مستويات متوازية، مستويات متقاطعة، مستقيمت متوازية، مستقيمت متقاطعة، ومستقيمت متخالفة .

المستقيم الذي يوازي مستقيم معامد لمستوى يكون عمودياً على المستوى .



توضيح النتيجة :

$\vec{m} \parallel \vec{l}$ ، $\vec{l} \perp$ المستوى π .

$\vec{m} \perp$ المستوى π .

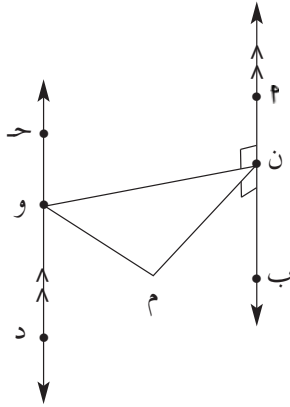
في الشكل:

مثال ٤

$\vec{m} \parallel \vec{c}$ ، $\vec{c} \perp \vec{b}$ ، $\vec{b} \perp \vec{n}$ ، $\vec{b} \perp \vec{m}$ و

اثبت أن $\angle \text{ق م و} = 90^\circ$.

الحل



(معطى)

$\vec{m} \perp \vec{n}$ ، $\vec{m} \perp \vec{b}$ و

(نظرية ٣)

$\vec{b} \perp$ المستوى π و

ولكن $\vec{b} \parallel \vec{c}$

(نتيجة نظرية ٣)

$\vec{c} \perp$ المستوى π و

(تعريف)

$\vec{c} \perp \vec{m}$ و

$\angle \text{ق م و} = 90^\circ$

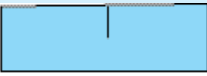
ج - علاقة مستوى مع مستوى

نشاط ٣: المستويات المتوازية والمستويات المتقاطعة

المواد: قطع من الورق المقوى على شكل مستطيل ، مقص

الخطوات :

(١) خذ قطعتين من الورق المقوى وقص من الوسط بحيث لا يفصل الجوانب كما في الشكل.



(٢) خذ قطعتين أخريين وقصهما من موقعين دون أن تفصل الأجزاء .



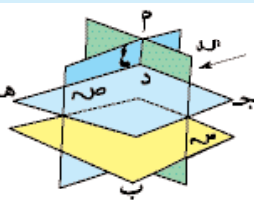
(٣) ركب القطع لتصبح كما في الشكل، ثم أجب عن الأسئلة الآتية:

(١) ما علاقة المستوى π بالمستوى ϵ ؟

(ب) ما علاقة المستوى π بالمستوى σ ؟

(ج) ما علاقة المستوى σ بكل من المستويين π ، ϵ ؟

(د) ماذا يمثل كل من \vec{m} ، \vec{c} ، \vec{d} ، \vec{h} ؟



يمكنك ملاحظة المستويات داخل غرفة الصف والإجابة عن الأسئلة .

(٤) اكتب النتائج التي توصلت إليها .

almanahj.com/om



الاحداثيات في ثلاثة أبعاد Coordinate in three dimensions

لقد سبق أن درست كيفية تحديد نقطة في مستوى، وإيجاد كل من الاحداثي السيني والاحداثي الصادي لنقطة في المستوى، وفي هذا الفصل سنتعرف كيفية تحديد نقطة في الفضاء، ولفهم هذا الموضوع نفذ النشاط التالي :

نشاط ١: تحديد نقطة في الفضاء

الخطوات :

- ١) حدد نقطة في غرفة الصف (ليس شرطاً أن تكون على أرض الغرفة أو الجدران) دون أن تخبر زميلك واطلب إليه أن يجدها بعد أن يسأل مجموعة أسئلة لا تزيد عن خمسة. يعطى درجة في حالة تحديد موقع النقطة بعد ٥ أسئلة ودرجتان إذا حددها بأربعة أسئلة وثلاثة درجات إذا حددها بثلاثة أسئلة .
 - ٢) تبادل مع زميلك الأدوار على أن يقلص عدد الأسئلة تدريجياً إلى ثلاثة أسئلة فقط والطالب الفائز هو الذي يحصل على درجات أكثر .
 - ٣) تناقش مع زميلك حول الاستراتيجيات التي استخدمت ل طرح الأسئلة .
 - ٤) اطلع على ما توصلت إليه بعض المجموعات الأخرى، وهل يتطابق مع النتائج التي توصلتم إليها .
- أجب عما يلي :
- هل معرفة بعد الشيء عن جدار واحد يكفي لتحديد موقعه ؟ اذكر لماذا ؟
 - هل معرفة بعد الشيء عن جدارين متوازيين يكفي لتحديد موقعه ؟ فسر السبب .
 - هل معرفة بعد الشيء عن كل من جدارين متقاطعين يكفي لتحديد الموقع ؟ متى يمكن ومتى لا يمكن ؟
 - هل معرفة بعد الشيء عن كل من جدارين متعامدين وبعدها عن أرض الغرفة أو سقفها يكفي لتحديد الموقع ؟

تدريب ١

إذا أراد كهربائي أن يثبت مصباحاً كهربائياً يتدلى من سقف غرفتك فاعطه وصفاً دقيقاً لموقع المصباح .

- (٥) اعط التمثيل المناسب (نقطة ، مستقيم ، مستوى ، فراغ) لكل مما يلي :
- (١) النجوم (ب) أسلاك الكهرباء (ج) أرضية ملعب كرة القدم
(د) جبل (هـ) عقدة في خيط (و) قطعة من القماش

ز) الضوء المنبعث من الشمس

(٦) إذا تقاطعت أربعة مستقيمات كما في الشكل، فأجب عما يلي :

(١) كم عدد المستويات المختلفة التي تحددها هذه المستقيمات ؟

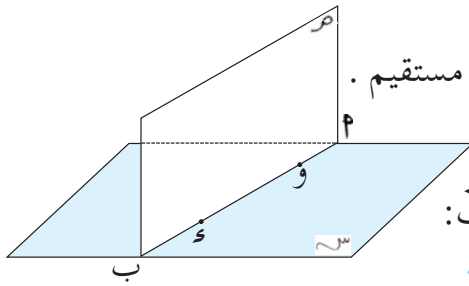


(ب) اذكر مستقيمين متخالفين إن أمكن .

(ج) إذا أقيم عمود من النقطة P على كل من \vec{a} ، \vec{b} ، \vec{c} ، \vec{d} مثل P ع فاذا كان مستقيماً يخالف المستقيم P ع وآخر يعاملده .

(٧) اثبت أنه إذا اشترك مستويان في نقطة فإنهما يشتركان في مستقيم .

(٨) في الشكل المقابل :



المستويان S ، M متقاطعان في \vec{a} ، \vec{b} ، \vec{c} ، \vec{d} : $\vec{a} \parallel \vec{b}$:

(١) ارسم المستوى E الذي يقطع المستوى S في \vec{a} والمستوى M في \vec{b} .

(ب) ارسم المستوى U الذي يقطع المستوى S في \vec{a} والمستوى M في \vec{c} ، وبحيث يكون $\vec{a} \parallel \vec{c}$ ، $\vec{b} \parallel \vec{d}$ ، $\vec{c} \parallel \vec{d}$:

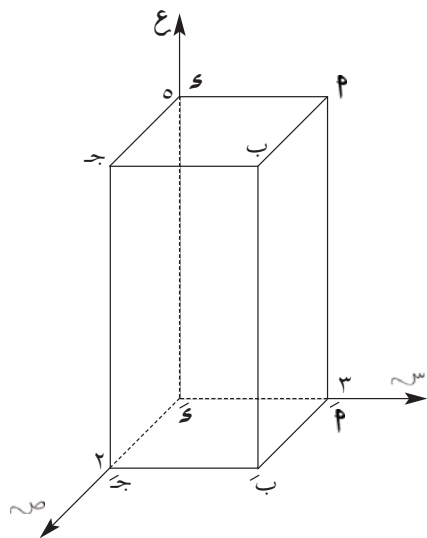
(ج) أكمل :

(١) المستوى M ل \vec{a} المستوى H ج و

(٢) $S \cap M \cap L = \vec{a}$

(٣) $S \cap M \cap U = \vec{b}$

(٤) $S \cap M \cap U \cap L = \vec{a}$



تدريب ٣

بالاستعانة بالشكل المقابل:

اكتب إحداثيات رؤوس شبه المكعب.

تدريب ٤

في النظام الاحداثي ثلاثي الابعاد:

أ) ما إحداثيات النقط التي تقع على المحور س؟

ب) ما إحداثيات النقط التي تقع على المحور ص؟

ج) ما إحداثيات النقط التي تقع على المحور ع؟

مثال ٢

مثّل النقطه ن (٤، ٣، ١) في نظام الإحداثيات.

الحل

: الإحداثي السيني يساوي ١

: نسير في اتجاه المحور س وحدة واحدة بدء من نقطة

الأصل و (نقف عند النقطة أ).

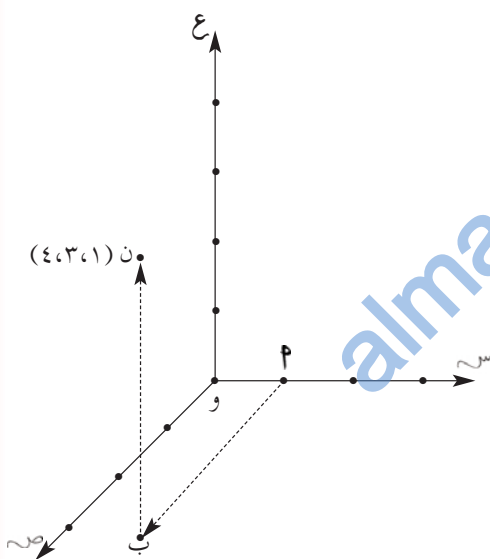
: الإحداثي الصادي يساوي ٣

: نسير في اتجاه يوازي المحور ص ثلاث وحدات بدء

من النقطة أ (نقف عند النقطة ب).

: الإحداثي العيني يساوي ٤

: نسير في اتجاه يوازي المحور ع أربع وحدات بدء من النقطة ب (نصل للنقطة ن).



تدريب ٥

مثل النقاط التالية في نظام الاحداثيات ثلاثي الأبعاد.

ج) (٨، ٠، ٠)

ب) (٦، ٥، ٧)

أ) (٣، ١٠، ٢)

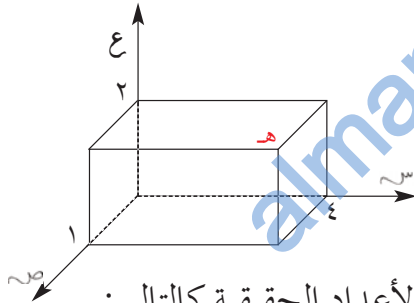
لعلك توصلت من النشاط السابق والتدريب أنه لتحديد موقع في الفضاء لا بد من معرفة ثلاثة أبعاد عن مستويات متعامدة .

فإذا افترضت أن هنالك جسماً معلقاً بخيط من سقف غرفة الصف وأردت أن تحدد موقعه بالضبط فإنك تجد بعده عن أحد الجدران (لاحظ أن البعد هو المسافة العمودية من النقطة التي تمثل ذلك الجسم إلى مستوى الجدار) كما نجد بعده عن جدار آخر يعامد الجدار الأول، ثم نجد بعده عن مستوى الأرض فنقول أن الإحداثيات هي (٣، ٤، ٢) مثلاً حيث يدل البعد ٣ على بعد الجسم عن مستوى الجدار الأول، والبعد ٤ يدل على بعد الجسم عن مستوى الجدار الثاني، والبعد ٢ يدل على ارتفاع الجسم عن مستوى الأرض .

لاحظ أنه إذا كان أحد هذه الأعداد صفر فيعني أن بعد الجسم عن ذلك المستوى يساوي صفرًا أي أن الجسم يقع على ذلك المستوى .

تدريب ٢

- ٢) مثل النظام الإحداثي في ثلاثة أبعاد باستخدام ثلاثة أعواد مختلفة (أقلام أو أعواد المص أو أعواد كبريت ...) بحيث تكون في وضع تعامد مع بعضها عند نقطة التلاقي .
- ب) ارسم الشكل المتكوّن على دفترك وسم المحاور s ، v ، e .
- ج) اكتب أسماء المستويات التي حصلت عليها .



مثال ١

بالاستعانة بالشكل المقابل اكتب إحداثيات النقطة هـ .

الحل

- يمكن كتابة إحداثيات كل نقطة بطريقة ثلاثي مرتب من الأعداد الحقيقية كالتالي:
- المسقط الأول عبارة عن: بُعد نقطة تقاطع المستوى الذي يمر بالنقطة هـ ويوازي المستوى v مع المحور s عن نقطة الأصل ويساوي ٤ .
- المسقط الثاني عبارة عن: بُعد نقطة تقاطع المستوى الذي يمر بالنقطة هـ ويوازي المستوى s مع المحور v عن نقطة الأصل ويساوي ١ .
- المسقط الثالث عبارة عن: بُعد نقطة تقاطع المستوى الذي يمر بالنقطة هـ ويوازي المستوى s مع المحور e عن نقطة الأصل ويساوي ٢ .
- ∴ إحداثيات النقطة هـ هي (٤، ١، ٢) .

مثال ٤

أوجد إحداثيات منتصف المسافة بين النقطتين ح (٦، ٢، ٢-)، د (-٢، ٤، ١٢)

الحل

إحداثيات منتصف المسافة بين ح، د هي $(\frac{١٢+٢-}{٢}, \frac{٤+٢}{٢}, \frac{٢-+٦}{٢}) = (٥, ٣, ٢)$

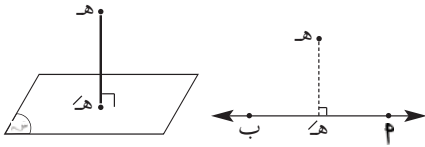
نتيجة

إحداثيات نقطة منتصف القطعة المستقيمة التي تربط بين النقطتين ن (١س، ١ص، ١ع)، ن (٢س، ٢ص، ٢ع) هي $(\frac{٢س+١س}{٢}, \frac{٢ص+١ص}{٢}, \frac{٢ع+١ع}{٢})$

تدريب ٧

أوجد المسافة بين النقطتين P (-١، ٢، ٨)، B (٦، ٤، ٢)، ثم أوجد إحداثيات منتصف المسافة بين P، B.

المساقط العمودية



لندرس الحالات التالية:

(١) مسقط نقطة على مستقيم أو مستوى:

النقطة هـ هي مسقط النقطة هـ.

ولعلك تلاحظ أن النقطة هـ عبارة عن موقع العمود النازل من النقطة هـ على المستقيم P في الشكل الأول، وعلى المستوى سـ في الشكل الثاني.

تعريف

المسقط العمودي لنقطة على مستقيم أو مستوى هو موقع العمود النازل من النقطة على المستقيم أو المستوى.

تدريب ٨

متى يكون مسقط نقطة ما على المستوى هو النقطة نفسها؟

(٢) مسقط مستقيم على مستوى:

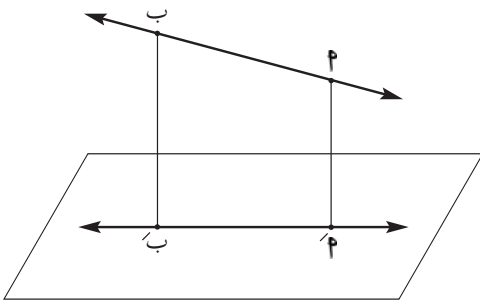
في الشكل المقابل:

P مسقط النقطة P على المستوى سـ،

B مسقط النقطة B على المستوى سـ،

فتكون P مسقط B على المستوى سـ

ويكون: P مسقط B على المستوى سـ



نشاط ٢: البعد بين نقطتين في الفضاء:

الأدوات: علبة محارم ورقية - مسطرة

الخطوات:

- ١ (قم بقياس أبعاد علبة المحارم الورقية.
- ٢ (اختر أحد الرؤوس السفلية كنقطة أصل و .
- ٣ (اختر أي رأسين آخرين سمهما P ، ب مثلا.
- ٤ (اكتب إحداثيات P ، ب .
- ٥ (باستخدام المسطرة أوجد المسافة بين P ، ب .
- ٦ (استخدم قانون المسافة الذي تعلمته سابقا ولكن بعد اعتبار المحور الثالث ليكون القانون: $P = \sqrt{(س_١ - س_٢)^2 + (ص_١ - ص_٢)^2 + (ع_١ - ع_٢)^2}$ حيث (س_١، ص_١، ع_١) إحداثيات النقطة P ، (س_٢، ص_٢، ع_٢) إحداثيات النقطة ب .
- ٧ (قارن القيم التي وجدتها بالقانون والقيم التي وجدتها بالقياس . ماذا تلاحظ؟
- ٨ (قارن نتائجك مع نتائج زملائك .

مثال ٣

أوجد المسافة بين النقطتين P(٣، ٢، ١) ، ب(٥، ٤، ٣).

$$P = \sqrt{(١ - ٣)^2 + (٢ - ٤)^2 + (٣ - ٥)^2} = \sqrt{٤ + ٤ + ٤} = \sqrt{١٢} = ٢\sqrt{٣}$$

تدريب ٦

وضح أن النقاط التالية هي رؤوس مثلث متطابق الأضلاع:

$$P(٤، ٥، ٢) ، ب(١، ٧، ٣) ، ج(٢، ٤، ٥)$$

إحداثيات نقطة منتصف المسافة بين نقطتين

لقد تعلمت كيفية إيجاد إحداثيات منتصف المسافة بين نقطتين في المستوى الإحداثي فإذا

كانت P(٣، ٤) ، ب(-٢، ٦) فإن إحداثيات النقطة التي تنصف P هي $(\frac{٣-٢}{٢}، \frac{٤+٦}{٢})$

$(\frac{١}{٢}، ٥)$ وسنطبق نفس الأسلوب في إحداثيات الثلاثة أبعاد.

مثال ٥

ب ج مثلث قائم الزاوية في ب ، ن م عمودية على مستوى المثلث، اثبت أن:

$$\angle (م ب ج) = 90^\circ$$

ب) ب ج \perp المستوى م ن ب

المعطيات: م ب ج $\angle = 90^\circ$ ، ن م \perp المستوى م ن ب ج

المطلوب: م ب ج $\angle = 90^\circ$

ب) ب ج \perp المستوى م ن ب

البرهان: \therefore ن م \perp المستوى م ن ب ج

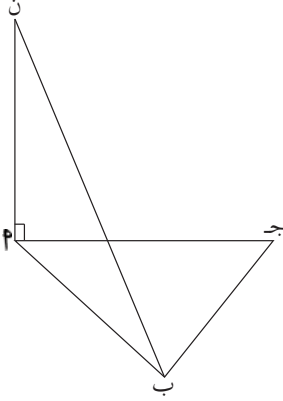
\therefore م ب مسقط ن ب، \therefore م ب \perp ب ج (معطى)

\therefore ن ب \perp ب ج (نظرية)

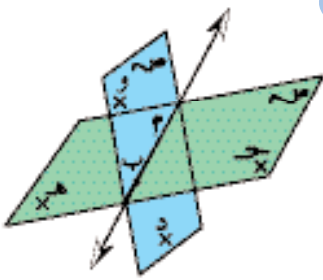
\therefore م ب ج $\angle = 90^\circ$ (المطلوب أولاً)

، \therefore ب ج \perp كل من ن ب، م ب

\therefore ب ج \perp على المستوى م ن ب



الزاوية الزوجية (الزاوية بين مستويين وقياسها) (Dihedral Angle)



عندما يتقاطع مستقيمان فإنهما يكونان أربع زوايا وكذلك

عندما يتقاطع مستويان فإنهما يكونان أربع زوايا تشكل المستويات

جوانبها مثلما تشكل المستقيمان أضلاع الزوايا المستوية. ويطلق

على كل زاوية بين مستويين بالزاوية الزوجية .

لاحظ الشكل المجاور يتقاطع المستويان س هـ ، ص هـ في م ب .

تسمى الزاوية الزوجية بأربع نقاط : نقطة على المستوى الأول ، ونقطتان تمثلان خط التقاطع ،

ونقطة على المستوى الثاني ، ففي الشكل المجاور تقرأ زوايا التقاطع الأربعة (ح ، م ب ، د) ،

(ح ، م ب ، و) ، (هـ ، م ب ، د) ، (هـ ، م ب ، و) .

تعريف

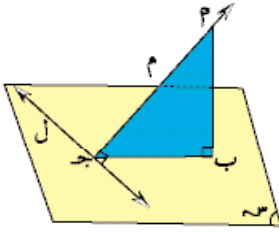
مسقط القطعة المستقيمة على مستوى عبارة عن قطعة مستقيمة محصورة بين موقعي العمودين النازلين من طرفي القطعة المستقيمة على المستوى π .

تدريب ٩

- (١) في الشكل السابق أيهما أطول القطعة المستقيمة P أم مسقطها P' ؟ برهن صحة رأيك.
- (٢) متى يكون طول المسقط يساوي طول القطعة الأصلية؟ لماذا؟
- (٣) متى يكون مسقط القطعة المستقيمة عبارة عن نقطة؟

نظرية ٥ :

إذا عامد مستقيم مائل مستقيماً في المستوى فإن مسقط المائل يعامد ذلك المستقيم.



المعطيات : \vec{l} مستقيم في المستوى π

\vec{m} مستقيم مائل على المستوى π ويعامد المستقيم l

المطلوب : إثبات أن مسقط \vec{m} على المستوى π يعامد \vec{l}

العمل : نزل من نقطة مثل P عمود على المستوى π

مثل P ، ونصل B ح التي تشكل مسقطاً للقطعة P ح

البرهان : المستقيم l يعامد \vec{m} (مُعطى)، المستقيم \vec{l} عمودي على P (لأن P عمودية على

المستوى π وبالتالي عمودية على كل مستقيم فيه).

$\therefore \vec{l}$ عمودي على المستوى π ب ج $\therefore l \perp B$ ج (وهو المطلوب)

عكس نظرية ٥ :

إذا رسم مستقيم مائل على مستوى وكان مسقطه على المستوى عمودياً على مستقيم

فيه كان هذا المستقيم المائل عمودياً على ذلك المستقيم.

تدريب ١٠

اكتب برهان عكس النظرية.

(٢) $\overline{ب ه} \perp \overline{أ ج}$ معطى

$\Delta ب ه أ$ قائم الزاوية في ه ، ويكون:

$$ب ه = \frac{1}{2} ب ه = ٥ سم \quad (\Delta ب ه أ مثلث ثلاثيني ستيني)$$

$\overline{ب ه} \perp \overline{أ ج}$:

$\overline{ب ه}$ عمودي على أي مستقيم في مستوى المثلث $\Delta ب ه أ$:

$\overline{ب ه} \perp \overline{ب ه}$:

$$\therefore \text{مم} (\hat{ب ه}) = ٩٠^\circ$$

$$\therefore (\hat{ب ه}) + (\hat{ب ه}) = (\hat{ب ه ه})$$

$$٥٠ = ٢٥ + ٢٥ =$$

$$\therefore \overline{ب ه} = \overline{ب ه} = ٥ \sqrt{٢} سم$$

(ب) $\overline{أ ج}$ خط تقاطع المستويين $\Delta ب ه أ$ ، $\Delta ب ه ه$ ،

$\overline{ب ه} \perp \overline{أ ج}$ (١)

$\overline{ب ه}$ مسقط $\overline{ب ه ه}$ على المستوى $\Delta ب ه أ$ ، $\overline{ب ه} \perp \overline{أ ج}$:

$\therefore \overline{ب ه} \perp \overline{أ ج}$ (٢) (عكس نظرية ه)

\therefore من (١) ، (٢) $\text{مم} (\hat{ب ه ه}) =$ قياس الزاوية الزوجية بين المستويين $\Delta ب ه أ$ ، $\Delta ب ه ه$.

$$\therefore \text{طا} \hat{ب ه ه} = \frac{ب ه ه}{ب ه} = \frac{٥}{٥} = ١$$

$\therefore \text{مم} (\hat{ب ه ه}) =$ قياس الزاوية الزوجية $= ٤٥^\circ$

تدريب ١٢

(٢) $\Delta ب ه أ$ مثلث فيه $(\hat{ب ه ه}) = ٣٠^\circ$ ، $ب ه = ١٠ \sqrt{٣}$ ، رسم من $\Delta ب ه ه$ على مستوى

المثلث $\Delta ب ه أ$ ، بحيث $ب ه = ٥ سم$ ، وأسقط من $\Delta ب ه ه$ على $\overline{أ ج}$:

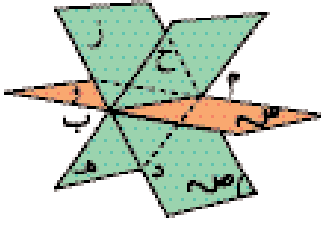
اثبت أن قياس الزاوية الزوجية بين المستويين $\Delta ب ه أ$ ، $\Delta ب ه ه$ يساوي ٣٠° .

(ب) م. $\Delta ب ه أ$ هرم ثلاثي رأسه م وقاعدته المثلث المتطابق الأضلاع $\Delta ب ه ه$ الذي طول ضلعه

$$\text{يساوي } ١٠ سم ، \text{مم} (\hat{ب ه ه}) = \text{مم} (\hat{ب ه ه}) = ٩٠^\circ ، م ب ه = ٥ سم ، د منتصف \overline{ب ه}$$

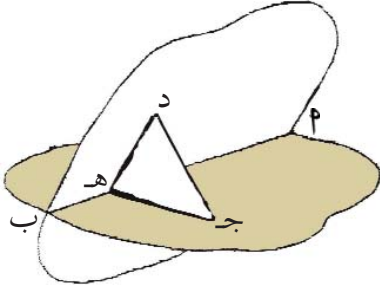
(١) اثبت أن $\overline{ب ه} \perp$ المستوى م د .

(٢) أوجد قياس الزاوية الزوجية بين المستويين م ب ه ، $\Delta ب ه أ$.



اكتب أسماء الزوايا الزوجية الناتجة من تقاطع المستويات π ، π' ، ع الموضحة بالشكل المجاور .

الزاوية المستوية لزاوية زوجية



إذا قطعت الزاوية الزوجية (ج، \vec{P} ، د) بالمستوى π العمودي على \vec{P} فإن π يقطع وجهي الزاوية الزوجية في \vec{h} ، \vec{d} والزاوية ج هـ د التي تتألف من هذين الشعاعين اللذين لهما نفس نقطة البداية هـ تسمى «زاوية مستوية» للزاوية الزوجية (ج، \vec{P} ، د).

لاحظ أن:

$$(١) \vec{h} \perp \vec{P}$$

$$(٢) \vec{d} \perp \vec{P}$$

(٣) جميع الزوايا المستوية للزاوية الزوجية تكون متساوية في القياس.

(٤) اصطلاح على اعتبار الزاوية التي قياسها $\geq 90^\circ$ عند البحث عن قياس الزاوية بين مستويين.

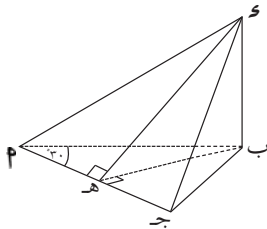
قياس الزاوية الزوجية :

هو قياس أية زاوية من زواياها المستوية.

مثال ٦

في الشكل:

ΔPAB فيه $\hat{P} = 30^\circ$ ، $PA = 10$ سم، $AB \perp$ مستوى ΔPAB ، $BS = 5$ سم، $BS \perp$ PA جـ .



أوجد :

(١) $\angle BPS$ ، $\angle PSB$.

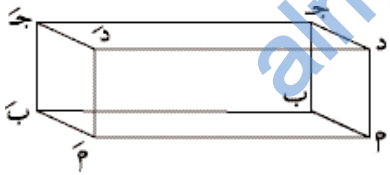
(٢) قياس الزاوية الزوجية بين المستويين π جـ، π سـ جـ

- (١) أ ب ح د ٢ ب ح د ٢ ب ح د مكعب طول ضلعه ٨ سم اختر ثلاثة حواف تمثل المحاور الإحداثية ثم أجب عما يلي :
- ٢ (أ) حدد إحداثيات رؤوس المكعب .
- ب (أوجد المسافة بين رأسين متقابلين في مستوى واحد من أوجه المكعب وتحقق من صحة الإجابة بالقياس .
- ح (أوجد المسافة بين رأسين لا يقعان في مستوى واحد من أوجه المكعب .
- (٢) إذا علمت بوجود كنز في منطقة مربعة ضلعها ٥ م وعلى عمق نصف متر فأجب عما يلي :
- ٢ (أ) هل تستطيع تحديد إحداثيات موقع الكنز ؟ لماذا ؟
- ب (إذا أردت أن تستخرج الكنز بأي إجراء مما يلي تقوم به مع التفسير ؟
- (١) اختيار إحدى المواقع والحفر فيه لعمق نصف متر (نقطة) .
- (٢) حفر خندقاً من أحد أطراف المنطقة إلى الطرف المقابل بعرض نصف متر وعمقه نصف متر (مستقيم) .
- (٣) حفر كامل المنطقة بعمق نصف متر (مستوى) .
- ج (اقترح إضافة معلومات تمكن الشخص من الوصول إلى الموقع مباشرة .
- (٣) وضع هرم رباعي ارتفاعه ١,٥ م وقاعدته مربع طول ضلعها ٢ م عند زاوية غرف بحيث انطبق ضلعان متجاوران منه مع خطي تقاطع جداري الغرفة مع مستوى الأرض، أوجد إحداثيات رؤوس الهرم على اعتبار أن خطوط تقاطع المستويات الثلاثة عند تلك الزاوية هي المحاور .
- (٤) من ظهر بناية رصد شخص قمة جبل فإذا كان إحداثيات موقع الراصد هي (١٠، ٢٥، ١٢) وإحداثيات قمة الجبل (١٠٠، ٢٥، ٢٥٠) فاحسب ما يلي :
- ٢ (أ) المسافة بين موقع الراصد وقمة الجبل .
- ب (زاوية ارتفاع قمة الجبل عند موقع الرصد .
- (٥) مظلة للسيارات طولها ٤,٨ م وعرضها ٦ أمتار وترتكز من جهة الطول على جدار ارتفاعه ٣,٥ م وتميل عن الأفق من الجدار الذي ترتكز عليه بزاوية ١٥° فإذا علم أن أشعة الشمس باتجاه رأسي فأجب عما يلي :
- ٢ (أ) حدد شكل ظل المظلة وأوجد أبعاده ومساحته .
- ب (أيهما أكبر مساحة سطح المظلة أم مساحة ظلها ؟ ولماذا ؟
- ح (ما البعد (الطول أم العرض) الذي يختلف في المظلة عنه في ظلها فسر إجابتك .
- د (هل يكفي ظل المظلة لاستيعاب سيارة طولها ٥ م ؟ كيف تتحقق ؟

تمارين ومسائل عامة

- (١) أجب بنعم أو لا لكل من الأسئلة التالية :
- ٢ () يمر بنقطة واحدة مستقيمان فقط .
- ب () أية أربع نقاط تحدد فراغاً .
- ح () المستقيم الموازي لمستوى لا يشترك معه في نقطة وحيدة .
- د () يستقر كرسي على أرض أفقية إذا كان له رجلان فقط .
- هـ () يوجد مستقيم وحيد يعامد مستقيم معطى عند نقطة عليه .
- و () أي ثلاثة مستقيمات متوازية يجمعها مستوى وحيد .
- ز () عدد المستويات التي يمكن أن تمر بعشرة نقاط تساوي (٣٠) .
- ح () طول مسقط قطعة مستقيمة على مستوى يوازي تلك القطعة يساوي طول القطعة .
- ط () يمكن رسم مستقيم يعامد كلاً من مستقيمين متخالفين .
- ي () إذا تعامد مستويان فإن كل مستقيم في المستوى الأول يعامد أي مستقيم في الآخر .

٢) حدد متى يمكن أن تشكل ثلاث قطع مستقيمة مستوى وحيد ثم برهن صحة كلامك .



٣) أوجد طول كل من \overline{AB} ، \overline{BC} ، \overline{CD} في المنشور القائم $ABCD-A'B'C'D'$ الذي أبعاده ١٢، ٤، ٣ سم، علماً بأن قاعدته مستطيل، ثم أوجد مساحة المثلث ABC .

٤) صنع هيكل مكعب باستخدام أسلاك تمثل الحواف فإذا كان طول أحد الحواف = ٣٠ سم فما طول السلك اللازم لصنع هيكل المكعب؟



٥) الشكل المقابل يمثل منزلاً، السقف على شكل مستويين بينهما زاوية قياسها 120° . مامساحة مسقط السقف على الأرض إذا كانت أبعاد كل جانب ١٠، ٢٥ م؟

الوحدة السادسة

الدوال

(Functions)

* الهدف من هذا *

- ١ تعرف مطلق العدد ودالة المطلق وتمثيلها بيانيا.
- ٢ تعرف صحيح العدد الحقيقي ودالة الصحيح وتمثيلها بيانيا.
- ٣ حل معادلات تحتوي على المطلق وأخرى تحتوي على صحيح العدد الحقيقي.
- ٤ تعرف معكوس الدالة وإيجادها.
- ٥ تعرف الدالة الأسية والدالة اللوغاريتمية وتمثيلها بيانيا.
- ٦ إجراء عمليات حسابية باستخدام اللوغاريتمات لأساس غير العدد عشرة.
- ٧ التحويل من الصيغة الأسية إلى الصيغة اللوغاريتمية.
- ٨ استخدام قوانين اللوغاريتمات.
- ٩ حل معادلات أسية وأخرى لوغاريتمية.
- ١٠ حل تطبيقات على الدوال الأسية واللوغاريتمية.

مطلق العدد

علمت سابقا أن القيمة المطلقة للعدد p تتمثل في المسافة التي تفصل بين العدد p عن نقطة الصفر على خط الأعداد أيا كان موقع العدد p على يمين الصفر أم على شماله ويرمز لها بالرمز $|p|$ لذلك فهي قيمة موجبة دائما.

تدريب ١

(١) ارسم خط الأعداد ثم مثل عليه الأعداد الآتية :

$$٣ ، ٢،٥ ، ١،٥- ، ٢-$$

(٢) أوجد القيمة المطلقة للأعداد السابقة .

مثال ١

$$\text{حل المعادلة } |س| = ٢ ، س \in \mathbb{C}$$

الحل

نبحث على خط الأعداد عن عدد حقيقي يبعد عن الصفر بمقدار وحدتين .



من الواضح أن العدد المطلوب هو ٢ أو ٢- .

$$\therefore \text{مجموعة الحل } \{٢، ٢-\}$$

مثال ٢

$$\text{أوجد مجموعة حل المعادلة } |٣-س| + ٤ = ٠$$

الحل

$$٠ = ٤ + |٣-س|$$

$$٤- = |٣-س|$$

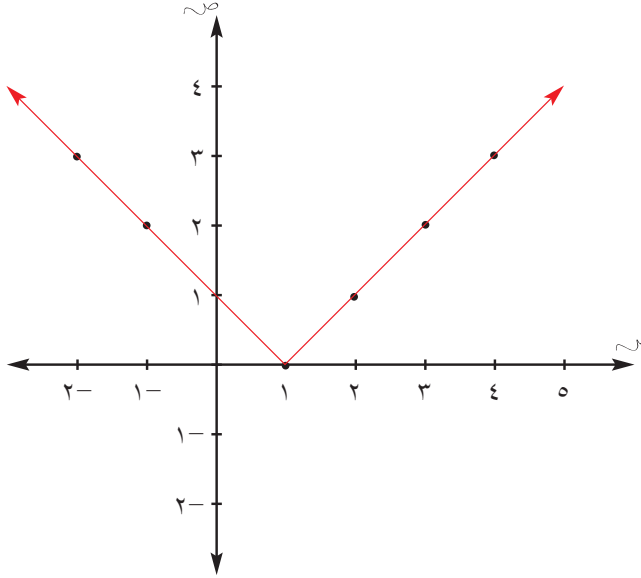
وهذا لا يتحقق لأي قيمة من قيم $س$ ، لماذا؟

$$\therefore \text{مجموعة الحل } = \emptyset$$

مثال ٣

مثل الدالة د(س) = |س - ١| ، س ∈ ح

الحل



د(س) = {س - ١ ، س ≤ ١
س + ١ ، س > ١}

نمثل د(س) = س - ١ ، س ≤ ١
نمثل د(س) = س + ١ ، س > ١

٤	٣	٢	س
٣	٢	١	د(س) = س - ١
٢-	١-	صفر	س
٣	٢	١	د(س) = س + ١

تدريب ٤

مثل الدوال الآتية:

د(س) = |س + ٤| ، د(س) = |س - ٤|

ثم بين العلاقة بينهما وبين الدالة د(س) = |س|

لاحظ ما يلي:

إذا كانت س = ٥ ⇔ ٥ = |س| ، ٥ = س = √س ⇔ ٥ = |س| ، ٥ = |س|

إذا كانت س = -٥ ⇔ ٥ = |س| ، ٥ = -س = √س ⇔ ٥ = |س| ، ٥ = |س|

إذا كانت س = -١٥ ⇔ ١٥ = |س| ، ١٥ = -س = √س ⇔ ١٥ = |س| ، ١٥ = |س|

هل تستطيع أن تجد علاقة بين √س ، |س| ، |س| ؟

تدريب ٥

إذا كانت ٧ = ٤ - س فما قيمة كل من √٢٤ ، |٤| ؟

نتيجة *

$$\sqrt{س} = |س| \quad \forall س \in \mathbb{R}$$

تدريب ٢

أوجد مجموعة الحل لكل مما يلي :

$$(١) \quad ١٨ = |٣س - ٤|$$

$$(٢) \quad ٨ = |٤ - ص|$$

$$(٣) \quad ١١ = |٤ - ٣س|$$

دالة المطلق

نشاط ١: التمثيل البياني لدالة المطلق

(١) ارسم مستوى الإحداثيات ثم مثل عليه بيان الدوال الآتية :

$$\text{د(س) = س ، س} \leq .$$

$$\text{د(س) = -س ، س} > .$$

(٢) حدد المجال ، المجال المقابل ، المدى للتمثيل البياني لـ د(س) في ١ .

(٣) اكتب ملاحظتك .

(٤) هل يمكنك كتابة دالة تجمع بين الدوال السابقة بحيث يكون لها نفس

التمثيل البياني .

تدريب ٣

مثل د(س) = |س| بيانيا على مستوى الإحداثيات ثم حدد المجال ، المجال المقابل ، والمدى

للدالة .

تعريف

تسمى الدالة التي تكتب بالصورة الآتية:

$$\text{د(س) = |س| = } \left. \begin{array}{l} \text{س ، س} \leq . \\ \text{-س ، س} > . \end{array} \right\}$$

ب دالة المطلق، حيث أن مجالها \leftarrow هو \mathbb{R} ، ومداه هو $[\cdot, \infty)$.

الخطوات:

- (١) ارسم خط الأعداد ثم مثل عليه الأعداد الآتية:
 $٠,٥$ ، $١,٥$ ، $١,٥-$ ، $٠,٧٥$ ، $٢,٥-$
- (٢) اكتب عددين صحيحين متتاليين يحصران كل عدد من الأعداد السابقة.
- (٣) إذا كان العدد الحقيقي s والعددان الصحيحان اللذان يحصرانه n ، $n + ١$ ، فاكتب عبارة جبرية (متباينة) تعبر عن العلاقة بينهما.

تدريب ١

مثل الأعداد الآتية على خط الأعداد: $٥,٣-$ ، $٧,٣$ ، $٣,٧$ ، $٣,٧$ ، $٣,٧$ ، ثم اكتب العلاقة التي تربط كلا من الأعداد السابقة بالعددين الصحيحين اللذين يحصرانه.

تعريف

إذا كانت s و n ، فإنه يوجد عدداً صحيحان متتاليان n ، $n + ١$ بحيث $n \geq s > n + ١$ ، ويسمى العدد n بصحيح العدد s ويرمز له بالرمز $[s]$ ويقرأ «صحيح العدد s »، ويساوي أكبر عدد صحيح أصغر من أو يساوي العدد s .

مثال ١

اكتب صحيح العدد لكل مما يلي:
 $[٢\frac{1}{3}]$ ، $[٣-]$ ، $[٢\sqrt{7}]$

الحل

لإيجاد صحيح $٢\frac{1}{3}$
 $٢ \leq ٢\frac{1}{3} < ٣$ ∴ $[٢\frac{1}{3}] = ٢$
 وكذلك: $[٣-] = ٣-$
 $[٢\sqrt{7}] = ١$

تدريب ٢

اكتب قيمة كل مما يلي:
 $[٥]$ ، $[٥-]$ ، $[٣-]$ ، $[٥]$ ، $[٦,٥-]$

مثال ٤

أوجد مجموعة حل المتباينة $٤ > س > ٢ \geq ٩$.

(١) إذا كان $س \leq ٩$.

(٢) إذا كان $س > ٢$.

الحل

$$\therefore ٩ \geq ٢ > س > ٤$$

$$\sqrt{٩} \geq |س| > \sqrt{٤}$$

$$\therefore ٣ \geq |س| > ٢$$

(١) إذا كان $س \leq ٣$ ، فإن $|س| = س$ ،

ويكون $٢ > س \geq ٣$

\therefore مجموعة الحل = $[٣، ٢[$

(٢) إذا كان $س > ٣$ ، فإن $|س| = -س$

ويكون $٢ > -س \geq ٣$

أي أن $٢- < س \leq ٣-$

\therefore مجموعة الحل = $]٢-، ٣-]$

تدريب ٦

أوجد مجموعة الحل للمتباينة الآتية:

$$س + ٢ \geq ١٤$$

دالة الصحيح Greatest Integer Function

$$د(س) = [س]$$

باسترجاع تعريف صحيح العدد الحقيقي، نجد أن:

$$س \in [٢, ٣) \Leftrightarrow د(س) = [س] = ٢ \text{ حيث د دالة ثابتة في الفترة.}$$

$$س \in [١, ٢) \Leftrightarrow د(س) = [س] = ١ \text{ حيث د دالة ثابتة في الفترة.}$$

$$س \in [٠, ١) \Leftrightarrow د(س) = [س] = ٠ \text{ حيث د دالة ثابتة في الفترة.}$$

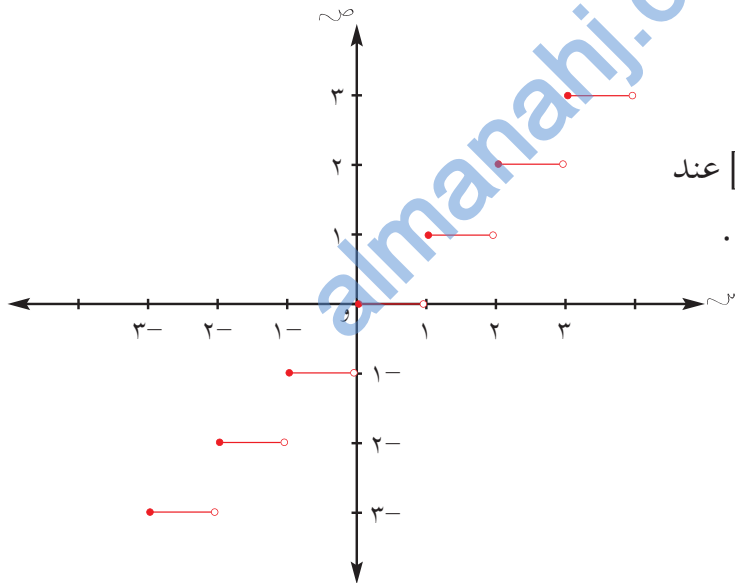
$$س \in [١-, ٠) \Leftrightarrow د(س) = [س] = ١- \text{ حيث د دالة ثابتة في الفترة.}$$

$$س \in [٢-, ١-) \Leftrightarrow د(س) = [س] = ٢- \text{ حيث د دالة ثابتة في الفترة.}$$

$$س \in [٣-, ٢-) \Leftrightarrow د(س) = [س] = ٣- \text{ حيث د دالة ثابتة في الفترة.}$$

وبذلك يتكون بيان الدالة $د(س) = [س]$ من قطع مستقيمة تنتهي بنقطة انفصال كل منها توازي

محور السينات كما في الشكل



* سؤال:

استخدم الرسم لإيجاد قيمة $[س]$ عند

$$س = ١,٥ ، ٢,٥ ، ١-, ١-$$

مثال ١

تتقاضى شركة اتصالات مبلغ ٣٦ بيسه في المكالمة الداخلية لوحدة الزمن التي تقترب من الدقيقة ولا تبلغها، على أن تحسب كل ربع هذه الفترة، فاكتب المعادلة الرياضية التي تعبر عن هذه العلاقة.

الحل

$$د(س) = ٩ [٤س + ١]$$

مثال ٢

أوجد مجموعة حل المعادلة: $2 = [س]$

الحل

$$[س] = 2 \Leftrightarrow 2 \geq س > 3$$

∴ مجموعة الحل = $[2, 3]$

مثال ٣

أوجد مجموعة حل المعادلة: $8- = [١-س٢]$

الحل

$$8- = [١-س٢] \Leftrightarrow 8- \geq ١-س٢ > ٧-$$
$$\Leftrightarrow ٧- \geq ١-س٢ > ٦- \quad (\text{لماذا؟})$$
$$\Leftrightarrow ٣- > س \geq \frac{٧}{٢}- \Leftrightarrow$$

∴ مجموعة الحل $[\frac{٧}{٢}-, ٣-]$

تدريب ٣

٢) أوجد قيمة كل مما يلي عندما $س = \frac{٣-}{٢}$

$$[٢س], [٣-١س]$$

ب) أوجد مجموعة الحل لكل مما يلي:

$$(١) [٣+س] = ٤ \quad (٢) [٥+س٢] = ٠$$

ج) تتقاضى مصلحة البريد رسماً بدل نقل الرسائل وفق التسعيرة التالية :

٠ < س ≤ ٥ غم بسعر ١٠٠ بيسه كما تتقاضى ٥٠ بيسة إضافية عن كل ٣ غرامات أو أقل

فما تكلفة إرسال رسالة زنتها : ١,٥ غم ، ٤ غرامات ، ٧,٥ غرام ، ١٥,١ غم .

أولاً: أوجد قيمة كل مما يأتي عندما $s = -5$:

$$\begin{aligned} (1) & |3s| & (2) & |s - 4| & (3) & |s| - |s| & (4) & |s|^2 \\ (5) & |2s + 7| - |s| & (6) & [2 + 10s] & (7) & [3s + 11] & (8) & [4s - 1] \end{aligned}$$

ثانياً: اكتب كلا مما يأتي باستخدام المطلق:

$$(1) \quad s = 7 \text{ و } s = -7$$

$$(2) \quad 8 > v > 8$$

$$(3) \quad e > -3 \text{ أو } e < 3$$

ثالثاً: أوجد مجموعة حل كل مما يأتي حيث $s, v \in \mathbb{R}$:

$$(1) \quad |s + 3| = 4 \quad (2) \quad |v - 4| = 7$$

$$(3) \quad |4 - 3s| = 18 \quad (4) \quad |s - 4| = 3$$

$$(5) \quad |2s - 3| = 0 \quad (6) \quad |s + 1| + 4 = 0$$

$$(7) \quad |8 - v| = 24 \quad (8) \quad |s + 1| \geq 4$$

$$(9) \quad |3 + s| < 5 \quad (10) \quad |2v - 9| \geq 27$$

$$(11) \quad |3(s + 4)| \leq 48 \quad (12) \quad |s| = -s$$

$$(13) \quad |2s - 1| = -5 \quad (14) \quad 0 = [2s + 5]$$

رابعاً: ارسم كلا من الدوال الآتية:

$$(1) \quad \left. \begin{aligned} |s| < 1, \\ |s| > 1 \end{aligned} \right\} = \text{ل (س)}$$

$$(2) \quad \text{د (س)} = \frac{|s|}{s}, \quad s \neq 0$$

$$(3) \quad \left. \begin{aligned} 1 + s^2 > 1, \\ \frac{1}{s} < 1 \end{aligned} \right\} = \text{ق (س)}$$

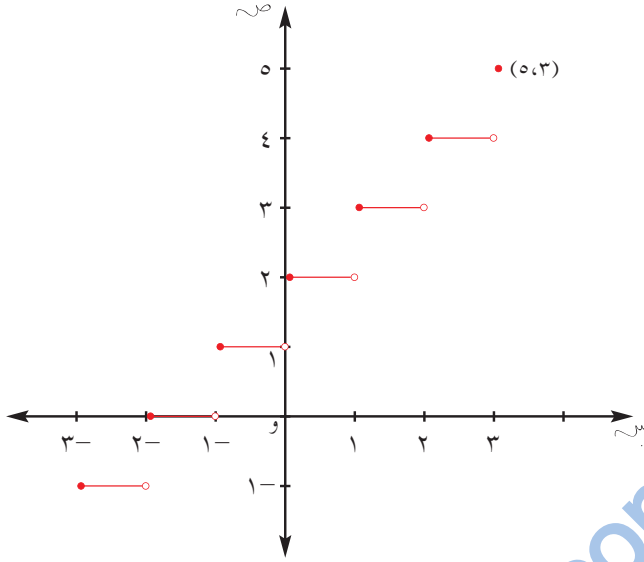
$$(4) \quad \text{د (س)} = \left. \begin{aligned} \frac{s-2}{s-5} > 2, \\ s = 2 \end{aligned} \right\}$$

مثال ٢

ارسم بيان الدالة

ت (س) = [س + ٢] ، $3- \geq س \geq 3$.

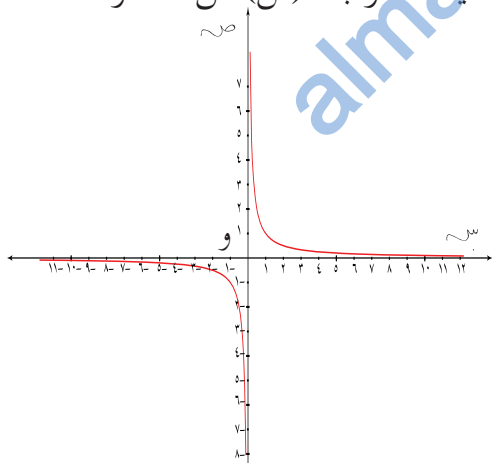
الحل



[س + ٢]	س
١-	$3- > س \geq 2-$
٠	$2- > س \geq 1-$
١	$1- > س \geq 0$
٢	$0 > س \geq 1-$
٣	$1 > س \geq ٠$
٤	$2 > س \geq ١$
٥	$س = ٣$

الدالة د(س) = $\frac{1}{س}$

واضح أن مجال د هو $\{0\}$ - (لماذا؟) ولرسم بيان هذه الدالة ينبغي أن نأخذ الحالتين الآتيتين:
 (أ) إذا كان $س < ٠$ ، فإن: د(س) تكون موجبة دائماً، حيث تقترب د(س) من الصفر.



س	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	١	٢	٣	٤
د(س)	٤	٣	٢	١	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$

(ب) إذا كان $س > ٠$ ، فإن: د(س) تكون سالبة دائماً.

س	١-	٢-	٣-	٤-	٥-	٦-	٧-	٨-
د(س)	١-	$\frac{1}{2}$ -	$\frac{1}{3}$ -	$\frac{1}{4}$ -	$\frac{1}{5}$ -	$\frac{1}{6}$ -	$\frac{1}{7}$ -	$\frac{1}{8}$ -

من خلال التمثيل البياني للدالة د(س) = $\frac{1}{س}$ لاحظ قيمة د(س) في كل مما يلي:

- (١) عندما تقترب س من الصفر
- (٢) عندما تقترب س من ∞ .
- (٣) عندما تقترب س من ∞^- .

الدالة العكسية Reverse Function

مثال ١

أراد أحد المهندسين عمل خزان ماء رئيسي للقريبة على شكل مكعب حجمه ٢١٦ م^٣. ما طول حرف خزان الماء؟.

الحل

نفرض أن حجم المكعب ح وطول الحرف س

$$(1) \quad \begin{aligned} \text{ح} &= \text{س}^3 \\ \sqrt[3]{\text{ح}} &= \text{س} \end{aligned}$$

$\sqrt[3]{\text{ح}} = \text{س}$ ومنها

$$(2) \quad \text{س} = \sqrt[3]{\text{ح}}$$

تناقش مع زملائك في إيجاد العلاقة بين الدالة (١) والدالة (٢)
تأمل الشكل التالي وسجل ملاحظاتك:



في الشكل أعلاه الدالتان د(س)، هـ(س) كل منها دالة عكسية للأخرى.

مثال ٢

أوجد الدالة العكسية للدالة د(س) = ١٠ - ٥س

الحل

$$\text{ضع } \text{ص} = ١٠ - ٥\text{س}$$

بادل س مع ص

$$\therefore \text{س} = ١٠ - \text{ص}$$

عين ص بدلالة س

$$\Rightarrow \text{معكوس الدالة د(س)} = \frac{٥ + \text{س}}{١٠} = \text{ص}$$

ويكتب معكوس الدالة د(س) بالصورة د^{-١}(س) = $\frac{٥ + \text{س}}{١٠}$

الدالة المحايدة Identity Function

تدريب ١

أنقل الجدول في دفترك ثم أكمله بما يناسب:

٣	٢	١	٠	١-	٢-	٣-	س
							د(س) = ٢س + ١
							ق(س) = س

- قارن بين د(س)، ق(س)، اكتب ملاحظاتك؟

- ما قيمة ق(٢)؟

تعريف

يقال للدالة د أنها محايدة إذا كان \forall س \in مجال الدالة د يكون د(س) = س أي: إذا كانت صورة أي عنصر في الدالة د هو العنصر نفسه.

مثال ١

إذا كان د(س) = ٢س + ٣، ه(س) = $\frac{1}{4}(س - ٣)$ برهن أن كلا من ده، هه دالة محايدة.

الحل

$$د(ده(س)) = ده(ه(س))$$

$$د\left(\frac{1}{4}(س - ٣)\right) =$$

$$= ٣ + \left(\frac{1}{4}(س - ٣)\right) \cdot ٢ =$$

$$س =$$

$$ده(ده(س)) = ه(ه(س)) = ه(٣ + ٢س) =$$

$$= \frac{1}{4}[٣ - (٣ + ٢س)] =$$

$$س =$$

دهه دالة محايدة، هه دالة محايدة.

تدريب ٢

إذا كانت د(س) دالة محايدة مجالها ط فأوجد قيمة كل مما يلي:

د(٠)، د(٢)، د(٣)، د(١٠)، د(٢٠)

تدريب ١

عين معكوس الدالة د (س) = ١٦ س ٤

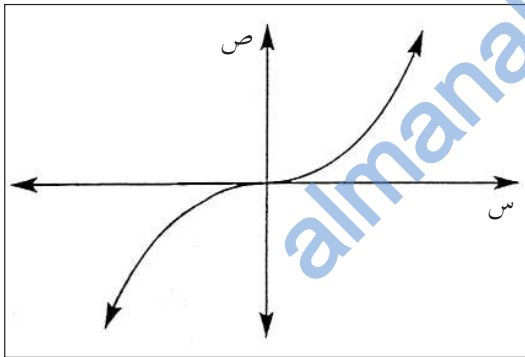
نشاط ١: بالتعاون مع زميلك أكمل الجدول التالي في دفترك:

المعكوس لا يمثل دالة	المعكوس يمثل دالة	معكوس الدالة	ليس تناظر واحد لواحد	تناظر واحد لواحد	الدالة
	✓	د ^{-١} (س) = ٨ - س		✓	د (س) = ٨ + س
					هـ (س) = ٥ - س
					ك (س) = ٣ س
					ل (س) = ١ - س ٥ + ٢ س

- ناقش الجدول بعد إكماله مع زميلك.
- ماذا تستنتج؟

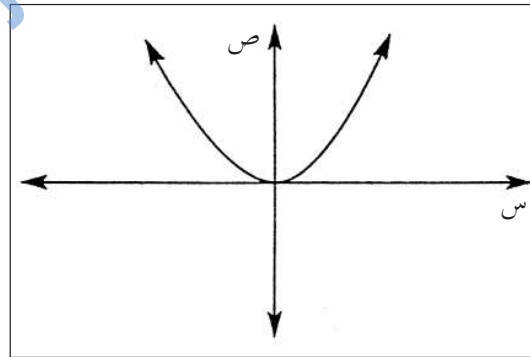
مثال ٤

لأي من الدوال الممثلة في الأشكال التالية توجد دالة عكسية:



هـ: ح ← ح

شكل (٢)



د: ح ← ح

شكل (١)

الحل

من شكل (١)

المدى = ح⁺ ≠ المجال المقابل

د ليست شاملة.

لا توجد دالة عكسية لـ د (أو معكوس الدالة د ليس دالة)

للتحقق من صحة الحل

جد:

$$د^{-1}(س) = \frac{س + ٥}{١٠} - ٥ = س$$

وكذلك

$$د^{-1}(د(س)) = \frac{٥ + (٥ - س١٠)}{١٠} = س$$

∴ د(د⁻¹(س)) = د⁻¹(د(س)) ∴ د⁻¹(س) دالة عكسية للدالة د(س)

مثال ٣

إذا كانت د(س) = ٢س + ٣ أوجد ما يلي:

(١) د⁻¹(س) (٢) د٥ د⁻¹(س) ، د⁻¹(٥) د(س) ماذا تلاحظ؟

الحل

$$∴ د(س) = ٢س + ٣$$

$$ص = ٢س + ٣$$

(تبديل المتغيرات)

$$س = ٢ص + ٣$$

$$س - ٢ص = ٣$$

$$\frac{س - ٣}{٢} = ص$$

$$∴ د^{-1}(س) = \frac{س - ٣}{٢}$$

$$د٥ د^{-1}(س) = د^{-1}(د(س)) = د^{-1}(٢س + ٣) = \frac{٢س + ٣ - ٣}{٢} = س = الدالة المحايدة$$

$$د^{-1}(٥) د(س) = د(د^{-1}(٥)) = د\left(\frac{٥ - ٣}{٢}\right) = ٢\left(\frac{٥ - ٣}{٢}\right) + ٣ = ٥ = الدالة المحايدة$$

نلاحظ أن: د⁻¹(٥) د(س) دالة محايدة، د٥ د⁻¹(س) دالة محايدة.

تعريف

لتكن الدالة د تناظراً واحداً لواحد.

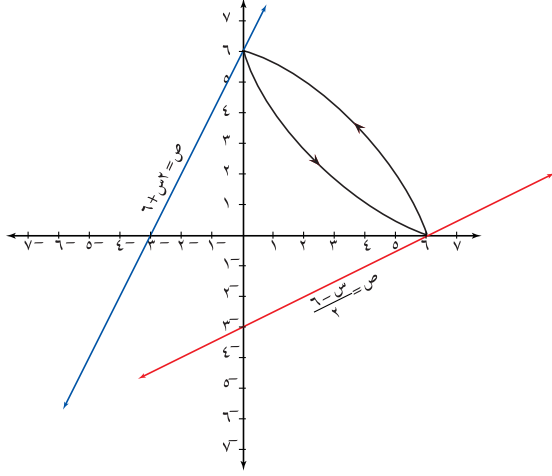
يقال إن الدالة ه هي الدالة العكسية للدالة د إذا كان:

$$د(ه(س)) = س$$

$$ه(د(س)) = س$$

مثال ٥

ارسم منحنى الدالة $v = \frac{6-s}{2}$ والدالة العكسية. ثم اكتب معادلة معكوس الدالة.



الحل

- ارسم الدالة الأصلية $v = \frac{6-s}{2}$

- جد عدة نقاط في المنحنى مثلاً

$$(0, 3), (3, 0), (6, 0)$$

- اعكس ترتيب الإحداثيات في النقاط السابقة.

$$(0, 3) \leftrightarrow (3, 0)$$

$$(3, 0) \leftrightarrow (0, 3)$$

$$(6, 0) \leftrightarrow (0, 6)$$

- مثل النقاط التي حصلت عليها في المستوى الإحداثي وصل بينها بخط مستقيم يمثل منحنى

$$v = \frac{6-s}{2}$$

- لكتابة معادلة الدالة العكسية جد الميل والجزء المقطوع من محور الصادات، حيث الميل

هنا يساوي ٢ (لماذا؟) والجزء المقطوع من محور الصادات يساوي ٦.

$$\therefore \text{المعادلة هي } v = 2s + 6$$

اكتب معادلة المعكوس بطريقة أخرى.

مثال ٦

إذا كانت الدالة $v = 2s + 3$ فاوجد:

- معكوس الدالة $v = 2s + 3$.

مثل الدالة $v = 2s + 3$ ومعكوسها بيانياً:

- هل المعكوس يمثل دالة؟

الحل

$$\therefore v = 2s + 3$$

$$v = 2s + 3$$

$$v - 3 = 2s$$

$$s = \frac{v-3}{2}$$

$$\therefore \text{معكوس الدالة } v = 2s + 3 \text{ هو } s = \frac{v-3}{2}$$

نلاحظ من الرسم أن $s = \frac{v-3}{2}$ ليست دالة (باستخدام اختبار الخط الرأسى)

من شكل (٢)

الدالة هـ واحد لواحد (باستخدام اختبار الخط الأفقي)

المدى = ح = المجال المقابل

الدالة هـ شاملة

هـ تناظر واحد لواحد

يوجد دالة عكسية لـ هـ

تعريف

لتكن د: $S \rightarrow T$ به تناظرا واحد لواحد. لذلك توجد دالة من T إلى S يرمز لها بالرمز d^{-1} بحيث $d^{-1}(b) = a \Leftrightarrow d(a) = b$ لكل $b \in T$.
تسمى الدالة d^{-1} : به $\leftarrow S$ الدالة العكسية للدالة د: $S \rightarrow T$

تدريب ٢

ارسم بيان الدالة $v = 2s + 4$ ثم بين من خلال الرسم ما إذا كان معكوسها يمثل دالة أم لا.

تدريب ٣

تحقق من أن الدالتين الواردتين في مثال ١ كل منهما دالة عكسية للأخرى.

نشاط ١: «التمثيل البياني للدالة العكسية»

الخطوات:

- ١) ارسم منحنى الدالة $d(s) = 2s - 8$
- ٢) ارسم منحنى الدالة $d^{-1}(s) = \frac{s+8}{2}$ على نفس المستوى الإحداثي.
- ٣) اكتب ثلاث نقاط تقع على منحنى $d(s)$
- ٤) اعكس إحداثيي كل نقطة (ضع الإحداثي السيني مكان الإحداثي الصادي والعكس) من النقاط التي اخترتها.
- ٥) مثل النقاط التي حصلت عليها على نفس المستوى الإحداثي.
- ٦) ارسم المستقيم $q(s) = s$
- ٧) صل كل نقطة بصورتها مثلا $(4, 0)$ ، $(0, 4)$ هل هذا الخط عمودي على منحنى الدالة q ؟
- ٨) ما علاقة منحنى كل من الدالتين d ، d^{-1} بالدالة q ؟

١) بين فيما يلي ما إذا كانت د(س)، هـ(س) دالة عكسية للأخرى:

٢) اكتب معكوس كل من الدوال التالية، ثم ارسم الدالة ومعكوسها في نفس المستوى الإحداثي.

٣) اكتب معكوس كل من الدوال التالية، ثم ارسم الدالة ومعكوسها في نفس المستوى الإحداثي.

٤) ارسم المنحنيات التالية ومعكوساتها في ورق مربعات وبين إن كانت المعكوسات تشكل دوالاً أم لا. ثم اكتب معادلة كل منحنى ومعادلة المعكوس.

١) د(س) = $\frac{6 + 2s^2}{8}$ ، هـ(س) = $\sqrt{3 - 4s}$ ، س $\leq \frac{3}{4}$

٢) د(س) = $28s^3$ ، هـ(س) = $\frac{1}{3s^2}$ ، س $\neq 0$

٣) د(س) = $\frac{1+s}{3}$ ، هـ(س) = $2 - \frac{3}{4}s$

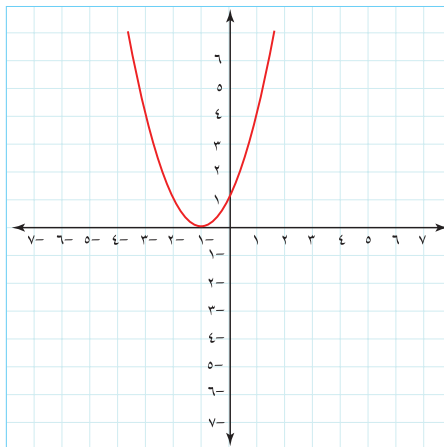
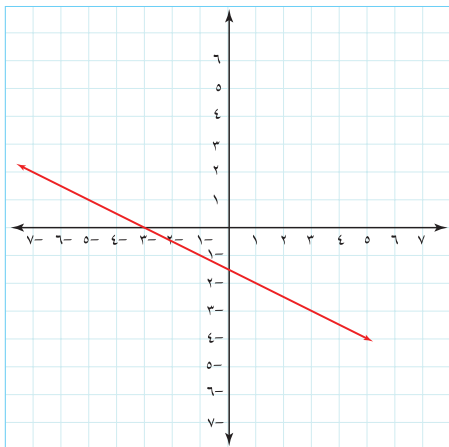
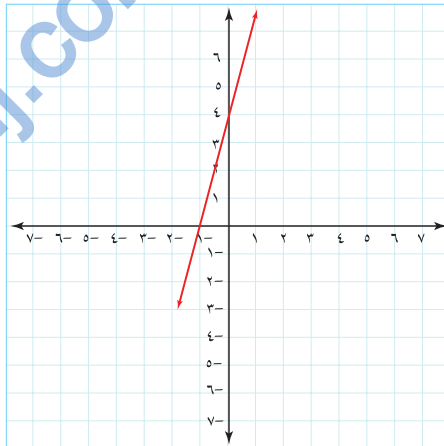
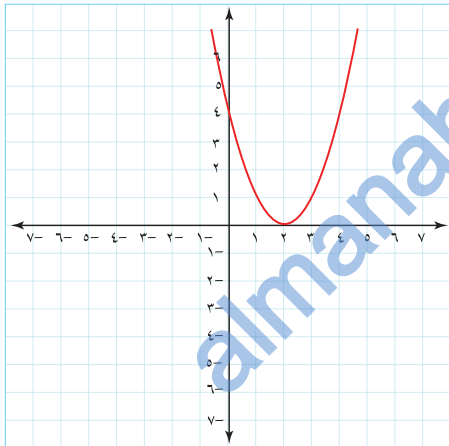
٤) د(س) = $\frac{1}{s^2}$ ، هـ(س) = $5s + 3$

٥) د(س) = $3 + (2 - s)^2$ ، هـ(س) = $4 - 2s$

٦) د(س) = $4 - 2s$ ، هـ(س) = $3 + (2 - s)^2$

٧) د(س) = $3 + (2 - s)^2$ ، هـ(س) = $4 - 2s$

٨) د(س) = $4 - 2s$ ، هـ(س) = $3 + (2 - s)^2$



(٢) تحقق من أن الدالة $f(x) = 4x^2$ حيث $x \leq 0$ تناظر واحد لواحد وأوجد:

د^{-١}(س)

مثل الدالة $f(x)$ والدالة $f^{-1}(x)$ يانيا.

(ب) اكتب معكوس الدالة $f(x) = 2x + 2$ حيث $x \geq 0$.

هل المعكوس يمثل دالة؟

almanahj.com/om

إذا علمت أن خلايا البكتيريا تتضاعف كل ساعة . فصمم جدولاً توضح فيه زمن الإنقسام وعدد الخلايا المناظرة لها في الساعة الأولى ، الثانية ، ... ، ن وذلك بافتراض أن العدد الابتدائي للخلايا هي (١٠٠ خلية) ، ثم مثل الدالة بيانياً موضحاً العلاقة بين الزمن وعدد الخلايا .

تعريف

تسمى الدالة التي يكون المتغير فيها أساً بالدالة الأسية وتكتب :

$$ص = ح \cdot ٢.٠^س$$

العدد الأصلي \swarrow \searrow الفترة الزمنية
 ح \searrow \swarrow عامل الزيادة أو النقصان
 حيث $٢.٠ < ٢.٠$ ، $س \in ح$

مثال ١

تستفيد الدول من إجراءات التعداد السكاني، فإذا علمت أن عدد سكان إحدى الدول يُقدر بـ ٢٤ مليون نسمة في عام ١٩٩٠م وكان المتوقع زيادة سكانية بمعدل ٢,٨٪ خلال العقد الواحد (١٠ سنوات) .

كم يكون عدد السكان المتوقع في :

(أ) عام ٢٠٠٠

(ب) عام ٢٠٢٥

الحل

يمكن التعبير عن زيادة عدد السكان بدالة أسية على الصورة $د(س) = م(٢.٠)^ن$ حيث م عدد السكان الحالي، ٢ معدل الزيادة ، ن الفترة الزمنية بالعقود .

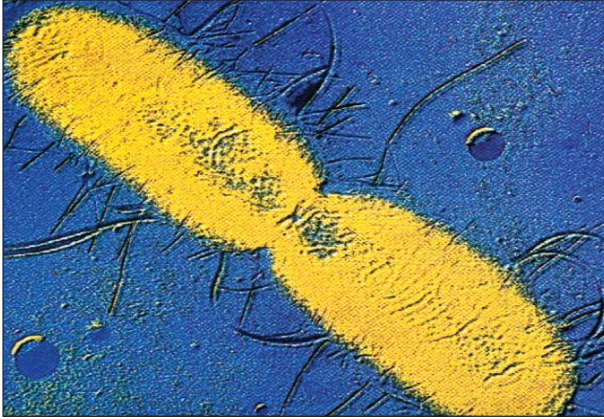
$$د(١) = (١) = ٢٤٠٠٠٠٠٠ \times (١,٠٢٨)^١ = ٢٤٦٧٢٠٠٠ \text{ مليون}$$

(فسر كيف تم الحصول على ١,٠٢٨)

$$د(٣) = (٣,٥) = ٢٤٠٠٠٠٠٠ \times (١,٠٢٨)^{٣,٥} = ٢٦٤٣٥٤٧٧$$

(فسر كيف تم الحصول على ٣,٥ ؟)

الدالة الأسية Exponential Function



خنجرية بكتيرية فغلي لحنجرية بكتيرية من النمط الهلالي

تمهيد :

معظم الخلايا البكتيرية تتكاثر بالإنشطار الثنائي، أي أن كل خلية تتضاعف حيث :
تتكاثر الخلية الواحدة لتنتج خليتين بعد فترة زمنية محددة وبعدها إلى أربع خلايا ، ثمان ، ... الخ .

– ما عدد الخلايا التي تنتجها ١٨ خلية في انقسامها الأول ؟

– ما عدد الخلايا التي تنتجها في الانقسام الثاني ، الثالث ، ... ، الثامن ؟

– ما عدد الخلايا التي تنتجها بعد ن من الزمن ؟

نشاط ١ : «الدالة الأسية»

الأدوات : آلة حاسبة ، ورقة وقلم .

الخطوات :

(١) انقل الجدول التالي في دفترك ثم أكمله على اعتبار أن فترة الانقسام هي ساعة واحدة وعدد خلايا البكتيريا الابتدائية ٢٥ خلية .

الزمن (بالساعات)	٠	١	٢	٣	٤	ن
عدد الخلايا	$25(2)^0$	$25(2)^1$	$25(2)^2$

(٢) اكتب عبارة جبرية توضح عدد خلايا البكتيريا بعد (ن) من الساعات .

(٣) عبّر عن عدد الخلايا بعد ١٠ ساعات ، ٢٠ ساعة ، ١٠٠ ساعة بمقدار جبري .

(٤) لاحظ النمط الذي تتكاثر به الخلايا ، هل العلاقة التي تربط بين الزمن وعدد الخلايا تمثل دالة . ماذا نسمي هذه الدالة ؟

ارسم منحنى الدالة $q(s) = (2)^s$ على مستوى الإحداثيات، ثم أوجد صورة المنحنى تحت تأثير انعكاس في الإحداثي الصادي.

* نتيجة

- (١) إذا كانت $q(s) = (2)^s$ ، $2 < 0$ ، فإن انعكاس هذه الدالة في المحور الصادي لمستوى الإحداثيات هي الدالة $l(s) = (2)^{-s} = (\frac{1}{2})^s$
- (٢) مجال الدالة q هو \mathbb{R}
- (٣) مدى الدالة q هو \mathbb{R}^+ ما عدا الصفر
- (٤) الدالة q متزايدة عندما $2 < 1$ ، ومتناقصة $2 > 0$
- (٥) منحنى الدالة q يقطع المحور الصادي عند النقطة $(0, 1)$

مثال ٢

حل كلا من المعادلات الأسية التالية:

$$(أ) \quad 2^x = 1 + 2^x$$

$$(ب) \quad 36 = 6^k \quad \text{إذا علمت أن } k = \sqrt{4s + 5} - \sqrt{2s - 1}$$

الحل

$$(أ) \quad 2^x = 1 + 2^x \quad \therefore 0 = 1$$

$$\therefore 2^x = 1 + 2^x$$

$$\frac{0}{2} = |1 + 2^x| \iff 0 = |1 + 2^x|$$

$$\frac{0}{2} = 1 + 2^x \quad \text{أو} \quad \frac{0}{2} = 1 + 2^x$$

$$\frac{7}{2} = 2^x \quad \therefore \frac{3}{2} = 2^x$$

$$\frac{7}{4} = 2^x \quad \therefore \frac{3}{4} = 2^x$$

\therefore مجموعة الحل هي: $\{\frac{7}{4}, \frac{3}{4}\}$

(٢) متوازي مستطيلات أبعاده ٢ ، ٣ ، $(\frac{1}{3})^3$

(١) اكتب الحجم بدلالة المتغير س

(٢) اكتب الحجم بعد مضاعفة المتغير س ، وضح هل زاد الحجم أم نقص ؟

ب) إذا علمت أن الدالة الخطية تكتب في الصورة د (س) = P س + ج ، والدالة الأسية تكتب

في الصورة د (س) = P^S حيث P عدد حقيقي

فما الفرق بين الدالتين من حيث شكل المنحني (ضع $P = 2$ مثلاً) .

نشاط ١: «رسم الدالة الأسية»

الأدوات : ورقة وقلم، ورق رسم بياني

الخطوات:

(١) كوّن جدولاً في دفترك كالتالي:

س	٣-	٢-	١-	٠	١	٢	٣
2^s	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	*	*	*	*	*

(٢) اكتب قيم س، 2^s في صورة أزواج مرتبة (س، 2^s).

(٣) مثل الأزواج المرتبة على مستوى الإحداثيات ثم صل النقاط بخط.

(٤) ما العلاقة بين س، 2^s ؟ اكتب ملاحظتك.

(٥) من الخطوة ٢ أوجد صورة كل نقطة تحت تأثير انعكاس في المحور الصادي

لمستوى الإحداثيات.

(٦) كرر الخطوة ٣.

(٧) ما العلاقة بين المنحني 2^s والمنحني الذي حصلت عليه؟

(٨) اكتب قاعدة المنحني الجديد.

(٩) ما نقطة تقاطع المنحنيين؟

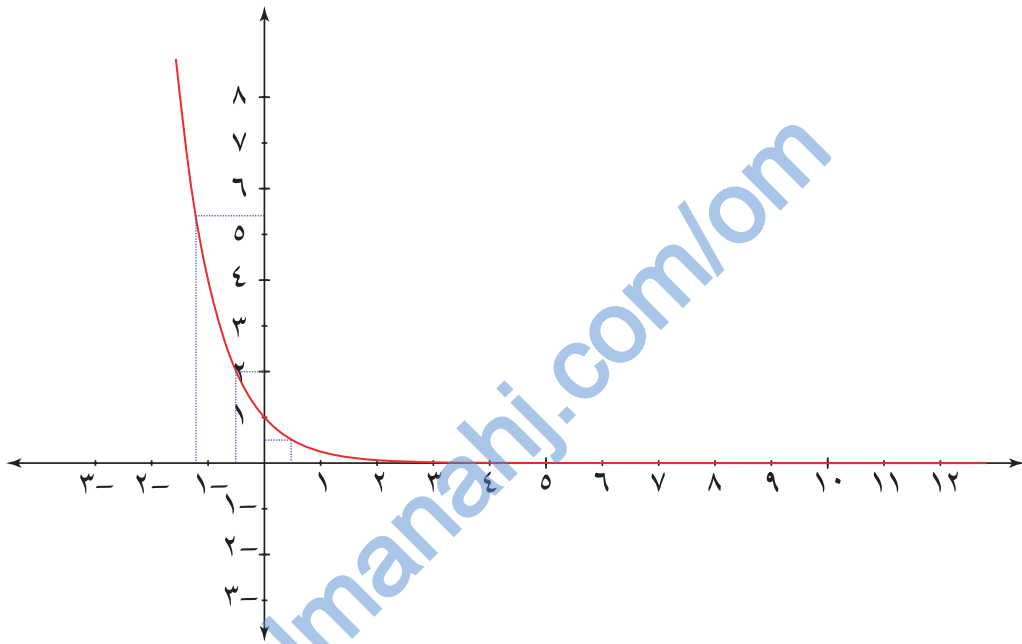
مثال ٣

مثل بيانياً الدالة $f(x) = \sqrt[3]{x}$ حيث $x \in [-1, 3]$ ومن الرسم أوجد $f\left(\frac{1}{8}\right)$ ،
 $f\left(\frac{1}{27}\right)$ ثم أوجد قيمة x عندما $f(x) = 5, 3$

الحل

كون الجدول الآتي :

٣	٢	١	٠	-١	س
$\frac{1}{64}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{4}$	١	٤	د(س)



$$\begin{aligned} \frac{1}{8} &= \sqrt[3]{\frac{1}{8}} = \sqrt[3]{\left(\frac{1}{2}\right)^3} = \left(\frac{1}{2}\right) \text{ ويمكن التحقق د } \left(\frac{1}{8}\right) = 0,5 \\ \frac{1}{27} &= \sqrt[3]{\frac{1}{27}} = \sqrt[3]{\left(\frac{1}{3}\right)^3} = \left(\frac{1}{3}\right) \text{ ويمكن التحقق د } \left(\frac{1}{27}\right) = 0,3 \\ \end{aligned}$$

عندما $f(x) = 5, 3$ $x = 125, 27$

تدريب ٥

مثل بيانياً منحنى الدالة $f(x) = \sqrt[3]{x}$ في الفترة $[-2, 3]$

ومن الرسم أوجد قيمة :

أ) $f(8)$ ، $f(-1)$ ، $f\left(\frac{1}{8}\right)$

ب) x إذا كان $f(x) = 5, 3$

$$(ب) \quad 36 = 6^2 \text{ إذا علمت أن } \sqrt{4s+5} - \sqrt{2s-1} = 6$$

$$6 = 2^3 \iff 6 = 2^3$$

$$\therefore \sqrt{4s+5} - \sqrt{2s-1} = 2$$

$$\therefore \sqrt{4s+5} + 2 = \sqrt{2s-1} \text{ بتربيع الطرفين نحصل على}$$

$$4s+5 + 4 + 4\sqrt{4s+5} = 2s-1 + 4\sqrt{2s-1} + 1$$

$$4s+8 + 4\sqrt{4s+5} = 2s+3 + 4\sqrt{2s-1}$$

$$2s+5 = 2 + \sqrt{2s-1}$$

$$\text{بتربيع الطرفين} \quad 2 = \sqrt{2s-1} + 1$$

$$2s+5 = 1 + 2 + \sqrt{2s-1}$$

$$2s+5 = 3 + \sqrt{2s-1}$$

$$2s+2 = \sqrt{2s-1} \iff 0 = 6 + s - 2s^2$$

\therefore مجموعة الحل هي $\{1, 5\}$ تحقق من الإجابة.

تدريب ٤

أوجد قيم s في كل مما يلي :

$$(أ) \quad \sqrt{5} = \sqrt{1+s^2}$$

$$(ب) \quad \sqrt{2-s} = 2$$

(١) إذا كان $د(س) = ٣س$ فحل المعادلة التالية

$$٠ = (٥)د + (س)د - ٣٦$$

(٢) حدد مجال ومدى كل من الدالتين

$$ص١ = ٥س \quad , \quad ص٢ = \left(\frac{١}{٥}\right)س$$

(٣) حل المعادلات الأسية التالية :

$$٤٠٩٦ = ٨(س٢ + ١٤س) \quad (أ)$$

$$٣(س + ٣) - \frac{١}{٦٥٦١} = \text{صفر} \quad (ب)$$

$$٧٢٩ = ٩(س٣ + ٢٤س) \quad (ج)$$

(٤) إذا كانت $د(س) = ٣س$

$$\text{فاوجد قيمة : } \frac{د(٢س + ٢) + د(١س - ١)}{د(١س - ١) - د(٢س)}$$

(٥) ارسم منحنى كل من الدوال التالية:

$$(١) ٣س$$

$$(٢) ٢ + ٣س \quad \text{ماذا تلاحظ؟}$$

مثال ٤

ارسم الدالة $د(س) = س^٣$ في الفترة $[-٢, ٣]$

(٢) من الرسم أوجد ما يلي :

د $(\frac{٣}{٢})$ ، د $(\frac{١}{٢} -)$ ، س عندما $س^٣ = \frac{١}{٢}$ ،

ب) أوجد قيمة س عندما $د(١ + س) + د(١ - س) = ٩٠$

 الحل

٢-	١-	٠	١	٢	٣	س
$\frac{١}{٩}$	$\frac{١}{٣}$	١	٣	٩	٢٧	د(س)

(٢) د $(\frac{٣}{٢}) \approx ٥,٢$

د $(\frac{١}{٢} -) \approx ٠,٦$

س ≈ ٢ (أقل بقليل عن ٢)

ب) $٩٠ = ١-س^٣ + ١+س^٣$

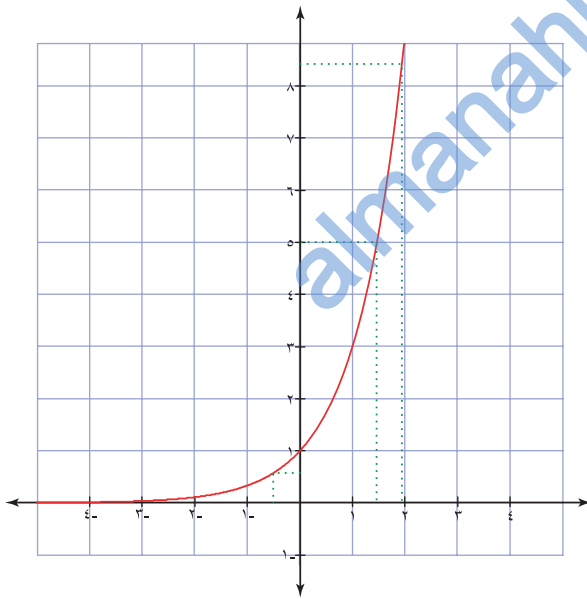
باستخدام قواعد الأس :

$$٩٠ = \frac{١}{٣} \times س^٣ + ٣ \times س^٣$$

$$٩٠ = (\frac{١}{٣} + ٣) س^٣$$

$$٢٧ = س^٣ \Leftarrow$$

∴ س = ٣ (تحقق من صحة الإجابة)



تدريب ٦

ارسم الدالة $د(س) = س^٤$ في الفترة $[-٢, ٢]$

(٢) من الرسم أوجد ما يلي :

د (٠) ، د (١) ، د $(\frac{١}{٢})$

ب) أوجد قيمة س إذا كانت $د(٢ - س) + د(١ + س) = ٦٥$ ثم تحقق من صحة إجابتك .

مثال ١

أوجد ناتج كل مما يلي:

$$(١) \text{ لو}_{٦٤} ٣ \quad (٢) \text{ لو}_{\frac{١}{٨}} ١$$

الحل

$$(١) \text{ لو}_{٦٤} ٣ = ٣ \Leftrightarrow ٣ = \text{لو}_{٦٤} ٣$$

$$(٢) \text{ لو}_{\frac{١}{٨}} ١ = ٣ \Leftrightarrow ١ = \text{لو}_{\frac{١}{٨}} ٣$$

تدريب ٢

أنقل الجدول التالي في دفترك وأكمه بما يناسب:

	$\frac{١}{٩} = ٣^{-٢}$		$١٦ = ٤^٢$	الصورة الأسية
$\frac{١}{٢} = ٣^{-٣}$		$٣ = ١٠٠٠$		الصورة اللوغاريتمية

مثال ٢

أوجد قيمة س في كل مما يأتي:

$$(٢) \text{ لو}_٣ س = ١$$

$$(١) \text{ لو}_٣ ١٢٥ = ٣$$

الحل

$$(١) \text{ لو}_٣ ١٢٥ = ٣ \Leftrightarrow ١٢٥ = ٣^٣ \quad (٢) \text{ لو}_٣ س = ١ \Leftrightarrow ١ = ٣^٢ = س$$

$$\therefore س = ٢$$

لماذا؟

$$\therefore س = ٥$$

تدريب ٣

أوجد قيمة المتغير في كل مما يأتي:

$$(٢) \text{ لو}_٣ ع = ٠$$

$$(١) س = \text{لو}_٧ ٧$$

$$(٤) \text{ لو}_{\frac{١}{٣}} ٢٤٣ = ص$$

$$(٣) \text{ لو}_٣ م = ٣$$

الدالة اللوغاريتمية Logarithmic Function

نشاط ١: معكوس الدالة الأسية

الأدوات: ورق رسم بياني ، مسطرة ، قلم

الخطوات:

- (١) ارسم منحنى الدالة $v = 2^s$ على مستوى الإحداثيات.
- (٢) ارسم منحنى الدالة $v = s$ على نفس الشكل.
- (٣) ارسم صورة منحنى الدالة $v = 2^s$ تحت تأثير انعكاس حول المستقيم $v = s$.
- (٤) كرر الخطوات السابقة مع دوال أسية أخرى مثل $v = 3^s$.
- (٥) اكتب صيغة الدالة الأسية تحت تأثير الانعكاس حول المستقيم $v = s$.

تدريب ١

(٢) انقل الجدول الآتي في دفترك ثم وضح متى يمكن ومتى لا يمكن إيجاد قيم v مع ذكر السبب:

الدالة	س	٢-	١-	٠	١	٢
$v = 2^s$						
$v = 2^s$						

(ب) ما الفرق بين الدالتين $v = s$ ، $v = 2^s$ ؟ اكتب ملاحظتك؟

تعريف

- معكوس الدالة الأسية $v = 2^s$ هي دالة $v = \log_2(s)$ (لوم $v = s$ حيث $0 < v < 2$ ، $1 \neq v$ ، $0 < s$)
ويقرأ لوغاريتم v للأساس 2
- اللوغاريتم: هو القوة (الأس) التي يجب أن يرفع لها الأساس للحصول على عدد معلوم.
- الدالة اللوغاريتمية تعتبر معكوس الدالة الأسية وتعطى العلاقة بينهما $v = \log_2(s) \Leftrightarrow s = 2^v$

(١) حول كلاً مما يلي للصورة اللوغاريتمية:

$$\begin{aligned} (ب) \quad 10^{-2} = 0,01 & \quad (ج) \quad 8 = 3^{-\left(\frac{1}{3}\right)} \\ (د) \quad 16 = 2^{-5} & \quad (هـ) \quad 16 = \sqrt[3]{64} \\ (و) \quad \frac{1}{3} = \sqrt[3]{\left(\frac{1}{27}\right)} & \end{aligned}$$

(٢) حول من الصورة اللوغاريتمية إلى الصورة الأسية لكل مما يلي:

$$\begin{aligned} (ب) \quad 2^{-} = \frac{1}{3^5} \quad \text{لو} \quad 0 = 1 \quad \text{لو} \quad 1 \\ (ج) \quad 3^{-} = 0,001 \quad \text{لو} \quad 6 = 512 \quad \text{لو} \quad \frac{1}{81} \end{aligned}$$

(٣) أوجد قيمة س لكل مما يلي:

$$\begin{aligned} (ب) \quad \text{لو} \quad 3^{-} = س \\ (ج) \quad \text{لو} \quad 16 = س \\ (د) \quad \text{لو} \quad \frac{3}{4} = \sqrt[3]{10} \\ (هـ) \quad \text{لو} \quad 2 = س \\ (و) \quad \text{لو} \quad 3 = 5 \\ (ز) \quad \text{لو} \quad 1 = س \\ (ح) \quad \text{لو} \quad 625 = س \\ (ط) \quad \text{لو} \quad \frac{2}{3} = س \end{aligned}$$

(٤) يتناقص ثمن بيع آلة ميكانيكية سنويا وفقا للعلاقة التالية $س_n = س_0 (0,94)^n$ نتيجة الاستهلاك،

حيث $س_n$ الثمن بعد n سنة، $س_0$ الثمن الأصلي، بعد كم سنة يصبح ثمن بيعها ربع ثمنها الأصلي؟

(٥) إذا كانت العلاقة بين شدة التيار (ت) أمبير والزمن (ن) ثانية تحدد بالصيغة التالية

$$ت = (2)^{-ن}، \text{ فاحسب الزمن إذا كانت شدة التيار } 0,4 \text{ أمبير.}$$

مثال ٣

حل المعادلة الآتية:

$$(٢) \text{ لو } ٢ = ٣٢ = ٧ - ٢$$

$$(ب) \text{ لو } ٣ = \frac{١}{٢١٨٧} = ٣٤ - ٣$$

الحل

$$(٢) \text{ لو } ٢ = ٣٢ = ٧ - ٢ \Leftrightarrow ٣٢ = ٧ - ٢$$

$$٥ = ٧ - ٢ \Leftrightarrow ٢ = ٧ - ٥$$

∴ س = ٦ لماذا؟

$$(ب) \text{ لو } ٣ = \frac{١}{٢١٨٧} = ٣٤ - ٣ \Leftrightarrow ٣٤ - ٣ = \frac{١}{٢١٨٧}$$

$$٧ - ٣ = ٣٤ - ٣ \Leftrightarrow ٧ - ٣ = ٣٤ - ٣$$

∴ س = ٩ لماذا؟

تدريب ٤

حل المعادلات الآتية:

$$(٢) \text{ لو } ١ = ٤ = \frac{١}{٤}$$

$$(ب) \text{ لو } ٣ = (س - ٢) = ٢$$

نشاط ٢: العمليات على اللوغاريتمات

الأدوات : ورقة ، قلم.

الخطوات :

استعن بالجدول التالي لإكمال خطوات النشاط:

٧٢٩	٢٤٣	٨١	٢٧	٩	٣	س
٦	٥	٤	٣	٢	١	لو _٣ س

(١) اعتمد على الجدول أعلاه وأكمل ما يلي:

$$\begin{aligned} \text{أ) } \text{لو}_3(9 \times 3) = ? \quad , \quad \text{لو}_3 9 + \text{لو}_3 3 = ? \\ \text{ب) } \text{لو}_3(27 \times 3) = ? \quad , \quad \text{لو}_3 27 + \text{لو}_3 3 = ? \\ \text{ج) } \text{لو}_3(81 \times 3) = ? \quad , \quad \text{لو}_3 81 + \text{لو}_3 3 = ? \end{aligned}$$

(٢) ما العلاقة بين العبارة الأولى والعبارة الثانية في كل مفردة؟

(٣) استخدم هذا النمط لتكوين قاعدة أو تعميم حول الصيغة لو_٣(س×ص).

(٤) اعتمد على الجدول أعلاه وأكمل ما يلي:

$$\begin{aligned} \text{أ) } \text{لو}_3\left(\frac{27}{9}\right) = ? \quad , \quad \text{لو}_3 27 - \text{لو}_3 9 = ? \\ \text{ب) } \text{لو}_3\left(\frac{81}{3}\right) = ? \quad , \quad \text{لو}_3 81 - \text{لو}_3 3 = ? \\ \text{ج) } \text{لو}_3\left(\frac{243}{3}\right) = ? \quad , \quad \text{لو}_3 243 - \text{لو}_3 3 = ? \end{aligned}$$

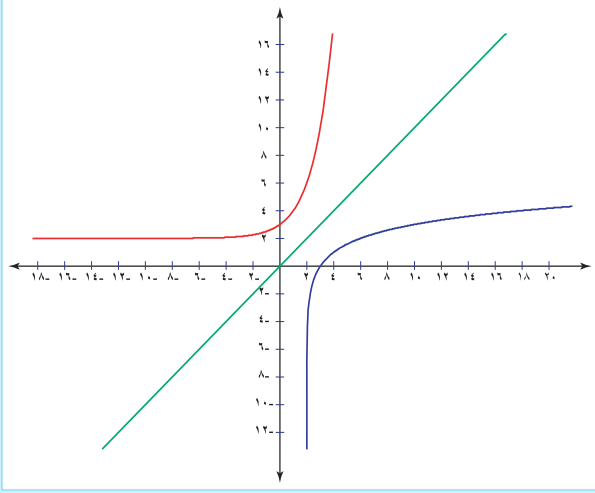
(٥) ما العلاقة بين العبارة الأولى والعبارة الثانية في كل مفردة؟

(٦) استخدم هذا النمط لتكوين قاعدة أو تعميم حول الصيغة لو_٣ $\left(\frac{س}{ع}\right)$.

العمليات على اللوغاريتمات

نشاط ١: «الدالة اللوغاريتمية وخواصها»

الأدوات : مثلث قائم الزاوية ، ورقة رسم بياني ، قلم ، مسطرة .
الخطوات :



(١) ارسم الدالة $ص = 2^س$ في دفترك كما هو موضح بالشكل
(٢) جد صورة منحنى الدالة $د (س) = \log_2(س)$ تحت تأثير انعكاس في المستقيم $ص = س$ مستخدماً المثلث القائم.

(٣) إذا علمت أن صورة الدالة الأسية $د (س) = 2^س$ تحت تأثير انعكاس حول المستقيم $ص = س$ تسمى الدالة اللوغاريتمية فحدد ما يلي :
أ) مجال الدالة اللوغاريتمية ومداهما .
ب) فترات التزايد للدالة اللوغاريتمية .
ج) نقطة تقاطع منحنى الدالة اللوغاريتمية مع المحور السيني .

تدريب ١

ارسم الدالة $ص = (\frac{1}{٢})^س$ ثم ابحث صورتها تحت تأثير انعكاس في المستقيم $ص = س$ ثم أوجد مجالها ومداهما.

نتيجة

خواص الدالة اللوغاريتمية لو $س > ٠$:

- (١) مجال الدالة اللوغاريتمية $ص > ٠$ ومداهما $ص > ٠$
- (٢) متزايدة إذا كانت $٠ < س < ١$ ومتناقصة عند $س > ١$
- (٣) منحنى الدالة يمر بالنقطة $(١, ٠)$

تدريب ٣

أوجد قيمة كل مما يلي:

$$(١) \text{ لو}_٣ \quad (٢) \text{ لو}_٤ \quad (٣) \text{ لو}_٢ \quad (٤) \text{ لو}_٦$$

مثال ٢

أوجد قيمة س في كل مما يلي:

$$(١) \text{ لو}_٣ ٢٧ + \text{لو}_٣ ٣ = \text{لو}_٣ س$$

$$(٢) \text{ لو}_٤ س - ٢ \text{ لو}_٤ ٢ = \text{لو}_٤ ٢٤$$

$$(٣) \text{ لو}_٦ س = \text{لو}_٦ ٤ + \text{لو}_٦ ٦٣ - \text{لو}_٦ ٧$$

الحل

$$(١) \text{ لو}_٣ ٢٧ + \text{لو}_٣ ٣ = \text{لو}_٣ س$$

$$\text{لو}_٣ ٨١ = \text{لو}_٣ س$$

$$٨١ = س$$

$$(٢) \text{ لو}_٤ س - ٢ \text{ لو}_٤ ٢ = \text{لو}_٤ ٢٤$$

$$\text{لو}_٤ س = \text{لو}_٤ ٢٤ + ٢ \text{ لو}_٤ ٢$$

$$= \text{لو}_٤ ٢٤ + \text{لو}_٤ ٤$$

$$= \text{لو}_٤ ٩٦$$

$$٩٦ = س$$

$$(٣) \text{ لو}_٦ س = \text{لو}_٦ ٤ + \text{لو}_٦ ٦٣ - \text{لو}_٦ ٧$$

$$\text{لو}_٦ س = \text{لو}_٦ ٤ + \text{لو}_٦ \left(\frac{٦٣}{٧}\right)$$

$$\text{لو}_٦ س = \text{لو}_٦ ٤ + \text{لو}_٦ ٩$$

$$\text{لو}_٦ س = \text{لو}_٦ ٣٦$$

$$٣٦ = س$$

تدريب ٤

أوجد قيمة س لما يلي:

$$(١) \text{ لو}_١ س = \text{لو}_١ ٧,٠٨٥$$

$$(٢) \text{ لو}_٥ ١٥ + ٠,٥ \text{ لو}_٥ ٥ - \text{لو}_٥ ٣ = \text{لو}_٥ س$$

استخدم الاستنتاج الذي توصلت إليه من خلال النشاط لإيجاد قيمة كل مما يلي:

$$(1) \text{ لو } 3 \times 3 \quad (2) \text{ لو } \frac{128}{2} \quad (3) \text{ لو } \frac{2187}{27} \times 3$$

وعموماً:

إذا كانت س، ص، ن $\in \mathbb{C}$ ، ن $\neq 1$ ، ن < صفر فإن:

$$(1) \text{ لو } (س \times ص) = \text{ لو } س + \text{ لو } ص$$

$$(2) \text{ لو } \frac{س}{ص} = \text{ لو } س - \text{ لو } ص$$

$$(3) \text{ لو } س = \text{ لو } ص \Leftrightarrow س = ص$$

$$(4) \text{ لو } س^م = م \text{ لو } س$$

درست سابقاً في موضوع الأسس أن $(ن)^1 = 1$ ، ن = 1 ن وعليه يمكن برهنة ما يلي:

$$(1) \text{ لو } 1 = 0 \quad (2) \text{ لو } 1 = 1$$

برهان

$$(1) \text{ نفرض أن لو } 1 = س$$

$$(ن)^1 = 1 \leftarrow س = 0$$

$$\therefore \text{ لو } 1 = 0، ن \in \mathbb{C}، ن < 1$$

$$(2) \text{ نفرض أن لو } 1 = س$$

$$1 = ن^1 \leftarrow س = 1$$

$$\therefore \text{ لو } 1 = 1، ن \in \mathbb{C}، ن < 1$$

مثال ١

برهن صحة النتيجة ٤ (لو $س^م = م \text{ لو } س$)

برهان

$$\therefore \text{ لو } س^م = \text{ لو } س \times س \times س \times س \times س \times \dots \times س \text{ (م من المرات)}$$

$$= \text{ لو } س + \text{ لو } س + \dots + \text{ لو } س \text{ (لماذا؟)}$$

$$\therefore \text{ لو } س^م = م \times \text{ لو } س$$

مثال ٥

$$\text{حل المعادلة } 20 = 7^3 \text{ س}$$

الحل

بأخذ اللوغاريتم للطرفين

$$\text{لو } 20 = \text{لو } 7^3 \text{ س}$$

$$3 \text{ س لو } 7 = \text{لو } 20$$

$$\text{س} = \frac{\text{لو } 20}{3 \text{ لو } 7}$$

استخدم الآلة الحاسبة لإيجاد لو ٧ :

– أدخل العدد ٧ في الآلة الحاسبة .

– اضغط على المفتاح **Log** فيظهر العدد ٠,٨٤٥٠٩٨

ولإيجاد قيمة س باستخدام الآلة الحاسبة اتبع الخطوات التالية :

$$\text{Log } 20 \div (\text{Log } 7) = 0,5131672$$

ويمكنك التحقق من صحة الإجابة بالتعويض عن قيمة س بـ (٠,٥١٣١٦٧٢)

$$20 = 7^{(0,5131672 \times 3)} \text{ س} \Leftrightarrow 20 = 7^3 \text{ س}$$

تدريب ٦

حل المعادلات التالية :

$$(أ) 21 = 3^2 \text{ س}$$

$$(ب) 10 = 3^{(س+4)}$$

مثال ٦

حل المعادلات اللوغاريتمية التالية :

$$\text{لو } 5 = (\text{لو } 3 + 1) \text{ س}$$

الحل

$$\text{لو } 5 = (\text{لو } 3 + 1) \text{ س}$$

$$10 = 1 + 3 \text{ س}$$

$$3 \text{ س} = 10 - 1$$

$$3 \text{ س} = 99999 \Leftrightarrow 33333 = \text{س}$$

مثال ٣

إذا كان لو ٧ $\approx 2,8074$ استخدم هذه القيمة في إيجاد القيمة التقريبية لكل من :

$$(1) \text{ لو } 28 \quad (2) \text{ لو } (3,5)$$

الحل

$$\begin{aligned} (1) \text{ لو } 28 &= \text{ لو } (7 \times 4) \\ &= \text{ لو } 7 + \text{ لو } 4 \\ &= 2,8074 + 2 \\ &= 4,8074 \\ (2) \text{ لو } (3,5) &= \text{ لو } 2 \text{ لو } 3,5 \\ &= \text{ لو } \frac{7}{2} \\ &= 2 (\text{ لو } 7 - \text{ لو } 2) \\ &= (1 - 2,8074) \times 2 \\ &= (1,8074) \times 2 \\ &= 3,6148 \end{aligned}$$

تدريب ٥

أوجد قيمة كل من:

$$(1) \text{ لو } 1081 \quad (2) \text{ لو } 16$$

اللوغاريتم الاعتيادي:

بعد أن درست اللوغاريتمات وخواصها لأي أساس ضمن مجموعة الأعداد الحقيقية الموجبة، أوجد قيمة كل من:

$$\text{ لو } 10, \text{ لو } 100, \text{ لو } 1000, \text{ لو } \frac{1}{10}, \text{ لو } \frac{1}{100}, \text{ لو } \frac{1}{1000}$$

لاحظ: أن اللوغاريتم الذي أساسه العدد عشرة يسمى باللوغاريتم الاعتيادي ويرمز له بالرمز **لوس** ولذا فإن أي لوغاريتم لم يذكر أساسه فهو للأساس عشرة.

مثال ٤

أوجد قيمة كل من:

$$(1) \text{ لو } 10000 \quad (2) \text{ لو } 10^{-2}$$

الحل

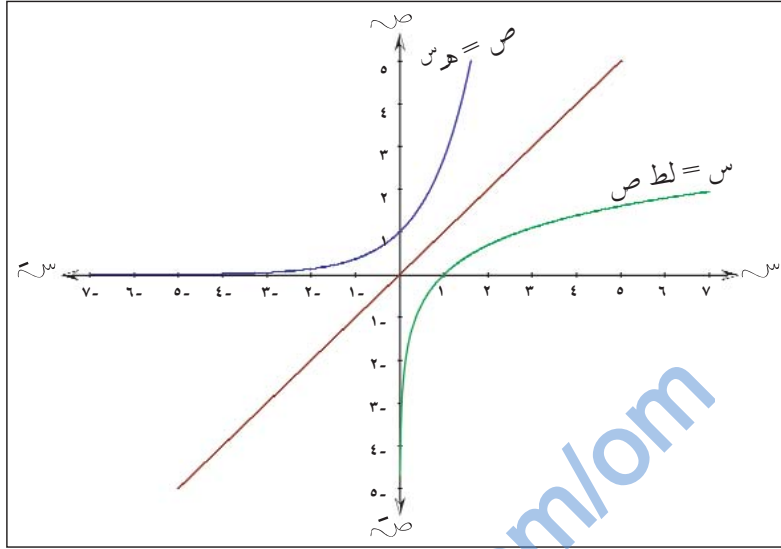
$$(1) \text{ لو } 10000 = \text{ لو } 10^4 = 4 \quad (2) \text{ لو } 10^{-2} = -2$$

تدريب ٦

أوجد قيمة كل من:

$$(1) \text{ لو } (2 \times 500) \quad (2) \text{ لو } (250 \times 40)$$

تسمى الدالة د(س) = هـ س بدالة الأساس الطبيعي حيث هـ هي الأساس الطبيعي $\approx 2,7$ وأسسها المتغير س ويمكن كتابتها بالصورة اللوغاريتمية: لط ص = س حيث لط ص = لو هـ ص



مثال ٧

أوجد كلاً مما يلي :

- (أ) لط هـ ٣ (ب) لط هـ ١ (ج) لط هـ ١

الحل

- (أ) افرض أن لط ١ = س
 لط ١ = س \leftrightarrow هـ س = ١ \leftrightarrow س = ١
 (ب) افرض أن لط هـ = ع
 لط هـ = ع \leftrightarrow هـ ع = هـ هـ \leftrightarrow ع = ١
 (ج) افرض أن لط هـ ٣ = ل
 لط هـ ٣ = ل \leftrightarrow هـ ل = هـ هـ ٣ \leftrightarrow ل = ٣

تدريب ٨

أوجد قيم س لكل مما يلي :

- (أ) لط هـ ٥ = ٢ + س (ب) لط هـ ٢ = ٥ + س (ج) لط هـ ١٠ = ٢

مثال ٨

حل المعادلات التالية :

- (أ) لط هـ ٢١ = (٩ - س) (ب) لط هـ (٥ + س) = ٤

$$(٤) \text{ حل المعادلة } ٢ \text{ لو س} - \text{لو ٣} = ٢$$

(ب) إذا علمت أن $\text{س} = \text{لو } ٢$ ، $\text{ص} = \text{لو } ١٠$ اكتب كلاً مما يلي في صورة س ، ص

$$(١) \text{ لو } ٢٠ \quad (٢) \text{ لو } \frac{١}{٨} \quad (٣) \text{ لو } ٢٥٠$$

(ج) أوجد كلاً مما يلي :

$$(١) \text{ لو } ١٢٨ \div \text{لو } ٦٤ \quad (٢) \text{ لو } ٢٧ \times \text{لو } \frac{١}{٦٤}$$

اللوغاريتم الطبيعي Natural Logarithm

نشاط ١: «الأساس الطبيعي هـ»

الأدوات: آلة حاسبة علمية

الخطوات:

(١) انقل الجدول التالي في دفترك ثم أكمله لقيم n : ١، ٢، ٤، ١٢، ٣٦٥، ١٠٠٠

١، ٠٠٠، ٠٠٠، ٠

الناتج	$(\frac{1}{n} + 1)^n$	n
٢	$(\frac{1}{1} + 1)^1$	١
٢,٢٥	$(\frac{1}{2} + 1)^2$	٢

(٢) جرب أعدادا أكبر من مليون ($n \leq 10^6$) ثم جد الناتج باستخدام الحاسبة. ماذا

تلاحظ؟

(٣) استخدم نظرية ذات الحدين لإيجاد مفكوك $(\frac{1}{n} + 1)^n$

(٤) أوجد قيمة $(\frac{1}{n} + 1)^n$ عندما n تكون كبيرة جداً مقرباً إلى أقرب جزء من مائة.

لعلك لاحظت أنه كلما ازدادت قيمة n فإن قيم $(\frac{1}{n} + 1)^n$ تقترب من ٢,٧ ويسمى هذا العدد

بالأساس الطبيعي ويرمز له بالرمز e ويعتبر e عدداً حقيقياً ولكنه ليس عدداً نسبياً ويمكن رفعه إلى أي

أس وإجراء العمليات الحسابية عليه، ومن الدوال الأسية المشهورة $\text{ص} = e^{\text{س}}$ حيث س متغير.

إن خواص اللوغاريتم الطبيعي تنسجم مع خواص اللوغاريتم المعتاد وهي :

$$\begin{array}{ll} (1) & ه ل ط س = س \\ (2) & ل ط (ه س) = س \\ (3) & ل ط ١ = صفر \\ (4) & ل ط ه = ١ \end{array}$$

يمكن إثبات خاصية (١)

$$\begin{aligned} \text{نفرض أن ل ط س} &= ٢ \iff ه ل ط س = ٢ \iff ه = س^{-٢} \\ \text{الطرف الأيمن} &= ه ل ط س = س^{-٢} ل ط س \\ &= (س^{-٢})^{(١/٢) ل ط س} \\ &= (س^{-٢})^{(١/٢) س} = س^{-١} = \frac{١}{س} \end{aligned}$$

تدريب ١٢

اثبت بقية خواص اللوغاريتم الطبيعي .

مثال ١٠

حل المعادلة $٧^٣ = ٢٠$ باستخدام اللوغاريتم الطبيعي .

الحل

مفتاح **ln** يدل على ل ط

بأخذ اللوغاريتم الطبيعي للطرفين

$$٧^٣ = ٢٠ \iff ل ط ٧^٣ = ل ط ٢٠$$

$$٣ ل ط ٧ = ل ط ٢٠$$

$$\text{ومنه } س = \frac{ل ط ٢٠}{٣ ل ط ٧}$$

$$\therefore س = ٠,٥١٣١٦٧٢٢$$

مثال ١١

أوجد قيمة $ه^٣ ل ط ٦$ باستخدام قوانين اللوغاريتم الطبيعي .

الحل

$$ه^٣ ل ط ٦ = ه ل ط ٦^٣ = ٦ ل ط ٦^٣ = ٦٤$$

تدريب ١٣

أوجد قيمة كل مما يلي :

$$(ب) \frac{ل ط ٢٧}{٩ ل ط ٣}$$

$$(٢) \frac{ل ط ٤٩}{٧ ل ط ٣}$$

الحل

$$\begin{aligned} \text{پ) لظ (س-٩) = ٢١} \\ \text{هـ ٢١ = س ٣ - ٩} \\ \text{س ٣ = هـ ٢١ + ٩} \\ \therefore \text{س} = \frac{\text{هـ ٢١} + ٩}{٣} \quad (\text{حيث هـ} \approx ٢,٧) \\ \text{س} \approx ٣,٨ \times ١,٠ \\ \text{ب) لظ (س+٥) = ٤} \\ \text{هـ ٤ = س ٣ + ٥} \\ \therefore \text{س} = \frac{\text{هـ ٤} - ٥}{٣} = ١٦,٠٥ \end{aligned}$$

تدريب ٩

حل المعادلات الآتية :

$$\text{پ) لظ } \sqrt{\text{هـ}} = \text{س} - ٤ \quad \text{ب) لظ } \frac{٢}{٣} \text{س} = ١$$

تدريب ١٠

ارسم الدالة الأسية ص = هـ^س ثم أوجد :
 پ) نقطة تقاطع المنحنى مع المحور الصادي
 ب) قيمة ص عندما س = ١

مثال ٩

أوجد قيمة د (س) = هـ^س (لأقرب جزء من ألف) مستخدماً الآلة الحاسبة لكل من :
 پ) س = $\frac{١}{٢}$ ب) س = ١- ج) س = ٢

الحل

$$\begin{aligned} \text{پ) د (} \frac{١}{٢} \text{) = هـ}^{\frac{١}{٢}} = ١,٦٤٣ \\ \text{ب) د (١-) = هـ}^{-١} \approx ٠,٣٧٠ \\ \text{ج) د (٢) = هـ}^٢ \approx ٧,٢٩٠ \end{aligned}$$

تدريب ١١

إذا كانت د (س) = هـ^س فأوجد كلاً مما يلي :

$$\text{پ) د (٦) ب) د (-} \frac{١}{٣} \text{)}$$

almanahj.com/om



مثال ١٣

استخدم اللوغاريتم الطبيعي لحل المسائل التالية :

(ب) $٥^{س+١} = ٦^{س-٢}$

(٢) $٠ = ٢٤ + ٢^{س} \times ١١ - ٢٢^{س}$

الحل

(٢) نفرض أن $٢^{س} = ص$ ومنها $٢^{٢ص} = ص^٢$

$$٠ = ٢٤ + ١١ص - ص^٢$$

$$٠ = (٣-ص)(٨-ص)$$

$$٨ = ص \quad \text{أو} \quad ٣ = ص$$

$$٢^{س} = ٨$$

عندما $ص = ٣$

$$٣ = ٢^{س} \iff ٣ = \log ٢^{س} = س \log ٢ \iff س = \frac{\log ٣}{\log ٢} = ١,٥٨٥$$

عندما $ص = ٨$

$$٨ = ٢^{س} \iff ٣ = س$$

(ب) $٥^{س+١} = ٦^{س-٢}$

$$(١+س) \log ٥ = (س-٢) \log ٦$$

$$س \log ٥ + \log ٥ = س \log ٦ - ٢ \log ٦$$

$$س \log ٥ - س \log ٦ = -٢ \log ٦ - \log ٥$$

$$س (\log ٥ - \log ٦) = -٢ \log ٦ - \log ٥$$

$$س = \frac{-٢ \log ٦ - \log ٥}{\log ٥ - \log ٦} = \frac{[[\ln 6 - \ln 5]] \div [[\ln 5 - 2 \times \ln 6]]}{}$$

$$= ٢٨,٤٨٢٤٠٧$$

تدريب ١٥

أوجد قيم $س$ في كل مما يلي :

(ب) $٦^{(س-٣)} \times ٤^{(س+٥)} = ٨$

(٢) $٠ = ٥٠ + ٢٧ \times ٥^{س} - ٢٥^{س}$

(د) $٣^{(س-١)} = ٠,٤$

(ح) $٠ = ٤٥ + ١٤ \times ٣^{س} - ٩^{س}$

مثال ١٢

مستخدمًا خواص اللوغاريتمات أوجد قيمة س في كل مما يلي :

$$(أ) \quad 23,012 \times 2,013 = س \quad (ب) \quad \left(\frac{3}{5}\right)^س = 1,168$$

الحل

$$(أ) \quad 23,012 \times 2,013 = س$$

$$\therefore \text{لو س} = \text{لو } 23,012 + \text{لو } 2,013$$

$$\text{لو س} = 23.012 \text{ Log} + 2.013 \text{ Log} = 1.6657981$$

$$\text{س} = 1.6658 \text{ Log Shift}$$

$$= 46.323152$$

استخدم اللوغاريتم الطبيعي لحل المثال ثم تحقق من صحة الإجابة .

$$(ب) \quad \text{لو} \left(\frac{3}{5}\right)^س = \text{لو } 1,168$$

$$\text{س} \text{ لو} \frac{3}{5} = \text{لو } 1,168$$

$$\text{س} = \frac{\text{لو } 1,168}{\text{لو} \frac{3}{5}}$$

$$= \frac{3}{5} \text{ Log} \div 1.168 \text{ Log} = -0.3040037$$

$$\therefore \text{س} = 0,3040037^- \text{ (تحقق من صحة إجابتك)}$$

تدريب ١٤

مستخدمًا اللوغاريتمات أوجد ما يلي :

$$(ب) \quad \frac{\sqrt[4]{3,76} - (2,91)}{\sqrt{0,6241}}$$

$$(أ) \quad \frac{\sqrt[3]{0,023} \times 42,15}{\sqrt{0,432}}$$

تطبيقات حياتية على اللوغاريتمات

إن اكتشاف علم اللوغاريتمات أثر بشكل كبير في تقدم الرياضيات بوجه عام ، حيث أن اللوغاريتمات تستخدم عادة في حساب المقادير المرفوعة لأسس كبيرة جداً مثل حساب النمو : كتكاثر البكتيريا، والنمو السكاني عبر العقود ، والربح المركب ... أو حساب التلاشي أو فقدان الخاصية مثل إيجاد فترات تناقص العناصر المشعة كذلك حساب طاقة الزلازل وفقاً لدرجات مقياس ريختر ، ... إلخ ، إلى غير ذلك من الظواهر .

مثال ١

تحدث الزلازل عادة نتيجة تجمع طاقة كبيرة في جوف الأرض وتعمل على إخراجها وتناسب شدة الزلازل مع الطاقة التي تتخلص منها الأرض وتقاس عادة بالدرجات على مقياس يسمى مقياس ريختر ، فإذا كانت العلاقة بين درجات القياس والطاقة تعطي بالعلاقة :

د = $0,67$ لو ط - $7,6$ ، حيث د (الدرجة بمقياس ريختر) ، ط (الطاقة المستهلكة بالايروج) فاحسب : (أ) درجة زلزال على مقياس ريختر إذا كانت الطاقة $2,5 \times 10^{20}$ إيروج .

(ب) كمية الطاقة المستهلكة إذا كانت الدرجة على مقياس ريختر = 5 درجات .

الحل

$$(أ) \quad 0,67 = \text{لو} (2,5 \times 10^{20}) - 7,6$$

$$0,67 = (\text{لو} 2,5 + \text{لو} 10^{20}) - 7,6$$

$$\approx 6 \text{ درجات}$$

$$(ب) \quad 0,67 = \text{لو} 5 - 7,6$$

$$12,6 = \text{لو} 5$$

$$\text{لو} 18,81 = 5$$

$$\text{ط} = 6,5 \times 10^{18} \text{ إيروج تقريباً}$$

تدريب ١

بعد كم سنة يتبقى $\frac{1}{8}$ كمية المادة لكل من العناصر التالية :

(أ) الهيدروجين إذا علمت أن نصف العمر $12,3$ سنة

(ب) الكربون إذا علمت أن نصف العمر 5730 سنة

(١) أكتب كلاً مما يلي في أبسط صورة :

(٢) $\frac{١٠}{٣} - \frac{٥}{٣}$ (ب) $\frac{١٠}{٣} + \frac{٥}{٣} - \frac{١٠}{٣}$ (ج) $\frac{١٠}{٣} - \frac{٥}{٣}$ (د) $\frac{١٠}{٣} + \frac{٥}{٣}$

(٣) $\frac{١٠}{٣} - \frac{٥}{٣}$ (ب) $\frac{١٠}{٣} + \frac{٥}{٣} - \frac{١٠}{٣}$ (ج) $\frac{١٠}{٣} - \frac{٥}{٣}$ (د) $\frac{١٠}{٣} + \frac{٥}{٣}$

(٢) أوجد قيم س في كل مما يلي :

(٢) $\frac{١٠}{٣} = \frac{٧}{٣} + \frac{١٢}{٣}$ (ب) $\frac{١٠}{٣} = \frac{٥}{٣} - \frac{٣}{٣}$ (ج) $\frac{١٠}{٣} = \frac{٢}{٣} + \frac{٢}{٣}$ (د) $\frac{١٠}{٣} = \frac{٢}{٣} + \frac{١٤}{٣}$

(٣) $\frac{١٠}{٣} = \frac{٢}{٣} + \frac{٢}{٣}$ (ب) $\frac{١٠}{٣} = \frac{٥}{٣} - \frac{٣}{٣}$ (ج) $\frac{١٠}{٣} = \frac{٢}{٣} + \frac{٢}{٣}$ (د) $\frac{١٠}{٣} = \frac{٢}{٣} + \frac{١٤}{٣}$

(٣) استخدم الآلة الحاسبة لإيجاد قيمة المجاهيل لأقرب جزء من مائة :

(٢) $\frac{١٠}{٣} = \frac{٥٩}{٣} \times ٦,٢٢$ (ب) $\frac{١٠}{٣} = \frac{٥٩}{٣}$ (ج) $\frac{١٠}{٣} = \frac{٥٩}{٣}$ (د) $\frac{١٠}{٣} = \frac{٥٩}{٣}$

(٣) $\frac{١٠}{٣} = \frac{٥٩}{٣} \times ٦,٢٢$ (ب) $\frac{١٠}{٣} = \frac{٥٩}{٣}$ (ج) $\frac{١٠}{٣} = \frac{٥٩}{٣}$ (د) $\frac{١٠}{٣} = \frac{٥٩}{٣}$

(٤) حل كلا من المعادلات الآتية :

(٢) $\frac{١٠}{٣} = \frac{٥٩}{٣} \times ٦,٢٢$ (ب) $\frac{١٠}{٣} = \frac{٥٩}{٣}$ (ج) $\frac{١٠}{٣} = \frac{٥٩}{٣}$ (د) $\frac{١٠}{٣} = \frac{٥٩}{٣}$

(٣) $\frac{١٠}{٣} = \frac{٥٩}{٣} \times ٦,٢٢$ (ب) $\frac{١٠}{٣} = \frac{٥٩}{٣}$ (ج) $\frac{١٠}{٣} = \frac{٥٩}{٣}$ (د) $\frac{١٠}{٣} = \frac{٥٩}{٣}$

(٢) لإيجاد المعادلة الأسية لاحظ أن $٣٠ = ٢$ (القيمة الابتدائية لكمية الكافيين)
 \therefore كمية الكافيين بعد ساعة $= ٣٠ \times \frac{١٥}{١٠٠} - ٣٠ = ٣٠ \times (١ - \frac{١٥}{١٠٠}) - ٣٠ = ٢٥,٥$ غم
 كمية الكافيين بعد ساعتين $= ٣٠ \times (\frac{١٥}{١٠٠} - ١) - ٣٠ = ٢٠,٠٨٥$ غم

معادلة تلاشي الكافيين هي :

ص $= ٣٠ (٠,٨٥)^س$
 كمية الكافيين المتبقية (س = ١) هي ص $= ٣٠ \times ٠,٨٥ = ٢٥,٥$ ملغم
 كمية الكافيين المتبقية (س = ٤) هي ص $= ٣٠ \times (٠,٨٥)^٤ = ١٥,٧٠$ ملغم

(ب) $٩,٦ = ٣٠ (٠,٨٥)^س$

$\frac{٩,٦}{٣٠} = (٠,٨٥)^س$

$٠,٣٢ = (٠,٨٥)^س \iff لو (٠,٨٥) = ٠,٣٢$

ومنه س لو $(٠,٨٥) = ٠,٣٢$

\therefore س $= \frac{لو ٠,٣٢}{لو ٠,٨٥} \simeq ٧$ ساعات (تحقق من صحة إجابتك)

مثال ٤

الجدول التالي يبين تطور مؤشرات قطاع النفط خلال الفترة (١٩٧٠ - ١٩٩٩م) في سلطنة

متوسط معدل النمو السنوي (%)	١٩٩٩	١٩٧٠	السنة / المؤشر
٣,٥	■	١٢١	- متوسط الانتاج السنوي (مليون برميل)
٣,٥	■	٣٣٢	- متوسط الانتاج اليومي (ألف برميل)
٣,٣	٣٠,٩	■	- صادرات النفط (مليون برميل)

مثال ٢

إذا علمت أن نصف عمر البلونيوم (٢١٠) يساوي ١٥٨ يوماً . فكم عدد المليغرامات التي تبقى بعد ١٤٢٢ يوماً مع العلم أن الكتلة الابتدائية ٢ ملغم .

الحل

$$\text{عدد فترات نصف العمر} = \frac{1422}{158} = 9 \text{ فترات}$$

	الفترة الأولى	الفترة الثانية	الفترة الثالثة ...
	١	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$
الكتلة بعد ن من الفترات = $m \left(\frac{1}{2}\right)^n$	$m \left(\frac{1}{2}\right)^1$	$m \left(\frac{1}{2}\right)^2$	$m \left(\frac{1}{2}\right)^3 \dots$
$2 = m \left(\frac{1}{2}\right)^n$			

$$\therefore \text{لـ ٩ فترات} = 2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^9 \Leftarrow \text{لـ } 2 = 9 \text{ لو } \frac{1}{2} = 2,4$$

$$\therefore \text{لـ } 2 = 9 \text{ لو } \frac{1}{2} = 2,4 \quad \text{ك} = 3,98 \times 10^{-3} \text{ ملغم}$$

تدريب ٢

إذا علمت أن نصف عمر أحد العناصر يساوي ١٥٩٩ سنة ، كم سنة يحتاج ليتحول $\frac{15}{16}$ من

الكتلة؟

مثال ٣

إذا كان معدل تلاشي كمية الكافيين في جسم الإنسان تصل ١٥٪ خلال الساعة الواحدة،

فإذا كانت كمية الكافيين ٣٠ ملغم، فأجب عما يلي :

(أ) كم تتوقع كمية الكافيين المتبقية خلال : ساعة ، ٤ ساعات .

(ب) بعد كم ساعة تكون كمية الكافيين المتبقية ٩,٦ ملغم .

(٢) ٢٢٥ خلية بكتيرية يتضاعف عددها ثلاث مرات في كل ساعة احسب :

(١) عدد الساعات اللازمة ليكون عدد الخلايا ٣٩٠ خلية .

(٢) عدد الساعات اللازمة ليكون عدد الخلايا ٣١٥٦٦ .

(ب) تحلل مادة مشعة بحيث تتحول كتلتها إلى مادة أخرى مع مرور الزمن حسب العلاقة

$$M = M_0 e^{-\lambda t} \text{ حيث } M_0 \text{ هي الكتلة الأصلية، } M \text{ هي الكتلة بعد مرور (ن) سنة}$$

هـ = ٢,٧ (ثابت)، λ ثابت خاص لكل مادة مشعة .

فإذا كانت الكتلة الأصلية لعينة من مادة مشعة تساوي ٢٠٠ غرام والكتلة النهائية منها

بعد (١٠) عشر سنوات تساوي ١٠٠ غرام فجد الثابت λ لهذه المادة .

تمارين ومسائل ٦

(١) إذا كانت العلاقة بين شدة التيار (ت) والزمن (ن) في دائرة كهربائية تعطى على الصورة

$$t = 2^{-n} \text{ حيث } t \text{ بالأمبير، } n \text{ بالثواني . فجد مقدار الزمن إذا كانت شدة التيار } 0,3 \text{ أمبير.}$$

(٢) إذا كان ثمن بيع آلة يتناقص سنوياً بمعدل ٨٪ نتيجة الاستهلاك . فبعد كم سنة يصبح ثمنها

نصف الثمن الأصلي .

(٣) نصف عمر مادة مشعة ١٠٩ يوماً ، كم يوماً تحتاج لتتحول ٧٣٪ من هذه المادة ؟

(٤) ٢٢٥ خلية بكتيرية تصبح ثلاثة أمثال العدد الحالي خلال ساعة فبعد كم ساعة سيكون عددها

٣٥٠٧ خلية .

- (أ) ماذا تتوقع أن يكون متوسط الإنتاج السنوي (مليون برميل) عام ١٩٩٩ م .
 (ب) ماذا تتوقع أن يكون متوسط الإنتاج اليومي (ألف برميل) عام ١٩٩٩ م .
 (ج) كم تتوقع أن تكون صادرات النفط عام ١٩٧٠ م .

الحل

(أ) يمكن كتابة دالة الإنتاج بالصورة $ص = ١٢١ (١,٠٣٥)^س$ حيث $س$ تمثل عدد السنوات .
 معدل الإنتاج $= ١٢١ \times (١,٠٣٥)^{٢٩}$ (فسر لماذا $س = ٢٩$ سنة)
 لعام (١٩٩٩ م) $= ٣٢٨$ مليون برميل

(ب) متوسط الإنتاج اليومي (ص) $= ٣٣٢ \times (١,٠٣٥)^{٢٩}$
 لعام (١٩٩٩ م) $= ٩٠٠$ ألف برميل

(ج) يمكن التعبير عن دالة صادرات النفط (ص) $= \frac{٣٠٩}{٣١,٣٣}$ فسر هذه الخطوة
 : كمية صادرات النفط خلال ١٩٧٠ م $= \frac{٣٠٩}{٢٩١,٣٣} \approx ١٢٠,٥$ مليون برميل

تدريب ٣

الجدول التالي يوضح تطور المؤشرات الخاصة بالرعاية الاجتماعية في سلطنة عمان

متوسط معدل النمو السنوي (%)	١٩٩٩	١٩٧٣	السنة
٢٥,١	■	١٣١	- عدد حالات الضمان الاجتماعي
٢٠	٢٣,٤	■	- المساعدات السنوية للضمان الاجتماعي (مليون ريال عماني)

ثلاثون عاماً من السيرة التنموية (وزارة الاقتصاد الوطني)

- (أ) كم عدد حالات الضمان الاجتماعي لعام ١٩٩٩ م ؟
 (ب) ما قيمة المساعدات السنوية للضمان الاجتماعي بالمليون ريال عماني لعام ١٩٧٣ م ؟

(٧) أوجد قيمة س في كل مما يلي :

(٩) لوس = ٤ (ب) لوس = $\frac{٥}{٢}$ (ح) لوس = ٣ = ٩

(٨) أوجد قيم المجاهيل في كل من :

(٩) $٢٠٤٨ = ٦^س$ (ب) $٦٦ = ٨ + ٢$ س $\frac{٣}{٥}$ (ح) $٢٠ = \sqrt[٣]{س} + ٣$

(د) $١٠٠٨ = ١٠ + ٨$ س (هـ) $٥ = ١٢ - \sqrt[٧]{٢س}$

(٩) أثبت ما يلي بدون استخدام الآلة الحاسبة :

(٩) ٢ لوس $\times ٩$ لوس = $\frac{٨}{٢}$ لوس $\times ٣ \times ٣$ لوس (ب) $\frac{٣}{٢} = \frac{١٠٠ \times \frac{٣}{٤} - ٢٧ \text{ لوس} + \sqrt{١٢٥٧}}{٤ \times \frac{١}{٣} \text{ لوس}}$

(١٠) الجدول التالي يوضح تطور المؤشرات في قطاع التجارة والصناعة (١٩٧٥ - ١٩٩٩ م)

المؤشر	السنة	١٩٧٥	١٩٩٩	متوسط معدل النمو السنوي (%)
- عدد المنشآت التجارية المسجلة في السجل التجاري		٢١٥٥	-	١٧,٤
- عدد المنشآت الصناعية في السجل الصناعي		-	١٨٧٢	٢٤,٤

(٩) كم تتوقع عدد المنشآت التجارية عام ١٩٩٩ م .

(ب) كم تتوقع عدد المنشآت الصناعية لعام ١٩٧٥ م .

تمارين ومسائل عامة

(١) حل المعادلات الأسية التالية :

$$(أ) \quad ٤^{-س} - ١٧ \times (٢)^س + ١٦ = \text{صفر}$$

$$(ب) \quad ٤٠٩٦ = \frac{(س+١)}{(س+٢)} \quad ٥١٢$$

$$(ج) \quad ٢^{(س-١٠)} - \frac{١}{١٢٨} = \text{صفر}$$

(٢) حل المعادلات اللوغاريتمية التالية :

$$(أ) \quad \frac{١}{٢} \text{ لو س} = \text{لو س}$$

$$(ب) \quad \text{لو}_٣ س + \text{لو}_٣ س = \text{لو}_٣ ٢$$

$$(ج) \quad \text{لظ هـ} (س) = ١$$

(٣) تزايدت أعداد البكتيريا من ٥٢ إلى ٢٣٨ خلية في خلال ساعة و ٢٤ دقيقة ، كم سيكون عدد البكتريا بعد مرور ٧ ساعات ، ٥٦ دقيقة .

(٤) مادة تتلاشى بنسبة ٠,٠٩ في السنة ، كم من الوقت تحتاج هذه المادة لبقى منها ٠,٠٧ فقط .

(٥) رسم أحد الطلاب رسماً توضيحياً لإزدياد أعداد سكان أحد المدن لتصل إلى ٤١٦٢٢ فرداً، بعد أن كان

١٠٠٧٧ فرداً ، وكانت نسبة التزايد السنوية ٤,١٦٪ ، ففسر أن يكتب عدد السنوات التي تمت فيها هذه

الزيادة . فهل يمكنك مساعدة الطالب لإيجاد عدد السنوات ؟ وضح ذلك .

(٦) أوجد قيم المجاهيل في كل من :

$$(ب) \quad \text{لو} \frac{١}{٣} = \frac{١}{٩} \quad \text{ص}$$

$$(أ) \quad \frac{٣}{٢} = \text{لو}_٢ ٢٧$$

$$(د) \quad ٣^{(س-١١)} - \frac{١}{٢٤٣} = ٠$$

$$(ح) \quad \text{لو} \frac{١٦}{٢٧} = س$$

$$(و) \quad \frac{١}{٨١} = ٩^{س+١}$$

$$(هـ) \quad ٧٢٩ = ٩^{(س٣+٢٤)}$$

الجمهورية العربية السورية
جمهورية

رقم الإيداع: