Math Show
education

11

سلسلة ملخصات

Math Show

الرياضيات المتقدمة

الصف الحادي عشر

الوحدة الثالثة

المتتالية الحسابية هو تجمع من الاعداد يسمى كل عدد منها حداً، ويكون الفرق بين كل حدين متتالين مقدار ثابت يسمى أساس المتتالية

هناك بعض الرموز الهامة التي تستخدم مع المتتاليات الحسابية

أ : الحد الأول

ل : الحد الأخير

د: أساس المتتالية

ن: عدد الحدود

بالتالي يمكن كتابة حدود أي متتالية حسابية على النمط التالي

الحد الأول	الحد الثاني	الحد الثالث	الحد الرابع	الحد الخامس
أ	أ + د	أ + ٢د	أ + ٣د	أ + ٤د

يمكن اختصار كتابة الحدود على النحو: الحد الخامس = $ح_{ن}$

وباستمرار النمط في الجدول السابق يمكن الحصول على قيمة أي حد من خلال الحد العام ويرمز له بالرمز $ح_{ن}$

$$ح_{ن} = أ + (ن-١) \times د$$

أولاً: امثله لتوضيح مفهوم المتتالية الحسابية

(١) وضح هل المتتالية التالية حسابية أم لا

٢، ٥، ٨، ١١، ....

الحل

نحسب الفرق بين كل حدين متتالين

$ح_{٢} - ح_{١} = ٥ - ٢ = ٣$

$ح_{٣} - ح_{٢} = ٨ - ٥ = ٣$

الفرق دائماً يساوي مقدار ثابت = ٣

∴ تمثل متتالية حسابية

أ = ٢ د = ٣

(٢) وضح هل المتتالية التالية حسابية أم لا

١، ٣، ٧، ١١، ....

الحل

نحسب الفرق بين كل حدين متتالين

$ح_{٢} - ح_{١} = ٣ - ١ = ٢$

$ح_{٣} - ح_{٢} = ٧ - ٣ = ٤$

الفرق ليس مقدار ثابت

∴ لا تمثل متتالية حسابية

(٣) وضح هل المتتالية التالية حسابية أم لا
$ح_ن$ = ٣-٢ن

الحل

نحسب قيمة الحدود الثلاثة الأولى من المتتالية

$ح_١$ = ٣ -٢(١) = ١ التعويض عن ن =١

$ح_٢$ = ٣ -٢(٢) = -١ التعويض عن ن =٢

$ح_٣$ = ٣ -٢(٣) = -٣ التعويض عن ن =٣

نحسب الفرق بين كل حدين متتاليين

$ح_٢ - ح_١$ = -١ − ١ = -٢

$ح_٣ - ح_٢$ = -٣ − (-١) = -٢

الفرق دائماً يساوي مقدار ثابت = -٢

∴ تمثل متتالية حسابية

أ = ١ د = -٢

(٤) إذا كانت ٢٩، س، ......، ٣س، ٩٥ تكون حدود متتالية حسابية
اوجد قيمة س

الحل

يكون الفرق بين كل حدين متتاليين مقدار ثابت

∴ س − ٢٩ = ٩٥ − ٣س

س + ٣س = ٩٥+ ٢٩ تجميع المجهول في طرف

٤س = ١٢٤ القسمة على ٤

س= ٣١

(٥) إذا كان الحد الأول من متتالية حسابية هو ٥،
$ح_{ن+١}$ = $ح_ن$ + ٣ أوجد قيمة الحد الرابع

الحل

$ح_{ن+١}$ = $ح_ن$ + ٣

$ح_{ن+١}$ - $ح_ن$ = ٣

الفرق بين حدين متتالين يساوي مقدار ثابت = ٣

الحد الرابع: $ح_٤$ = أ + ٣د

= ٥ + ٣(٣) = ١٤

(٦) إذا كان الحد العام من متتالية حسابية هو ٣ + ٥ن أوجد $ح_١$ ، د، $ح_{١٠}$

الحل

بالتعويض عن قيمة ن = ١ للحصول على $ح_١$

∴ $ح_١$= ٣ + ٥(١) = ٨

بالتعويض عن قيمة ن = ٢ للحصول على $ح_٢$

∴ $ح_٢$= ٣ + ٥(٢) = ١٣

د = ١٣ − ٨ = ٥

بالتعويض عن قيمة ن = ١ للحصول على $ح_١$

∴ $ح_{١٠}$= ٣ + ٥(١٠) = ٥٣

(٧) إذا كانت ٣، ٨، ١٣، ...... متتالية حسابية عدد حدودها ٢٥ حداً، أوجد قيمة الحد الأخير

الحل

أ = ٣

نحسب الفرق بين كل حدين متتاليين

$ح_٢ - ح_١ = ٨ - ٣ = ٥$

د = ٥

$ح_{٢٥} =$ أ + ٢٤ د

$ح_{٢٥} = ٣ + ٢٤ \times ٥$

$ح_{٢٥} = ١٢٣$

(٨) إذا كانت ١٩، ١٥، ١١، ...... ،-٦١ متتالية حسابية ، أوجد قيمة الحد العاشر من النهاية

الحل

أ = ١٩   ل = -٦١

د = ١٥ – ١٩ = -٤

$ح_{١٠}$ من النهاية = ل - ٩د

$ح_{١٠} = -٦١ - ٩ \times (-٤)$

$ح_{١٠} = -٦١ + ٣٦$

$ح_{١٠} = -٢٥$

ثانياً: امثله لتعيين الحد العام للمتتالية الحسابية

لمعرفة الحد العام لأي متتالية حسابية يجب معرفة الحد الأول والأساس

(٩) اوجد الحد العام من المتتالية الحسابية ٧٢، ٦٧، ٦٢، ....

الحل

أ = ٧٢

د = ٦٧ – ٧٢ = -٥

$\therefore ح_ن =$ أ + (ن-١) × د

$\therefore ح_ن = ٧٢ + (ن-١) \times (-٥)$

$\therefore ح_ن = ٧٢ - ٥ن + ٥$

$\therefore ح_ن = ٧٧ - ٥ن$

(١٠) اوجد الحد العام من المتتالية الحسابية ٨١، ٧٧، ٧٣، ....

الحل

....

....

....

....

....

....

ثالثاً: امثله لتعيين عدد حدود المتتالية الحسابية

لمعرفة عدد حدود متتالية حسابية يستخدم قانون (الحد العام) = الحد الأخير

(١١) إذا كانت ٢، ٨، ١٤ .... ، ٦٨ تكون حدود متتالية حسابية، اوجد عدد حدودها

الحل

أ = ٢

د = ٨ – ٢ = ٦

∴ ح$_{ن}$ = أ + (ن-١) × د

∴ ٢ + (ن-١) × (٦) = ٦٨

٢+ ٦ن – ٦ = ٦٨

٦ن -٦ = ٦٨ – ٢ = ٦٦

٦ن = ٦٦ + ٦ = ٧٢ القسمة على ٦

ن = ١٢

(١٢) اوجد عدد الأعداد الصحيحة المحصورة بين ١١٠ و ٤٥٠ والتي كل منها يقبل القسمة على ١١

الحل

الاعداد التي تقبل القسمة على ١١ تبدأ بالعدد ١١٠ وتنتهي بالعدد ٤٤٠

وهي تمثل متتالية حسابية

بالتالي يكون أ = ١١٠ ، د = ١١

∴ ح$_{ن}$ = أ + (ن-١) × د

∴ ١١٠ + (ن-١) × (١١) = ٤٤٠

(ن-١) × (١١) = ٤٤٠ – ١١٠

(ن-١) × (١١) = ٣٣٠ القسمة على ١١

ن-١ = ٣٠

ن = ٣٠ + ١ = ٣١

رابعاً: امثله لتعيين المتتالية الحسابية

المقصود بتعيين المتتالية الحسابية هو معرفة قيمة كل من أ، د ثم إيجاد مجموعة من حدودها

(١٣) متتالية حسابية حدها السادس= ١٦ وحدها العشرون= ٤٤ أوجد المتتالية

الحل

أ + ٥د = ١٦

أ + ١٩د = ٤٤ بطرح المعادلتين

أ + ٥د = ١٦

-أ - ١٩د = -٤٤ الطرح يغير إشارات المعادلة الثانية

-١٤ د = -٢٨ القسمة على -١٤

د = ٢

بالتعويض عن د =٢ في المعادلة الأولى

أ + ٥(٢) = ١٦

أ= ٦

المتتالية هي: ٦، ٨، ١٠، ....

(١٤) ٣٦، س، ٢٤، ص متتالية حسابية أوجد كل من قيمة س، ص

الحل

أ= ٣٦ ح$_{٣}$= ٢٤

أ + ٢د = ٢٤

٣٦+٢د= ٢٤

٢د = ٢٤ -٣٦ = -١٢ القسمة على ٢

د = -٦

س هي الحد الثاني = ٣٦ -٦ = ٣٠

ص هي الحد الرابع = ٢٤-٦= ١٨

(١٥) متتالية حسابية حدها الخامس= ٢١ وحدها العاشر= ثلاثة أمثال الحد الثاني، أوجد المتتالية

الحل

أ + ٤د = ٢١ (١)

أ + ٩د = ٣(أ+ د)

أ + ٩د = ٣أ + ٣د

٢أ = ٦ د

أ = ٣د (٢)

بالتعويض عن أ في المعادلة (١)

٣د + ٤د = ٢١

٧د =٢١ القسمة على ٧

د = ٣

بالتعويض عن د =٣ في المعادلة (٢)

أ = ٣(٣) =٩

المتتالية هي: ٩، ١٢، ١٥، ....

(١٦) متتالية حسابية، مجموع حدودها الثاني والثالث والرابع = ٦ ، ومجموع حدودها السادس والسابع والثامن=٥٤، اوجد المتتالية

الحل

أ+ د + أ+ ٢د + أ + ٣د = ٦

٣أ + ٦د = ٦ القسمة على ٣

أ + ٢د = ٢ (١)

أ+ ٥د + أ+ ٦د + أ + ٧د =٥٤

٣أ + ١٨د = ٦ القسمة على ٣

أ + ٦د = ١٨ (٢)

بطرح المعادلتين (١)، (٢)

أ + ٢د = ٢

-أ – ٦د = -١٨

- ٤د = -١٤ القسمة على -٤

د =٤

بالتعويض عن د =٤ في المعادلة (١)

أ + ٢(٤)= ٢

أ = -٦

المتتالية هي: -٦، -٢، ٢، ....

خامساً: تعيين رتبة أي حد في المتتالية الحسابية

(١٧) متتالية حسابية ١٢، ١٤، ١٦، .... أوجد رتبة الحد الذي قيمته ١٠٢

الحل

أ = ١٢ د = ١٤-١٢= ٢

∴ $ح_ن$ = أ + (ن-١) × د

∴ ١٢ + (ن-١) × (٢) = ١٠٢

(ن-١) × (٢) = ١٠٢ – ١٢ =٩٠ القسمة على ٢

ن – ١ = ٤٥

ن = ٤٦

(١٨) متتالية حسابية ١٧، ٢٢، ٢٧، .... أوجد رتبة الحد الذي قيمته ٩٧

الحل

....

....

....

....

....

(١٩) متتالية حسابية ٣٥، ٣١، ٢٧، .... أوجد رتبة أول حد سالب

الحل

أ = ٣٥   د = ٣١-٣٥ = -٤

∴ $ح_{ن}$ = أ + (ن-١) × د

∴ ٣٥ + (ن-١) × (-٤) < ٠

-٤ن + ٤ < -٣٥

-٤ن < -٣٥ - ٤

-٤ن < -٣٩   القسمة على -٤

ن > ٩,٧٥   ن عدد صحيح أكبر من ٩,٧٥

ن = ١٠   أول حد سالب

$ح_{١٠}$ = ٣٥ + ٩× (-٤) = -١

(٢٠) متتالية حسابية ٢٨، ٢٥، ٢٢، .... أوجد رتبة وقيمة أخر حد موجب

الحل

أ = ٢٨   د = ٢٢-٢٥ = -٣

∴ $ح_{ن}$ = أ + (ن-١) × د

∴ ٢٨ + (ن-١) × (-٣) > ٠

-٣ن + ٣ > -٢٨

-٣ن > -٢٨ -٣

-٣ن > -٣١   القسمة على -٣

ن < ١٠,٣٣   ن عدد صحيح أصغر من ١٠,٣

ن = ١٠   اخر حد موجب

$ح_{١٠}$ = ٢٨ + ٩× (-٣) = ١

سادساً: تمارين ومسائل

(٢١) إذا كان $ح_{ن}$ هو الحد العام لمتتالية حسابية، $ح_{١}$=٥، $ح_{٣}$=١١، $ح_{ن}$ = ص + ن س، ضع دائرة حول قيمة ص-س

٨   ٦   ٤   -١

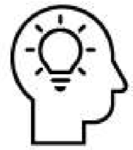
(٢٢) إذا كان $ح_{ن}$ هو الحد العام لمتتالية حسابية، $ح_{١}$=٩، $ح_{٣}$= ٣٦، $ح_{ن+١}$ = $ح_{ن}$ + ن س، ضع دائرة حول قيمة س

٩   ٨   ٦   ٤

(٢٣) متتالية حسابية فيها $ح_{ن+١}$ = $ح_{ن}$ – ١، $ح_{١}$ = ٥ أوجد قيمة الحد السادس

(٢٤) يمارس ناصر تمارين اللياقة البدنية لمدة ٨ دقائق في اليوم الأول ثم تزيد المدة دقيقتين يومياً
أوجد المدة التي يستغرقها في اليوم السابع

هل تستطيع إيجاد مجموع حدود المتتالية ٢، ٥، ٨، ١١، ١٤؟



الإجابة: ٢+ ٥+ ٨ + ١١+ ١٤= ٤٠

لكن ماذا لو كان لديك ١٠٠ حداً أو أكثر!

يجب أن تكون هناك صيغة رياضية تستخدم لحساب مجموع حدود المتتالية الحسابية

ويمكن حساب $\text{جـ}_{\text{ن}}$ (مجموع حدود المتتالية الحسابية) باستخدام احدى الصيغ التالية

$$\text{جـ}_{\text{ن}} = \frac{\text{ن}}{٢}\left[\text{أ} + \text{ل}\right]$$

تستخدم هذه الصيغة إذا علم

الحد الأول أ

الحد الأخير ل

عدد الحدود ن

$$\text{جـ}_{\text{ن}} = \frac{\text{ن}}{٢}\left[٢\text{أ} + (\text{ن}-١)\times \text{د}\right]$$

تستخدم هذه الصيغة إذا علم

الحد الأول أ

الأساس د

عدد الحدود ن

تطبق هذه الصيغة في جميع الحالات

مثال(١) اوجد مجموع حدود المتتالية ٢، ٥، ٨، ١١، ١٤

الحل

الحد الأول = ٢

الحد الأخير = ١٤

عدد الحدود = ٥

$$\text{جـ}_{٥} = \frac{٥}{٢}\left[٢ + ١٤\right]$$

$$\text{جـ}_{٥} = \frac{٥}{٢} \times ١٦$$

$$\text{جـ}_{٥} = ٤٠$$

الحل

الحد الأول = ٢

الاساس = ٥-٢ = ٣

عدد الحدود = ٥

$$\text{جـ}_{٥} = \frac{٥}{٢}\left[٢\times٢ + (٥-١)\times ٣\right]$$

$$\text{جـ}_{٥} = \frac{٥}{٢}\left[٤ + ٤\times ٣\right]$$

$$\text{جـ}_{٥} = \frac{٥}{٢} \times ١٦$$

$$\text{جـ}_{٥} = ٤٠$$

تمارين كتاب الطالب

(٢) أوجد عدد الحدود والمجموع للمتسلسلة الحسابية ١٣+١٧+٢١+.........٩٧

الحل

الحد الأول = ١٣ الأساس = ١٧-١٣= ٤

يجب معرفة عدد الحدود لإيجاد مجموع حدود المتسلسلة

ح$_{ن}$ = ٩٧

أ + (ن-١) ×د = ٩٧

١٣ + (ن-١) × ٤ =٩٧

(ن-١) × ٤ = ٩٧ -١٣ = ٨٤

ن- ١ = ٢١

ن = ٢١+١ = ٢٢

جـ$_{٢٢}$ = $\frac{٢٢}{٢}$ [١٣+ ٩٧]

جـ$_{٢٢}$ = $\frac{٢٢}{٢}$ × ١١٠

جـ$_{٥}$ = ١٢١٠

(٤) إذا كان الحدّ الأول في متتالية حسابية ١٥ ومجموع أول ٢٠ حدًّا فيها يساوي ١٦٣٠ ، فأوجِد أساس المتتالية

الحل

الحد الأول = ١٥ جـ$_{٢٠}$ = ١٦٣٠

بالتعويض في صيغة مجموع حدود المتتالية الحسابية نحصل على قيمة (د)

جـ$_{ن}$ = $\frac{ن}{٢}$ [٢أ + (ن-١)× د]

جـ$_{٢٠}$ = $\frac{٢٠}{٢}$ [٢×١٥+ ١٩× د] = ١٦٣٠

١٠[٣٠+ ١٩ د] = ١٦٣٠ بالقسمة على ١٠

٣٠ + ١٩د = ١٦٣

١٩ د = ١٦٣ – ٣٠ = ١٣٣ بالقسمة على ١٩

د = ٧

(٥) إذا كان الحد الأول في متتالية حسابية يساوي - ٢٧ وحدها السادس عشر يساوي ٧٨ وحدها الأخير يساوي ١٦٩ فأوجد

- أساس المتتالية وعدد حدودها
- مجموع حدود المتتالية

الحل

الحد الأول = -٢٧ $\quad$ ح$_{١٦}$ = ٧٨

بتحويل المعلومات السابقة الى معادلات نستخرج منها قيمة د

أ = -٢٧

أ + ١٥ د = ٧٨ $\quad$ الحد السادس عشر

بالتعويض عن قيمة أ = -٢٧ في المعادلة الثانية

-٢٧ + ١٥د = ٧٨

١٥د = ٧٨+٢٧

١٥د = ١٠٥ $\quad$ بالقسمة على ١٥

∴ د = ٧

لمعرفة عدد الحدود

ح$_{ن}$ = ١٦٩

أ + (ن-١) ×د = ١٦٩

-٢٧ + (ن-١) × ٧ =١٦٩

(ن-١) × ٧ = ١٦٩ +٢٧ = ١٩٦ $\quad$ بالقسمة على ٧

ن- ١ =٢٨

ن = ٢٨+١ = ٢٩

بالتعويض في صيغة مجموع حدود المتتالية

جـ$_{ن}$ = $\frac{ن}{٢}$ [أ + ل]

جـ$_{٢٩}$ = $\frac{٢٩}{٢}$ [-٢٧ + ١٦٩]

∴ جـ$_{٢٩}$ = ٢٠٥٩

(٦) إذا كان أول حدَّين في متتالية حسابية هما ١٤٦ ، ١٣٩ ، والحدّ الأخير هو - ٤٣ ، فأوجِد مجموع حدود المتتالية

الحل

الحد الأول = ١٤٦ $ح_{٢}$ = ١٣٩

د = $ح_{٢} - ح_{١}$

د= ١٣٩ – ١٤٦ = -٧

لمعرفة عدد الحدود

$ح_{ن}$ = -٤٣

أ + (ن-١) ×د = -٤٣

١٤٦ + (ن-١) × (-٧) =- ٤٣

(ن-١) × (-٧) = -٤٣ -١٤٦= - ١٨٩ بالقسمة على (-٧)

ن- ١= ٢٧

ن = ٢٧+١ = ٢٨

بالتعويض في صيغة مجموع حدود المتتالية

$جـ_{ن} = \frac{ن}{٢}$ [أ + ل]

$جـ_{٢٨} = \frac{٢٨}{٢}$ [١٤٦ + (-٤٣)]

∴ $جـ_{٢٨}$ = ١٤٤٢

(٧) إذا كان أول حدَّين في متتالية حسابية هما ٢، ٩ والحدّ الأخير في المتتالية هو الحدّ الوحيد الأكبر من ١٥٠ ، فأوجِد مجموع حدود المتتالية.

الحل

الحد الأول = ٢ $ح_{٢}$ = ٩

د = $ح_{٢}$ ـ $ح_{١}$

د= ٩ – ٢ = ٧

لمعرفة عدد الحدود

$ح_{ن}$ > ١٥٠

أ + (ن-١) ×د > ١٥٠

٢ + (ن-١) × ٧ > ١٥٠

(ن-١) × ٧ > ١٥٠ -٢

(ن-١) × ٧ > ١٤٨

ن-١ > ٢١,١٤

ن > ٢١,١٤ + ١

ن > ٢٢,١٤

ن = ٢٣

للتحقق

$ح_{٢٢}$ = ٢ + ٢١ × ٧ = ١٤٩

$ح_{٢٣}$ = ٢ + ٢٢ × ٧ = ١٥٦

بالتعويض في صيغة مجموع حدود المتتالية

$جـ_{ن} = \frac{ن}{٢} [أ + ل]$

$جـ_{٢٣} = \frac{٢٣}{٢} [٢ + ١٥٦]$

∴ $جـ_{٢٣}$ = ١٨١٧

(٨) إذا كان الحدّ الأول في متتالية حسابية ١٥ والحدّ الأخير ٢٧ ، وكان مجموع أول خمسة حدود في المتتالية يساوي ٧٩ ، فأوجِد عدد حدود المتتالية

الحل

الحد الأول = ١٥ ل= ٢٧ $ج_{٥}$ = ٧٩

أ = ١٥

$ج_{٥} = \frac{٥}{٢}$ [٢×١٥+ ٤× د] = ٧٩

٣٠ + ٤د = ٧٩ × $\frac{٢}{٥}$

٣٠ + ٤د = ٣١,٦

٤د = ٣١,٦ − ٣٠ = ١,٦

د = ١,٦ ÷ ٤ = ٠,٤

لمعرفة عدد الحدود

$ح_{ن}$ = ٢٧

أ + (ن-١) ×د = ٢٧

١٥ + (ن-١) × ٠,٤ = ٢٧

(ن-١) × ٠,٤ = ٢٧ − ١٥

(ن-١) × ٠,٤ = ١٢ بالقسمة على ٠,٤

ن- ١ = ٣٠

ن = ٣٠+١ = ٣١

∴ ن = ٣١

(٩) أوجد مجموع الأعداد الصحيحة الواقعة بين ١٠٠ ، ٣٠٠ والتي هي من مضاعفات العدد ٧

الحل

اول عدد من مضاعفات العدد ٧ هو ١٠٥

أ = ١٠٥   د = ٧

$ح_ن$ < ٣٠٠

أ + (ن-١) ×د < ٣٠٠

١٠٥ + (ن-١) × ٧ < ٣٠٠

(ن-١) × ٧ < ٣٠٠ -١٠٥

(ن-١) × ٧ < ١٩٥

ن-١ < ٢٧,٨

ن < ٢٧,٨ + ١

ن < ٢٨,٨

ن = ٢٨

للتحقق

$ح_{٢٨}$ = ١٠٥ + ٢٧ × ٧ = ٢٩٤

$ح_{٢٩}$ = ١٠٥ + ٢٨ × ٧ = ٣٠١

بالتعويض في صيغة مجموع حدود المتتالية

$جـ_ن = \frac{ن}{٢}$ [أ + ل]

$جـ_{٢٨} = \frac{٢٨}{٢}$ [١٠٥+ ٢٩٤]

∴ $جـ_{٢٨}$ = ٥٥٨٦

(١٠) إذا كان الحدّ الأول في متتالية حسابية هو ٢ والحدّ الحادي عشر هو ١٧ ومجموع حدود المتتالية يساوي ٥٠٠ ، فأوجِد عدد حدود المتتالية.

الحل

الحد الأول = ٢ $\quad$ $ح_{١١} = ١٧$

بتحويل المعلومات السابقة الى معادلات نستخرج منها قيمة د

أ = ٢

أ + ١٠ د = ١٧ $\quad$ الحد الحادي عشر

بالتعويض عن قيمة أ = ٢ في المعادلة الثانية

٢ + ١٠د = ١٧

١٠د = ١٧ - ٢

١٠د = ١٥ $\quad$ بالقسمة على ١٠

∴ د = ١,٥

بالتعويض في صيغة مجموع حدود المتتالية

$جـ_{ن} = \frac{ن}{٢}$ [٢×٢ + (ن-١) × ١,٥] = ٥٠٠

$\frac{ن}{٢}$ [٢×٢ + ١,٥ ن - ١,٥] = ٥٠٠

$\frac{ن}{٢}$ [٢,٥ + ١,٥ ن] = ٥٠٠

$\frac{ن}{٢}$ [$\frac{٥}{٢}$ + $\frac{٣}{٢}$ ن] = ٥٠٠

ن [$\frac{٥}{٢}$ + $\frac{٣}{٢}$ ن] = ١٠٠٠ $\quad$ بالضرب × ٢

ن [٥ + ٣ن] = ٢٠٠٠ $\quad$ بالضرب × ٢

٣ن^{٢} + ٥ن − ٢٠٠٠ = ٠

(٣ن + ٨٠) (ن − ٢٥) = ٠

ن = $\frac{-٨٠}{٣}$ $\quad$ ن = ٢٥

∴ ن = ٢٥

(١١) اشترى ماجد سيارة بمبلغ ٨٠٠٠ ريال عُماني (تتضمّن الفائدة)، ودفع ثمن السيارة على دفعات شهرية تشكّل متتالية حسابية. إذا علمت أن أول دفعة كانت ٢٠٠ ريال عُماني، وعدد الدفعات ١٦ دفعة، فأوجد الدفعة الخامسة

الحل

الحد الأول = ٢٠٠ ن= ١٦ $جـ_{١٦} = ٨٠٠٠$

بتحويل المعلومات السابقة الى معادلات نستخرج منها قيمة د

أ = ٢٠٠

$جـ_{١٦} = \frac{١٦}{٢} [٢\times٢٠٠ + ١٥\times د] = ٨٠٠٠$

٨ [٤٠٠ + ١٥د] = ٨٠٠٠ بالقسمة على ٨

٤٠٠ + ١٥ د = ١٠٠٠

١٥د = ١٠٠٠ − ٤٠٠ = ٦٠٠ بالقسمة على ١٥

د = ٤٠

الدفعة الخامسة هي الحد الخامس

$ح_{٥} = أ + ٤د$

$ح_{٥} = ٢٠٠ + ٤ \times ٤٠ = ٣٦٠$

∴ **الدفعة الخامسة = ٣٦٠ ريال**

(١٢) إذا كان $ح_٦$ في متتالية حسابية هو -٣، ومجموع أول عشرة حدود يساوي -١٠٠، اوجد

- الحد الأول والأساس
- قيمة ن إذا علم ان قيمة الحد النوني = -٥٩

الحل

$ح_٦ = -٣$ $ج_{١٠} = -١٠٠$

بتحويل المعلومات السابقة الى معادلات نستخرج منها قيمة أ، د

أ + ٥د= -٣ (١)

$\frac{١٠}{٢}$ [٢×أ+ ٩×د] = -١٠٠

٥ [٢أ + ٩د] = -١٠٠ بالقسمة على٥

٢أ+ ٩ د = -٢ (٢)

بضرب المعادلة (١) × -٢ وجمع المعادلتين (١)، (٢)

-٢أ-١٠د= ٦

٢أ + ٩د = -٢

-د = ٤

∴ د= -٤

بالتعويض في المعادلة (١) عن قيمة د =-٤

أ - ٢٠ = -٣

∴ أ= ١٧

بالتعويض في صيغة الحد النوني = -٥٩ لإيجاد قيمة ن

١٧+ (ن-١) × (-٤) = -٥٩

-٤(ن-١) = -٥٩ -١٧ = -٧٦

ن-١ = ١٩

∴ ن = ٢٠

(١٣) إذا كان مجموع أول ن حدًّا، في متتالية حسابية هو جـ ن = ٤ن^{٢}+٣ن، أوجد الحد الأول والأساس

الحل

جـ ن = $\frac{ن}{٢}$ [٢أ + (ن-١)× د]

بفك صيغة المجموع وكتابتها في أبسط صورة

جـ ن = ن أ + ن^{٢} $\frac{د}{٢}$ - ن $\frac{د}{٢}$

جـ ن = ن^{٢} $\frac{د}{٢}$ +ن (أ - $\frac{د}{٢}$)

∴ ن^{٢} $\frac{د}{٢}$ +ن (أ - $\frac{د}{٢}$) = ٤ن^{٢}+٣ن

بمساواة معاملات ن^{٢} ، ن

$\frac{د}{٢}$ = ٤ د = ٨	أ - $\frac{د}{٢}$= ٣ أ – ٤ = ٣ أ = ٧

(١٤) إذا كان مجموع أول ن حدًّا، في متتالية حسابية هو جـ ن = ١٢ن -٢ن^{٢}، أوجد الحد الأول والأساس

الحل

نفس فكرة التمرين السابق

جـ ن = ن^{٢} $\frac{د}{٢}$ +ن (أ - $\frac{د}{٢}$)

∴ ن^{٢} $\frac{د}{٢}$ +ن (أ - $\frac{د}{٢}$) = -٢ن^{٢}+١٢ن

بمساواة معاملات ن^{٢} ، ن

$\frac{د}{٢}$ = -٢ د = -٤	أ - $\frac{د}{٢}$= ١٢ أ + ٢ = ١٢ أ = ١٠

(١٥) إذا كان مجموع أول ن حدًا، في متتالية حسابية هو $جـ_ن = \frac{١}{٤}(٥ن^٢ - ١٧ن)$، أوجد الحد العام

الحل

نفس فكرة التمرين السابق

$جـ_ن = ن^٢ \frac{د}{٢} + ن\,(أ - \frac{د}{٢})$

$\therefore ن^٢ \frac{د}{٢} + ن\,(أ - \frac{د}{٢}) = \frac{٥}{٤} ن^٢ - \frac{١٧}{٤} ن$

بمساواة معاملات $ن^٢$ ، ن

$\frac{د}{٢} = \frac{٥}{٤}$	$أ - \frac{د}{٢} = \frac{-١٧}{٤}$
$د = \frac{٥}{٢}$	$أ - \frac{٥}{٤} = \frac{-١٧}{٤}$
	$أ = \frac{-١٧}{٤} + \frac{٥}{٤} = -٣$

بالتعويض في صيغة الحد النوني

$ح_ن = -٣ + (ن-١) \times \frac{٥}{٢}$

$ح_ن = -٣ + \frac{٥}{٢}ن - \frac{٥}{٢}$

$ح_ن = \frac{٥}{٢}ن - \frac{١١}{٢}$

(١٦) دائرة قُسّمت إلى عشرة قطاعات دائرية، بحيث تشكّل قياسات زوايا القطاعات متتالية حسابية. إذا كان قياس زاوية القطاع الأكبر يساوي سبعة أمثال قياس زاوية القطاع الأصغر، فأوجِد قياس زاوية القطاع الأصغر

الحل

عشرة قطاعات دائرية: ن = ١٠

زاوية القطاع الأصغر : الحد الأول = أ

زاوية القطاع الأكبر : الحد الأخير = ل = أ + ٩ د

مجموع قياسات الزوايا المركزية في الدائرة: $ج_{١٠} = ٣٦٠^\circ$

قياس زاوية القطاع الأكبر يساوي سبعة أمثال قياس زاوية القطاع الأصغر

أ + ٩د = ٧أ

٦أ = ٩ د

أ = ١,٥ د

$ج_{١٠} = \frac{١٠}{٢}[٢ × أ + ٩ × د] = ٣٦٠$

$\frac{١٠}{٢}[٢ × (١,٥د) + ٩ د] = ٣٦٠$

٥[١٢د]=٣٦٠

٦٠د = ٣٦٠ بالقسمة على ٦٠

∴ د = ٦

∴ أ = ١,٥ × ٦ = ٩

(١٧) إذا كان الحدّ الأول في متتالية حسابية (أ)، وأساسها (د)، وكان مجموع أول ٢٠ حدًّا فيها يساوي سبعة أمثال مجموع أول خمسة حدود، فأوجد كلًّ ممّا يأتي:

- قيمة د بدلالة أ
- الحد الخامس والستين بدلالة أ

الحل

$\text{ج}_{٢٠} = \frac{٢٠}{٢}[٢\times\text{أ} + ١٩\times\text{د}]$

$\text{ج}_{٢٠} = ١٠(٢\text{أ} + ١٩\text{د})$

$\text{ج}_{٢٠} = ٢٠\text{أ} + ١٩٠\text{د}$

$\text{ج}_{٥} = \frac{٥}{٢}[٢\times\text{أ} + ٤\times\text{د}]$

$\text{ج}_{٥} = \frac{٥}{٢}[٢\text{أ} + ٤\text{د}]$

$\text{ج}_{٥} = ٥\text{أ} + ١٠\text{د}$

$\therefore ٢٠\text{أ} + ١٩٠\text{د} = ٧(٥\text{أ} + ١٠\text{د})$

$٢٠\text{أ} + ١٩٠\text{د} = ٣٥\text{أ} + ٧٠\text{د}$

$١٩٠\text{د} - ٧٠\text{د} = ٣٥\text{أ} - ٢٠\text{أ}$

$١٢٠\text{د} = ١٥\text{أ}$

$\therefore \text{د} = \frac{١}{٨}\text{أ}$

$\text{ح}_{٦٥} = \text{أ} + ٦٤\text{د}$

$\text{ح}_{٦٥} = \text{أ} + ٦٤\times\frac{١}{٨}\text{أ}$

$\text{ح}_{٦٥} = \text{أ} + ٨\text{أ}$

$\therefore \text{ح}_{٦٥} = ٩\text{أ}$

(١٨) إذا كان الحدّ العاشر في متتالية حسابية يساوي ثلاثة أمثال الحدّ الثالث، فأثبت أن مجموع الحدود العشرة الأولى يساوي ثمانية أمثال مجموع الحدود الثلاثة الأولى.

الحل

ح$_{١٠}$ = أ + ٩ د

ح$_{٣}$ = أ + ٢ د

∴ أ + ٩ د = ٣ (أ + ٢د)

أ + ٩د = ٣أ + ٦ د

∴ ٢أ = ٣ د

جـ$_{١٠}$ = $\frac{١٠}{٢}$ [٢أ + ٩د]

جـ$_{١٠}$ = ٥(٢أ + ٩د)

جـ$_{١٠}$ = ١٠ أ + ٤٥ د بالتعويض عن قيمة د

جـ$_{١٠}$ = ١٠ أ + ٤٥ × $\frac{٢}{٣}$ أ

جـ$_{١٠}$ = ٤٠ أ (١)

جـ$_{٣}$ = $\frac{٣}{٢}$[٢أ + ٢ د]

جـ$_{٣}$ = ٣أ + ٣ د

جـ$_{٣}$ = ٣ أ + ٣ × $\frac{٢}{٣}$ أ بالتعويض عن قيمة د

جـ$_{٣}$ = ٥ أ (٢)

من المعادلتين (١) ، (٢)

جـ$_{١٠}$ = ٨ (٥ أ)

∴ جـ$_{١٠}$ = ٨ جـ$_{٣}$

(١٩) إذا كان الحدّ الأول في متتالية حسابية هو جا^{٢}س، والحد الثاني = ١

- اكتب عبارة تمثّل الحدّ الخامس في المتتالية بدلالة جا س.
- أثبت أن مجموع أول عشرة حدود في المتتالية هو ١٠ + ٣٥ جتا^{٢} س

الحل

ح$_{١}$ = جا^{٢} س

ح$_{٢}$ = ١

∴ د = ١ - جا^{٢}س

ح$_{٥}$ = أ + ٤د

ح$_{٥}$ = جا^{٢}س + ٤ (١-جا^{٢}س)

ح$_{٥}$ = جا^{٢}س + ٤ -٤جا^{٢}س

∴ ح$_{٥}$ = ٤ - ٣جا^{٢}س

جـ$_{١٠}$ = $\frac{١٠}{٢}$ [٢أ+ ٩د]

جـ$_{١٠}$ = ٥[٢جا^{٢}س+ ٩(١-جا^{٢}س)]

جـ$_{١٠}$ = ١٠ جا^{٢}س + ٤٥ (١-جا^{٢}س)

جـ$_{١٠}$ = ١٠ جا^{٢}س + ٤٥ -٤٥ جا^{٢}س

جـ$_{١٠}$ = ٤٥ -٣٥ جا^{٢}س

جـ$_{١٠}$ = ١٠ + ٣٥ -٣٥ جا^{٢}س

جـ$_{١٠}$ = ١٠ +٣٥ (١ – جا^{٢} س)

∴ جـ$_{١٠}$ = ١٠ +٣٥ جتا^{٢}س

تذكر

جتا^{٢}س = ١- جا^{٢}س

(٢٠) مجموع رقمَي العدد ٦٧ هو ١٣ (٦ + ٧ = ١٣)

- بيّن أن مجموع أرقام الأعداد الصحيحة من ١٩ إلى ٢١ هو ١٥
- أوجِد مجموع أرقام الأعداد الصحيحة من ١ إلى ٩٩

الحل

باستخدام القاعدة الموجودة

١٩ + ٢٠ + ٢١ = ٩ + ١ + ٠ +٢ + ١ +٢ =١٥

مجموع أرقام الأعداد الصحيحة من ١ إلى ٩٩ تشكل متتالية حسابية حدها الأول ١، أساسها ١، عدد حدودها ٩٩

ولكن هل يناسب استخدام صيغة مجموع حدود المتتالية الحسابية مع القاعدة الموجودة في السؤال

سوف نقوم بتقسيم الأعداد من ١ الى ٩٩ حسب منزلة العشرات

فئة الأعداد	المجموع حسب القاعدة
١ الى ٩	٤٥
١٠ الى ١٩	٤٥ + ١٠(١) = ٥٥
٢٠ الى ٢٩	٤٥ + ١٠(٢) = ٦٥
٣٠ الى ٣٩	٤٥ + ١٠(٣) = ٧٥
٤٠ الى ٤٩	٤٥ + ١٠(٤) = ٨٥
٥٠ الى ٥٩	٤٥ + ١٠(٥) = ٩٥
٦٠ الى ٦٩	٤٥ + ١٠(٦) = ١٠٥
٧٠ الى ٧٩	٤٥ + ١٠(٧) = ١١٥
٨٠ الى ٨٩	٤٥ + ١٠(٨) = ١٢٥
٩٠ الى ٩٩	٤٥ + ١٠(٩) = ١٣٥

دليل

١١+١٢+١٣+١٤+١٥+١٦+١٧+١٨+١٩

= ١+١+٢+١+٣+١+٤+١+٥+١+٦+١+٧+١+٨+١+٩+١

= ٤٥ + ١٠(١) = ٥٥

$ج_{١٠} = \frac{١٠}{٢}$ [أ+ ل]

$ج_{١٠}$ = ٥ × [٤٥ +١٣٥]

$ج_{١٠}$ = ٥ × ١٨٠ = ٩٠٠

تأمل الأعداد ٢، ٦، ١٨، ٥٤، ......

تلاحظ ابتداءً من الحد الثاني يكون كل حد يساوي ٣ أمثال الحد السابق له

تسمى هذه المتتالية، متتالية هندسية

> تكون النسبة بين كل حدين متتاليين في المتتالية الهندسية مقدار ثابت يسمى الأساس (النسبة المشتركة)

هناك بعض الرموز الهامة التي تستخدم مع المتتاليات الحسابية

أ : الحد الأول | ر : أساس المتتالية | ن: عدد الحدود

بالتالي يمكن كتابة حدود أي متتالية هندسية على النمط التالي

الحد الأول	الحد الثاني	الحد الثالث	الحد الرابع	الحد الخامس
أ	أ ر	أ $ر^{٢}$	أ $ر^{٣}$	أ $ر^{٤}$

يمكن اختصار كتابة الحدود على النحو: الحد الخامس = $ح_{٥}$

وباستمرار النمط في الجدول السابق يمكن الحصول على قيمة أي حد من خلال الحد العام ويرمز له بالرمز $ح_{ن}$

$$ح_{ن} = أ\,ر^{ن-١} \quad ،\ ر \neq ٠$$

امثلة وتمارين

(١) حدّد ما إذا كانت كل متتالية من المتتاليات الآتية هندسية، أم لا وإذا كانت المتتالية هندسية، فاكتب أساسها وحدّها الثامن:

(أ) ٢، ٤، ٨، ١٤، ......

$ح_{٢} \div ح_{١} = ٤ \div ٢ = ٢$

$ح_{٤} \div ح_{٣} = ١٤ \div ٨ \neq ٢$

∴ تمثل لا متتالية هندسية

(ب) ٧، ٢١، ٦٣، ١٨٩، ....

$ح_{٢} \div ح_{١} = ٢١ \div ٧ = ٣$

$ح_{٤} \div ح_{٣} = ١٨٩ \div ٦٣ = ٣$

∴ تمثل متتالية هندسية

$ح_{٨} = أ\,ر^{٧} = ٧ \times (٣)^{٧} = ١٥٣٠٩$

(٣) إذا كان الحدّ الأول في متتالية هندسية ٢٧٠ والحدّ الرابع ٨٠ ، فأوجِد أساس المتتالية.

الحل

$ح_١ = ٢٧٠$ $\quad\quad$ $ح_٤ = ٨٠$

إعادة كتابة المعلومات السابقة على هيئة معادلات

أ = ٢٧٠ $\quad\quad$ (١)

$أ ر^٣ = ٨٠$ $\quad\quad$ (٢)

بقسمة المعادلة (٢) على المعادلة (١)

$$\frac{أ ر^٣}{أ} = \frac{٨٠}{٢٧٠}$$

$ر^٣ = \frac{٨}{٢٧}$ $\quad\quad$ بأخذ الجذر التكعيبي

$ر = \frac{٢}{٣}$

(٤) إذا كان الحدّ الأول في متتالية هندسية ٥٠ والحدّ الثاني -٣٠ ، فأوجِد الحدّ الرابع

الحل

$ح_١ = ٥٠$ $\quad\quad$ $ح_٢ = -٣٠$

إعادة كتابة المعلومات السابقة على هيئة معادلات

أ = ٥٠ $\quad\quad$ (١)

أ ر = -٣٠ $\quad\quad$ (٢)

بقسمة المعادلة (٢) على المعادلة (١)

$$\frac{أ ر}{أ} = \frac{-٣٠}{٥٠}$$

$ر = \frac{-٣}{٥}$

$أ ر^٣ = ٥٠ \times \left(\frac{-٣}{٥}\right)^٣$

$ح_٤ = \frac{-٥٤}{٥}$

(٥) إذا كان الحدّ الثاني في متتالية هندسية ١٢ والحدّ الرابع ٢٧ ، فأوجِد الأساس والحدّ الأول (إذا علمت أن جميع حدّود المتتالية موجبة)

الحل

أ ر = ١٢ $\quad\quad$ $أ ر^٣ = ٢٧$

بقسمة $ح_٤ \div ح_٢$

$$\frac{أ ر^٣}{أ ر} = \frac{٢٧}{١٢}$$

$ر^٢ = \frac{٩}{٤}$ $\quad\quad$ بأخذ الجذر التربيعي

$ر = \mp \frac{٣}{٢}$ $\quad\quad$ حدود المتتالية موجبة أي $ر = \frac{٣}{٢}$

بالتعويض في أ ر = ١٢

$أ \times \frac{٣}{٢} = ١٢$ $\quad\quad$ $أ = ١٢ \times \frac{٢}{٣} = ٨$

(٦) إذا كان مجموع الحدَّين الثاني والثالث في متتالية هندسية ٨٤ ، ويقلّ الحدّ الثاني عن الحدّ الأول بمقدار ١٦ ، فأوجِد الحدّ الأول في المتتالية علمًا بأن جميع الحدود موجبة.

الحل

$أ ر + أ ر^{٢} = ٨٤$ (١)

$أ - أ ر = ١٦$ (٢)

بقسمة المعادلة (١) على المعادلة (٢)

$$\frac{أ ر + أ ر^{٢}}{أ - أ ر} = \frac{٨٤}{١٦}$$

بأخذ أ عامل مشترك من كل من البسط والمقام

$$\frac{أ(ر + ر^{٢})}{أ(١ - ر)} = \frac{٨٤}{١٦}$$

$$\frac{(ر + ر^{٢})}{(١ - ر)} = \frac{٢١}{٤}$$ بالضرب التبادلي

$٤ر^{٢} + ٤ر = ٢١ - ٢١ر$

$٤ر^{٢} + ٤ر - ٢١ + ٢١ر = ٠$

$٤ر^{٢} + ٢٥ر - ٢١ = ٠$

$(٤ر - ٣)(ر + ٧) = ٠$

$ر = \frac{٣}{٤}$ $ر = -٧$ (مرفوض)

بالتعويض عن ر في المعادلة (٢)

$أ - \frac{٣}{٤} أ = ١٦$

$\frac{١}{٤} أ = ١٦$

$أ = ١٦ \times ٤$

$أ = ٦٤$

(٧) إذا علمت أن ثلاثة حدود متتابعة في متتالية هندسية هي س، ٤، (س + ٦)، فأوجِد القيم الممكنة لـ س

الحل

من تعريف المتتالية الهندسية تكون النسبة بين كل حدين متتالين مقدار ثابت

$\therefore \frac{٤}{س} = \frac{س+٦}{٤}$ بالضرب التبادلي

س(س+٦) = ١٦

س^{٢} + ٦س = ١٦

س^{٢} + ٦س -١٦ = ٠

(س+ ٨) (س-٢) = ٠

$\therefore$ س= -٨ س =٢

المتتالية الهندسية: أ، أر، أر^{٢}، ......

يمكن إيجاد مجموع ن حداً من حدود هذه المتتالية باستخدام احدى الصيغ التالية

$$\frac{أ(ر^{ن}-١)}{ر-١} \qquad \frac{أ(١-ر^{ن})}{١-ر}$$

أمثلة وتمارين

(١) أوجِد مجموع أول ثمانية حدود في كل مما يأتي

٣+ ٦ + ١٢+ ٢٤+	١-٢ +٤ − ٨ ....
أ = ٣	أ =١
$ر = \frac{ع_{٢}}{ع_{١}} = \frac{٦}{٣} = ٢$	$ر = \frac{ع_{٢}}{ع_{١}} = \frac{-٢}{١} = -٢$
$ج_{٨} = \frac{٣(٢^{٨}-١)}{٢-١} = ٧٦٥$	$ج_{٨} = \frac{١((-٢)^{٨}-١)}{-٢-١} = -٨٥$

(٢) إذا كانت الحدود الأربعة الأولى في متتالية هندسية هي ٠,٥ ، ١، ٢، ٤، فأوجِد أقل عدد ممكن من الحدود يكون مجموعها أكبر من ١٠٠٠٠٠٠

الحل

أ = ٠,٥ $\qquad ر = \frac{ع_{٢}}{ع_{١}} = \frac{١}{٠,٥} = ٢$

$$ج_{ن} = \frac{\frac{١}{٢}(٢^{ن}-١)}{٢-١} \qquad \frac{\frac{١}{٢}(٢^{ن}-١)}{٢-١} > ١٠٠٠٠٠٠$$

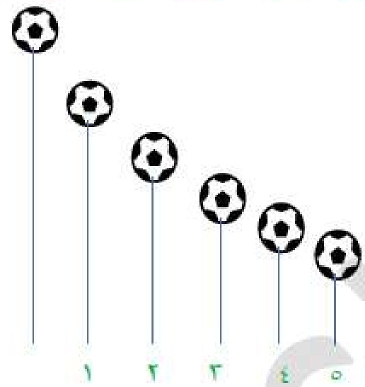
$$\frac{١}{٢}(٢^{ن}-١) > ١٠٠٠٠٠٠ \longrightarrow ٢^{ن}-١ > ٢٠٠٠٠٠٠$$

$$٢^{ن} > ٢٠٠٠٠٠١$$ بالتجريب لقيم ن $\qquad$ ن= ٢١

(٣) تمّ رمي كرة رأسيًّا إلى الأعلى (من الأرض)، وصلت الكرة إلى ارتفاع ٨ م، ثم ارتطمت بالأرض وارتدّت. بعد كل ارتداد ترتفع $\frac{٣}{٤}$ الارتفاع السابق لهذا الارتداد.

- اكتب عبارة جبرية لارتفاع الكرة بعد ارتطامها ن مرة بالأرض.
- أوجِد مجموع المسافات التي تخطّتها الكرة من الرمية الأولى حتى الارتطام الخامس بالأرض.

الحل



كل رقم يشير الى رقم الارتطام بالأرض

اول ارتفاع وصلت اليه الكرة = ٨م

الحد الأول = ٨

ر = $\frac{٣}{٤}$

$ح_ن = أ ر^{ن-١}$

$\therefore ح_ن = ٨ \left(\frac{٣}{٤}\right)^{ن-١}$

المسافات التي تخطتها الكرة حتى الارتطام الخامس: أي لن تحسب المسافة بعد الارتطام الخامس

كل مسافة تضرب × ٢ وذلك نتيجة الصعود والهبوط

عدد حدود المتتالية الهندسية حتى الارتطام الخامس: ٥ حدود (لاحظ المخطط السابق)

$$\therefore جـ_٥ = \frac{٨\left(\left(\frac{٣}{٤}\right)^٥ - ١\right)}{\frac{٣}{٤} - ١} \times ٢$$

$$\therefore جـ_٥ = \frac{٧٨١}{٣٢} \times ٢$$

$\therefore$ مجموع المسافات التي تخطّتها الكرة من الرمية الأولى حتى الارتطام الخامس بالأرض = $\frac{٧٨١}{١٦}$

(٤) إذا كان الحدّ الثاني في متتالية هندسية يساوي ٢٤ والحدّ الثالث هو ١٢ (س+١).

- أوجِد بدلالة س الحدّ الأول في المتتالية
- إذا علمت أن مجموع أول ثلاثة حدود هو ٧٦ ، فأوجِد قيم س الممكنة

الحل

أ ر = ٢٤ (١)

أ ر^{٢} = ١٢(س+١) (٢)

بقسمة (٢) على (١) نحصل على ر

$$\frac{أ ر^{٢}}{أ ر} = \frac{١٢(س+١)}{٢٤}$$

$$\therefore ر = \frac{(س+١)}{٢}$$

بالتعويض في المعادلة (١) للحصول على قيمة أ

$\therefore$ أ = $\frac{(س+١)}{٢}$ = ٢٤ بالضرب التبادلي

$\therefore$ أ = $\frac{٤٨}{س+١}$ (المطلوب الأول)

مجموع أول ثلاثة حدود = ٧٦

$\therefore$ $\frac{٤٨}{س+١}$ + ٢٤ + ١٢ (س+١) = ٧٦ بالضرب × (س+١)

٤٨ + ٢٤(س+١) + ١٢(س+١)^{٢} = ٧٦ (س+١)

١٢(س+١)^{٢} + ٢٤(س+١) + ٤٨ − ٧٦(س+١) = ٠

١٢(س+١)^{٢} - ٥٢(س+١)+٤٨ = ٠ بالقسمة على ٤

٣(س+١)^{٢} - ١٣(س+١) + ١٢ = ٠ بوضع س+١ = ص والتحليل

٣ص^{٢} − ١٣ ص + ١٢ = ٠

(٣ص − ٤) (ص-٣) = ٠

ص= $\frac{٤}{٣}$ ص= ٣

س+١ = $\frac{٤}{٣}$ س+١= ٣ س= $\frac{١}{٣}$ س= ٢

(٥) إذا كان الحدّ الثالث في متتالية هندسية يساوي تسعة أمثال الحدّ الأول، وكان مجموع أول أربعة حدود فيها يساوي ك مرة الحدّ الأول، فأوجِد قيم **ك** الممكنة

الحل

$أر^٢ = ٩أ$ بالقسمة على أ

$ر^٢ = ٩$

$ر = \pm ٣$

عند ر =٣

$$ج_٤ = \frac{أ(٣^٤ - ١)}{٣ - ١}$$

ك أ = ٤٠ أ

ك = ٤٠

عند ر = -٣

$$ج_٤ = \frac{أ((-٣)^٤ - ١)}{-٣ - ١}$$

ك أ = -٢٠ أ

ك = -٢٠

---

(٦) تقدّم شركة تبرّعًا سنويًا لجمعية خيرية. وتتزايد قيمة التبرّع بمقدار ١٠ % سنويًا. إذا علمت أن قيمة التبرّع سنة ٢٠١٠ م تساوي ١٠٠٠٠ ريال عُماني، فأوجد:

- قيمة التبرّع سنة ٢٠١٦ م.
- مجموع التبرّعات من سنة ٢٠١٠ م حتى ٢٠١٦ م.

الحل

ر = مقدار المضاعفة للمبلغ السابق (١٠٠٪ + ١٠٪) = ١,١

أ = ١٠٠٠٠

في عام ٢٠١٦ هو التبرع السابع

$ح_٧ = أ ر^٦$

$ح_٧ = ١٠٠٠٠ (١,١)^٦$

$ح_٧ = ١٧٧١٥,٦١$ ريال

$$ج_٧ = \frac{١٠٠٠٠(١,١^٧ - ١)}{١,١ - ١}$$

= ٩٤٨٧١,٧١ ريال

(٧) إذا كان الحدّ الأول في متتالية هندسية (أ) والأساس (ر) ومجموع أول ن حدًّا جـ ن بيّن أن

$$\frac{ج_{٣ن} - ج_{٢ن}}{ج_{ن}} = ر^{٢ن}$$

الحل

$$ج_{٣ن} = \frac{أ(ر^{٣ن} - ١)}{ر - ١}$$

$$ج_{٢ن} = \frac{أ(ر^{٢ن} - ١)}{ر - ١}$$

$$ج_{ن} = \frac{أ(ر^{ن} - ١)}{ر - ١}$$

نلاحظ تكرار المقطع

$$\frac{أ}{ر - ١}$$

بالتالي عند كتابة أي عبارة جبرية أو كسر جبري يحتوي على جـ٣ن، جـ٢ن، جـ ن

يتم قسمة جميع الحدود على هذا المقطع

بقسمة جميع حدود الكسر $\frac{ج_{٣ن} - ج_{٢ن}}{ج_{ن}}$ على $\frac{أ}{ر - ١}$

$$\frac{(ر^{٣ن} - ١) - (ر^{٢ن} - ١)}{(ر^{ن} - ١)}$$

$$\frac{ر^{٣ن} - ١ - ر^{٢ن} + ١}{(ر^{ن} - ١)}$$

$$\frac{ر^{٣ن} - ر^{٢ن}}{(ر^{ن} - ١)} = \frac{ر^{٢ن}(ر^{ن} - ١)}{(ر^{ن} - ١)} = ر^{٢ن}$$

(٨) إذا كانت المتتالية ١، ١، ٣، $\frac{١}{٣}$، ٩، $\frac{١}{٩}$، ٢٧، $\frac{١}{٢٧}$، ٨١، $\frac{١}{٨١}$ ....

فأثبت أن مجموع أول ٢ن حدًا في المتتالية هو $\frac{١}{٢}$ (٢+ $٣^{ن}$ - $٣^{١-ن}$)

الحل

يمكن تقسيم هذه المتتالية الى متتاليتين هندسيتين

(١، ٣، ٩، ٢٧، ٨١، ....)

الحد الأول = ١

الأساس = ٣

$$\text{جـ}_{ن} = \frac{١(٣^{ن} - ١)}{٣ - ١}$$

$$\text{جـ}_{ن} = \frac{(٣^{ن} - ١)}{٢}$$

$\text{جـ}_{ن} = \frac{١}{٢}(٣^{ن} - ١)$ (١)

(١، $\frac{١}{٣}$، $\frac{١}{٩}$، $\frac{١}{٢٧}$، $\frac{١}{٨١}$، ....)

الحد الأول = ١

الأساس = $\frac{١}{٣}$

$$\text{جـ}_{ن} = \frac{١((\frac{١}{٣})^{ن} - ١)}{\frac{١}{٣} - ١}$$

$$\text{جـ}_{ن} = \frac{((\frac{١}{٣})^{ن} - ١)}{\frac{-٢}{٣}}$$

$\text{جـ}_{ن} = \frac{١}{٢} \times -٣ ((\frac{١}{٣})^{ن} - ١)$ ضربنا × مقلوب المقام

$\text{جـ}_{ن} = \frac{١}{٢}((\frac{١}{٣})^{ن} \times -٣ + ٣)$ ضربنا (-٣) داخل القوس

عندما نقلب أي كسر تتغير إشارة الأس

$\text{جـ}_{ن} = \frac{١}{٢}(٣^{-ن} \times -٣ + ٣)$ عند الضرب نجع الاسس

$\text{جـ}_{ن} = \frac{١}{٢}(-٣^{-ن+١} + ٣)$

$\text{جـ}_{ن} = \frac{١}{٢}(-٣^{١-ن} + ٣)$ (٢)

بجمع المعادلتين (١) ، (٢)

$\text{جـ}_{٢ن} = \frac{١}{٢}(٣^{ن} - ١ - ٣^{١-ن} + ٣)$

$\text{جـ}_{٢ن} = \frac{١}{٢}(٣^{ن} - ٣^{١-ن} + ٢)$

(٩) ليكن جـن = ١ + ١١ + ١١١ + ١١١١ + ١١١١١ + ... إلى ن حدًّا

اثبت أن جـن = $\frac{١٠^{ن+١} - ١٠ - ٩ن}{٨١}$

الحل

جـن = ١ + ١١ + ١١١ + ١١١١ + ١١١١١ + ...

بضرب الصيغة × ٩

٩ جـن = ٩ + ٩٩ + ٩٩٩ + ٩٩٩٩ + ٩٩٩٩٩ + ...

٩ جـن = (١٠-١) + (١٠٠-١) + (١٠٠٠-١) + (١٠٠٠٠-١) + ...

٩ جـن = (١٠ + ١٠٠ + ١٠٠٠ + ١٠٠٠٠ + ...) − (١+ ١+١ + ١ ......)

متسلسلة هندسية حدها الأول ١٠ وأساسها ١٠

١ مكرر ن من المرات

$$٩جـ_ن = \frac{١٠(١٠^ن - ١)}{١٠ - ١} - ن$$

بضرب ١٠ داخل القوس

$$٩جـ_ن = \frac{(١٠^{ن+١} - ١٠)}{٩} - ن$$

بتوحيد المقامات على ٩ والتجميع

$$٩جـ_ن = \frac{(١٠^{ن+١} - ١٠) - ٩ن}{٩}$$

بالقسمة على ٩

$$جـ_ن = \frac{١٠^{ن+١} - ١٠ - ٩ن}{٨١}$$

تأمل معي المتسلسلة التالية

٤٠ - ٢٠ + ١٠ -٥ + ...

متسلسلة هندسية: الحد الأول فيها يساوي ٤٠ ، الأساس هو $\frac{-٢٠}{٤٠} = \frac{-١}{٢}$

هذه متسلسلة لا يوجد لها حد أخير فتسمى متسلسلة لا نهائية

ويمكن إيجاد مجموع حدود متسلسلة هندسية لا نهائية بشرط أن تكون تقاربية أي

$\boxed{-١ < ر < ١}$

ويمكن حساب مجموع حدود متسلسلة هندسية غير منتهية (عدد لا نهائي من الحدود) من الصيغة التالية

$$\boxed{جـ_{\infty} = \frac{أ}{١-ر}}$$

أمثلة وتمارين

(١) أوجد المجموع إلى مالانهاية لكل متسلسلة من المتسلسلات الهندسية الآتية

(أ) $٢ + \frac{٢}{٣} + \frac{٢}{٩} + \frac{٢}{٢٧} + ...$

الحد الأول = ٢

$ر = \frac{٢}{٣} \div ٢ = \frac{١}{٣}$

$$جـ_{\infty} = \frac{٢}{١-\frac{١}{٣}}$$

$جـ_{\infty} = ٣$

(ب) $١ + ٠,١ + ٠,٠١ + ٠,٠٠١ + ...$

الحد الأول = ١

ر= ٠,١ ÷ ١ = ٠,١

$$جـ_{\infty} = \frac{١}{١-٠,١}$$

$$جـ_{\infty} = \frac{١٠}{٩}$$

(ج) ٤٠ − ٢٠ + ١٠ − ٥ + ...

الحد الأول = ٤٠

ر = $\frac{-٢٠}{٤٠} = \frac{-١}{٢}$

$ج_\infty = \frac{٤٠}{١-(\frac{-١}{٢})}$

$ج_\infty = \frac{٨٠}{٣}$

(د) -٦٤ + ٤٨ -٣٦ + ٢٧ + ...

الحد الأول = -٦٤

ر= $\frac{٤٨}{-٦٤} = \frac{-٣}{٤}$

$ج_\infty = \frac{-٦٤}{١-(\frac{-٣}{٤})}$

$ج_\infty = \frac{-٢٥٦}{٧}$

(٢) إذا كانت الحدود الأربعة الأولى في متتالية هندسية هي ١، $(٠,٥)^٢$ ، $(٠,٥)^٤$، $(٠,٥)^٦$ ، .... فأوجِد المجموع إلى مالانهاية.

الحل

أ = ١

ر = $(٠,٥)^٢ \div ١ = (٠,٥)^٢$

$ج_\infty = \frac{١}{١-(٠,٥)^٢}$

$ج_\infty = \frac{٤}{٣}$

(٣) إذا كان الحدّ الأول في متتالية هندسية هو ٨ والحدّ الثاني هو ٦، فأوجِد المجموع إلى مالانهاية.

....

....

....

....

....

....

(٤) إذا كان الحدّ الأول في متتالية هندسية هو ٢٧٠ والحدّ الرابع هو ٨٠، فأوجِد المجموع إلى مالانهاية.

....

....

....

....

....

....

(٥) (أ) اكتب الكسر العشري الدوري $\overline{0.57}$ في صورة مجموع متتالية هندسية

(ب) استخدم إجابتك في الجزئية (أ) لتثبت أن $\overline{0.57}$ يمكن كتابته في صورة

الحل

يمكن كتابة ٠,٥٧ على صورة = ٠,٥٧ + ٠,٠٠٥٧ + ٠,٠٠٠٠٥٧ + ...

وهي على صورة متسلسلة هندسية أ = ٠,٥٧ ر = ٠,٠١

$$ج_\infty = \frac{٠,٥٧}{١-٠,٠١} = \frac{٥٧}{٩٩} = \frac{١٩}{٣٣}$$

(٦) إذا كان الحدّ الأول في متتالية هندسية هو ١٥٠ ومجموع الحدود إلى مالانهاية يساوي ٢٠٠ ، فأوجِد الأساس ومجموع أول أربعة حدود منها

الحل

أ = ١٥٠ ، $ج_\infty = ٢٠٠$

$$\therefore \frac{أ}{١-ر} = ٢٠٠$$

$$\therefore \frac{١٥٠}{١-ر} = ٢٠٠$$

$$١ - ر = \frac{١٥٠}{٢٠٠}$$

$$-ر = \frac{٣}{٤} - ١ = \frac{-١}{٤}$$

$$ر = \frac{١}{٤}$$

$$ج_٤ = \frac{١٥٠((\frac{١}{٤})^٤ - ١)}{\frac{١}{٤} - ١} = \frac{٦٣٧٥}{٣٢}$$

(٧) إذا كان الحدّ الثاني في متتالية هندسية هو ٤,٥ ومجموع حدودها إلى مالانهاية هو ١٨ ، فأوجِد الأساس والحدّ الأول.

الحل

أر= ٤,٥ ، $جـ_{\infty}$ = ١٨

∴ أ = ١٨ -١٨ر — بالضرب × ر

∴ أر= ١٨ ر-١٨$ر^{٢}$ — بالتعويض عن قيمة الحد الثاني = ٤,٥

١٨ ر-١٨$ر^{٢}$ = ٤,٥ — بالقسمة على -٤,٥ واعادة ترتيب المعادلة

٤$ر^{٢}$ − ٤ر = -١

٤$ر^{٢}$ − ٤ر+١=٠

(٢ر-١) (٢ر-١) =٠

ر= $\frac{١}{٢}$

بالتعويض عن قيمة ر في الحد الثاني

أ($\frac{١}{٢}$) = ٤,٥

أ = ٢ × ٤,٥ = ٩

(٨) ضع الكسر العشري الدوري ٠,٣١٥١٥١٥ في صورة متسلسلة هندسية غير منتهية ثم اوجد مجموعها.

الحل

٠,٣١٥١٥١٥ = ٠,٣ + ٠,٠١٥ + ٠,٠٠٠١٥ + ٠,٠٠٠٠٠١٥ + ...

= ٠,٣ + $جـ_{\infty}$

٠,٣ + $\frac{٠,٠١٥}{١-٠,٠١}$

= ٠,٣ + $\frac{١}{٦٦}$

= $\frac{٥٢}{١٦٥}$

(٩) إذا كان الحدّ الثاني في متتالية هندسية هو ٩ والحدّ الرابع هو ٤ والأساس موجب، فأوجِد

- الأساس والحدّ الأول.
- مجموع الحدود إلى مالانهاية

الحل

أ ر = ٩ ، أ ر^{٣} = ٤

بقسمة الحد الرابع على الحد الثاني

$$\frac{ر^{٣}}{ر} = \frac{٤}{٩}$$

$$ر^{٢} = \frac{٤}{٩}$$

بأخذ الجذر التربيعي

$$ر = \frac{٢}{٣}$$

بالتعويض في معادلة الحد الثاني

$$أ \times \frac{٢}{٣} = ٩$$

$$أ = ٩ \times \frac{٣}{٢} = \frac{٢٧}{٢}$$

$$جـ_{\infty} = \frac{\frac{٢٧}{٢}}{١ - \frac{٢}{٣}} = \frac{٨١}{٢}$$

(١٠) إذا كان الحدّ الثالث في متتالية هندسية هو ١٦ والحدّ السادس هو $\frac{-١}{٤}$ والأساس موجب، فأوجِد

- الأساس والحدّ الأول.
- مجموع الحدود إلى مالانهاية

الحل

أ ر^{٢} = ١٦ ، أ ر^{٥} = $\frac{-١}{٤}$

بقسمة الحد السادس على الحد الثالث

$$\frac{ر^{٥}}{ر^{٢}} = \frac{\frac{-١}{٤}}{١٦}$$

$$ر^{٣} = \frac{-١}{٦٤}$$

بأخذ الجذر التكعيبي

$$ر = \frac{-١}{٤}$$

بالتعويض في معادلة الحد الثالث

$$أ \times \left(\frac{-١}{٤}\right)^{٢} = ١٦$$

أ = ٢٥٦

$$جـ_{\infty} = \frac{٢٥٦}{١ - \left(\frac{-١}{٤}\right)} = \frac{١٠٢٤}{٥}$$

(١١) إذا كانت الحدود الثلاثة الأولى في متتالية هندسية هي ١٣٥ ، ك، ٦٠ ، وكانت جميع حدود المتتالية موجبة، أوجد

- قيمة ك
- مجموع الحدود إلى مالانهاية.

الحل

النسبة المشتركة بين أي حدين متتاليين متساوية

$\frac{ك}{١٣٥} = \frac{٦٠}{ك}$ بالضرب التبادلي

$ك^{٢} = ٦٠ \times ١٣٥$

$ك^{٢} = ٨١٠٠$ بأخذ الجذر التربيعي

$ك = ٩٠$

$ر = \frac{٦٠}{٩٠} = \frac{٢}{٣}$

$جـ_{\infty} = \frac{١٣٥}{١-\frac{٢}{٣}} = ٤٠٥$

(١٢) إذا كانت الحدود الثلاثة الأولى في متتالية هندسية هي ك + ١٢ ، ك، ك - ٩ على الترتيب، فأوجد

- قيمة ك
- مجموع الحدود إلى مالانهاية.

الحل

النسبة المشتركة بين أي حدين متتاليين متساوية

$\frac{ك}{ك+١٢} = \frac{ك-٩}{ك}$ بالضرب التبادلي

$ك^{٢} = (ك+١٢)(ك-٩)$

$ك^{٢} = ك^{٢} + ٣ك - ١٠٨$

$٣ك - ١٠٨ = ٠$

$ك = ٣٦$ حدود المتتالية هي: ٤٨، ٣٦، ٢٧

$ر = \frac{٣٦}{٤٨} = \frac{٣}{٤}$

$جـ_{\infty} = \frac{٤٨}{١-\frac{٣}{٤}} = ١٩٢$

(١٣) إذا كان الحدّ الرابع في متتالية هندسية هو ٤٨ ومجموع الحدود إلى مالانهاية يساوي خمسة أمثال الحدّ الأول، فأوجد الحدّ الأول.

الحل

أر^{٣} = ٤٨ (١)

$\frac{أ}{١-ر} = ٥أ$ بقسمة المعادلة على أ

$\frac{١}{١-ر} = ٥$ بالضرب التبادلي

$١ - ر = \frac{١}{٥}$

$ر = ١ - \frac{١}{٥} = \frac{٤}{٥}$

بالتعويض عن قيمة ر في المعادلة (١)

$أ\left(\frac{٤}{٥}\right)^{٣} = ٤٨$

$أ\left(\frac{٦٤}{١٢٥}\right) = ٤٨$

$أ = \frac{٤٨ \times ١٢٥}{٦٤}$

$أ = \frac{٣٧٥}{٤}$

(١٤) إذا علمت أن الحد الأول لمتتالية هندسية هو أ وأساسها ر، $\text{جـ}_{٣}$ = ٣,٩٢ ، $\text{جـ}_{\infty} = ٥$، أوجد قيمة أ ، ر

الحل

$$\frac{\text{أ}}{١-\text{ر}} = ٥$$

ويمكن كتابة المعادلة السابقة على الصورة

$$\frac{\text{أ}}{\text{ر}-١} = -٥ \qquad (١)$$

$$\text{جـ}_{٣} = \frac{\text{أ}(\text{ر}^{٣}-١)}{\text{ر}-١}$$

$$٣,٩٢ = \frac{\text{أ}(\text{ر}^{٣}-١)}{\text{ر}-١} \qquad (٢)$$

بالتعويض عن $\frac{\text{أ}}{\text{ر}-١}$ من المعادلة (١) في المعادلة (٢)

$$٣,٩٢ = -٥\ (\text{ر}^{٣}-١)$$

$$\text{ر}^{٣}-١ = \frac{٣,٩٢}{-٥}$$

$$\text{ر}^{٣} = \frac{٣,٩٢}{-٥} + ١$$

$\text{ر}^{٣} = ٠,٢١٦$　　بأخذ الجذر التكعيبي

ر= ٠,٦

بالتعويض عن قيمة (ر) في المعادلة(١)

$$\frac{\text{أ}}{٠,٦-١} = -٥$$

أ = -٥ × -٠,٤ = ٢

(١٥) متتالية هندسية حدّها الأول ١ وحدّها الثاني ٢جتا(س) حيث ، ٠ < س< $\frac{\pi}{٢}$ ، أوجِد مجموعة قيم س لتكون المتتالية متقاربة.

الحل

أ = ١

ح٢ = ٢ جتاس

ر = ح٢ ÷ ح١ = ٢ جتا س

حتى تكون المتتالية تقاربية

-١<ر<١

∵ س تقع في الربع الأول

∴ ر < ١

٢ جتاس < ١

جتاس < ٠,٥

س > جتا $^{-١}$ (٠,٥)

س > ٦٠

∴ ٦٠ < س< ٩٠

عزيزي الطالب تذكر معي ما درسناه في هذه الوحدة

كافة الصيغ التي تتعلق بالمتتاليات الحسابية والهندسية

الحد العام للمتتالية الحسابية

$$\text{أ} + (\text{ن} - ١)\text{د}$$

الحد العام للمتتالية الهندسية

$$\text{أ}\,\text{ر}^{\text{ن} - ١}$$

مجموع حدود متتالية هندسية

$$\frac{\text{أ}(\text{ر}^{\text{ن}} - ١)}{\text{ر} - ١}$$

$$\frac{\text{أ}(١ - \text{ر}^{\text{ن}})}{١ - \text{ر}}$$

مجموع حدود متتالية حسابية

$$\frac{\text{ن}}{٢}\left[٢\text{أ} + (\text{ن} - ١) \times \text{د}\right]$$

$$\frac{\text{ن}}{٢}\left[\text{أ} + \text{ل}\right]$$

مجموع حدود متتالية هندسية لانهائية

$$\frac{\text{أ}}{١ - \text{ر}}$$

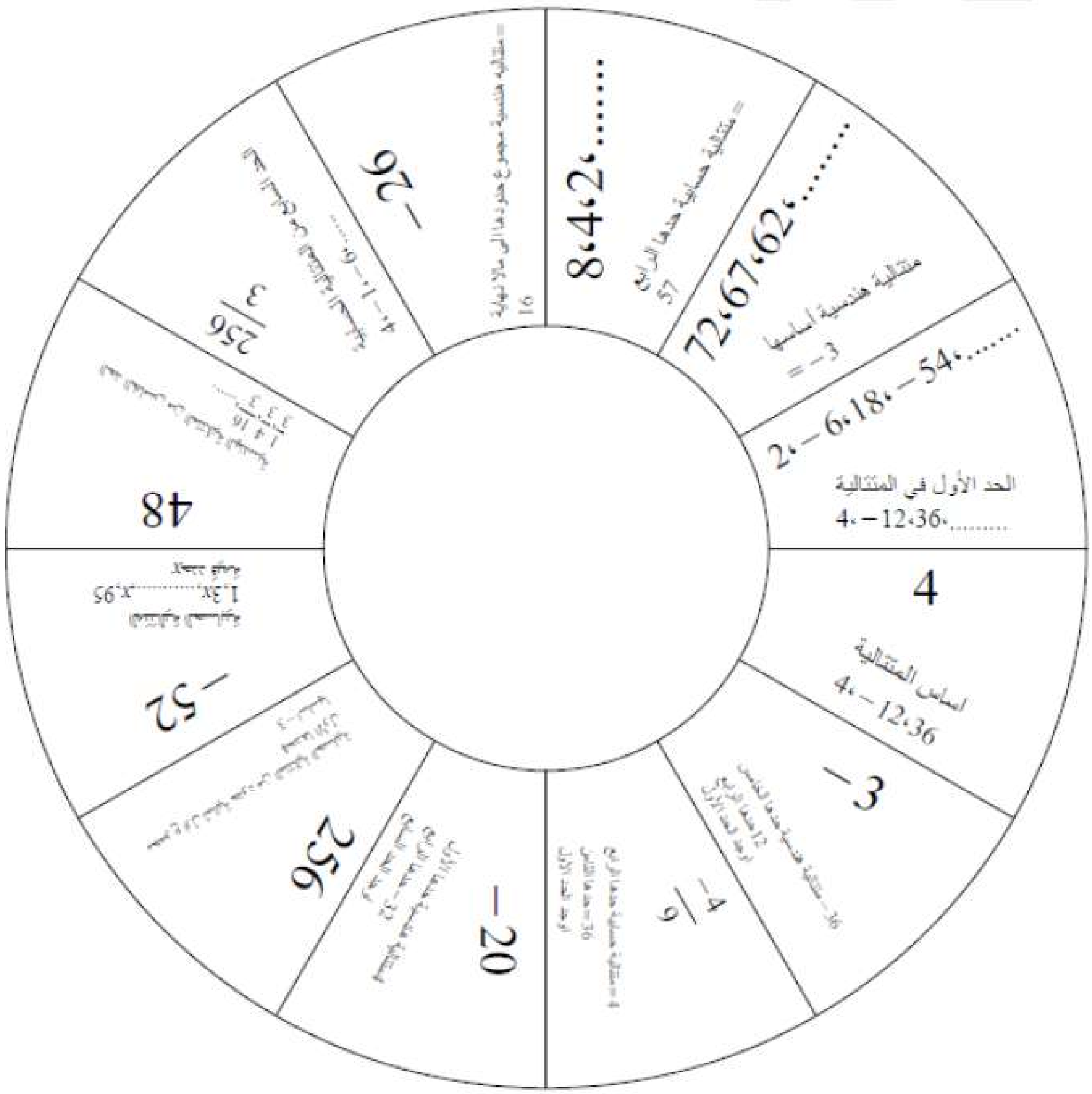
نشاط: قُص وجَمّع

عزيزي الطالب يستخدم النشاط التالي لمراجعة كافة القواعد والمهارات الأساسية التي تتعلق بمفهوم المتتاليات الحسابية والهندسية

فكرة النشاط:

قم بقص كل قطاع من هذه الدائرة ورتبهم بشكل عشوائي، يجب عليك أن تعلم أن كل قطاع مكتوب عليه إجابة وسؤال، وهذه الإجابة لا تخص هذا السؤال انما تخص سؤال آخر

قم بحل التمارين حتى تتمكن من تجميع الشكل بصورة صحيحة



تمارين ومسائل

(١) إذا كان الحدّ الأول في متتالية هو ١٦ والحدّ الثاني هو ٢٤ ، فأوجِد مجموع أول ثمانية حدود إذا علمت أن المتتالية

(أ) متتالية حسابية

أ = ١٦

د = ٢٤ – ١٦ = ٨

$ج_{8} = \frac{8}{2}(2\times16+7\times8)$

جـ٨ = ٤ (٣٢+ ٥٦)

جـ٨ = ٤ × ٨٨

∴ جـ٨ = ٣٥٢

(ب) متتالية هندسية

أ = ١٦

$ر = \frac{24}{16} = \frac{3}{2}$

$ج_{8} = \frac{16\left(\left(\frac{3}{2}\right)^{8}-1\right)}{\frac{3}{2}-1}$

$ج_{8} = \frac{6305}{8}$

= ٧٨٨,١٢٥

(٢) الحدّ الأول في متتالية هو ٢٠ والحدّ الثاني هو ١٦

(أ) إذا علمت أن المتتالية هندسية، فأوجِد مجموع الحدود إلى مالانهاية

الحل

أ = ٢٠

$ر = \frac{16}{20} = \frac{4}{5}$

$ج_{\infty} = \frac{20}{1-\frac{4}{5}}$

$ج_{\infty} = 100$

(ب) إذا علمت أن المتتالية حسابية، فأوجِد عدد حدود المتتالية إذا كان مجموع جميع الحدود -١٦٠

الحل

أ = ٢٠ د = ١٦ - ٢٠ = -٤

بالتعويض في صيغة مجموع المتسلسلة الحسابية

$\frac{ن}{2}(2\times20+(ن-1)\times-4) = -160$

$\frac{ن}{2}(40-4ن+4) = -160$

$\frac{ن}{2}(44-4ن) = -160$

بالضرب × ٢

ن(٤٤ -٤ن) = -٣٢٠

-٤ن^{2} + ٤٤ ن + ٣٢٠ = ٠ ×(-١)

٤ن^{2} - ٤٤ ن - ٣٢٠ = ٠ ÷(٤)

ن^{2} – ١١ ن - ٨٠ = ٠

(ن-١٦) (ن+٥)= ٠

ن =١٦ ن = -٥ (مرفوض)

(٣) إذا علمت أن الحدود الثلاثة الأولى في متتالية هندسية هي الحدود الأول والرابع والعاشر على الترتيب في متتالية حسابية. وكان الحدّ الأول في كل متتالية هو ١٢ وأساس المتتالية الهندسية ر حيث ر ≠ ١أوجد

- قيمة ر
- الحد السادس من كل متتالية

الحل

متتالية هندسية	أ	أر	أر^٢
متتالية حسابية	أ	أ + ٣د	أ + ٩د

في الجدول السابق كل حد مساوٍ للحد المكتوب أسفل منه

من المعطيات: أ = ١٢ في كل متتالية

∴ ١٢ ر = ١٢ + ٣د

بالقسمة على ٣

٤ر = ٤ + د

د = ٤ ر − ٤ (١)

∴ ١٢ ر^٢ = ١٢ + ٩د

بالتعويض عن د من المعادلة (١)

١٢ ر^٢ = ١٢ + ٩(٤ر -٤)

١٢ ر^٢ = ١٢ + ٣٦ر -٣٦

بالقسمة على ١٢

ر^٢ -٣ر+٢ = ٠

(ر-٢) (ر-١) = ٠

ر= ٢ ر=١ (مرفوض)

$\boxed{\text{∴ر = ٢}}$

بالتعويض عن قيمة ر في المعادلة (١) للحصول على قيمة د

د = ٤(٢) − ٤ = ٤

الحد السادس من المتتالية الهندسية

ح٦ = أ ر^٥

ح٦ = ١٢ (٢) ^{٥}

$\boxed{\text{ح٦ = ٣٨٤}}$

الحد السادس من المتتالية الحسابية

ح٦ = أ + ٥د

ح٦ = ١٢ + ٤×٥

$\boxed{\text{ح٦ = ٣٢}}$

(٤) تتكوّن متتالية هندسية من ثمانية حدود. حدّها الأول ٢٥٦ وأساسها $\frac{١}{٢}$ وتتكون متتالية حسابية من ٥١ حدًّا وأساسها $\frac{١}{٢}$ إذا كان مجموع حدود المتتالية الهندسية يساوي مجموع حدود المتتالية الحسابية، فأوجِد الحدّ الأول والحدّ الأخير في المتتالية الحسابية.

الحل

متتالية	أ	ر
هندسية	٢٥٦	$\frac{١}{٢}$

متتالية	ن	د
حسابية	٥١	$\frac{١}{٢}$

مجموع ٨ حدود من المتتالية الهندسية

$$ج_{٨} = \frac{٢٥٦\left(\left(\frac{١}{٢}\right)^{٨} - ١\right)}{\frac{١}{٢} - ١}$$

∴ ج٨ = ٥١٠

مجموع ٥١ حدود من المتتالية الحسابية

$$ج_{٥١} = \frac{٥١}{٢}\left(٢أ + ٥٠ \times \frac{١}{٢}\right)$$

من معطيات السؤال: نعوض عن $ج_{٥١}$ = ٥١٠

$$\frac{٥١}{٢}\left(٢أ + ٢٥\right) = ٥١٠$$

$٢أ + ٢٥ = ٥١٠ \times \frac{٢}{٥١}$

٢أ + ٢٥ = ٢٠

٢أ = ٢٠ - ٢٥ = -٥

$\boxed{\text{∴ أ = -٢,٥}}$

الحد الأخير من المتتالية الحسابية= $ح_{٥١}$

$ح_{٥١}$= أ + ٥٠ د

$ح_{٥١}$ = -٢,٥ + ٥٠ × ٠,٥

$\boxed{ح_{٥١} = ٢٢,٥}$

إذا كانت الحدود الثلاثة الأولى في متتالية هندسية هي الحدود الأول والسادس والتاسع على الترتيب في متتالية حسابية. وإذا علمت أن الحدّ الأول في كل متتالية هو ١٠٠ وأساس المتتالية الهندسية ر حيث ر≠١ أوجد

- قيمة ر
- الحد الخامس في كل متتالية

الحل

متتالية هندسية	أ	أر	أر^{٢}
متتالية حسابية	أ	أ + ٥د	أ + ٨د

في الجدول السابق كل حد مساوٍ للحد المكتوب أسفل منه

من المعطيات: أ = ١٠٠ في كل متتالية

∴ ١٠٠ ر = ١٠٠ + ٥د

بالقسمة على ٥

٢٠ر = ٢٠+ د

د = ٢٠ ر − ٢٠ (١)

∴ ١٠٠ ر^{٢} = ١٠٠ + ٨د

بالتعويض عن د من المعادلة (١)

١٠٠ ر^{٢} = ١٠٠ + ٨(٢٠ر-٢٠)

١٠٠ ر^{٢} = ١٠٠ + ١٦٠ر-١٦٠

بالقسمة على ٢٠

٥ر^{٢} -٨ر +٣ = ٠

(٥ر-٣) (ر-١) = ٠

ر= $\frac{٣}{٥}$ ر=١ (مرفوض)

$\boxed{∴ر = \frac{٣}{٥}}$

بالتعويض عن قيمة ر في المعادلة (١) للحصول على قيمة د

د = ٢٠($\frac{٣}{٥}$) − ٢٠ = -٨

الحد الخامس من المتتالية الهندسية

ح$_{٥}$ = أ ر^{٤}

ح$_{٥}$= ١٠٠ ($\frac{٣}{٥}$)^{٤}

$\boxed{ح_{٥} = ١٢,٩٦}$

الحد السادس من المتتالية الحسابية

ح$_{٥}$ = أ + ٤د

ح$_{٥}$= ١٠٠ + ٤×(-٨)

$\boxed{ح_{٥}= ٦٨}$

(٦) الحدّ الأول في متتالية حسابية هو ١٦ ومجموع أول ٢٠ حدًّا فيها هو ١٠٨٠

- أوجِد أساس هذه المتتالية.
- إذا علمت أن الحدّ الأول والحدّ الثالث والحدّ العام في هذه المتتالية الحسابية هي الحدود الثلاثة الأولى على الترتيب لمتتالية هندسية. فأوجِد أساس المتتالية الهندسية وقيمة ن.

الحل

أ = ١٦ $\quad$ جـ٢٠ = ١٠٨٠

$\frac{٢٠}{٢}(٢ \times ١٦ + ١٩ د) = ١٠٨٠$

١٠ (٣٢ +١٩د) =١٠٨٠ $\quad$ بالقسمة على ١٠

٣٢ + ١٩د = ١٠٨

١٩ د = ١٠٨ – ٣٢= ٧٦ $\quad$ بالقسمة على ١٩

$\boxed{\therefore د = ٤}$

متتالية هندسية	أ	أر	أر^٢
متتالية حسابية	أ	أ + ٢د	أ + (ن-١)د

∴ ١٦ ر = ١٦ + ٢ × ٤

١٦ ر = ٢٤

$\boxed{\therefore ر = \frac{٣}{٢}}$

أر^٢ = ١٦ $(\frac{٣}{٢})^٢$ =٣٦

∴ ح ن = ٣٦

أ + (ن-١)د = ٣٦

١٦ + (ن-١) × ٤ = ٣٦

٤(ن-١) = ٣٦ -١٦= ٢٠ $\quad$ بالقسمة على ٤

ن -١ = ٥

$\boxed{\therefore ن = ٦}$

(٧) الحدّ الأول في متتالية هو (٢س) والحدّ الثاني هو (س^{٢})

- إذا كانت المتتالية حسابية وأساسها ١٥ ، فأوجِد القيمتَين الممكنتَين لـ س والقيم المناظرة للحدّ الثالث.
- إذا كانت المتتالية هندسية، وحدّها الثالث $\frac{-١}{١٦}$ يساوي فأوجِد مجموعها إلى مالانهاية

الحل

اولاً إذا كانت المتتالية حسابية

د = س^{٢} – ٢س

∴ س^{٢} – ٢س = ١٥

س^{٢} – ٢س – ١٥ =٠

(س-٥) (س +٣) =٠

س = ٥ | س = -٣

أ = ٢× ٥= ١٠ | أ = ٢× -٣ = -٦

ح$_{٣}$ = ١٠ + ٢×١٥ | ح$_{٣}$ = -٦ + ٢× ١٥

$\boxed{ح_{٣} = ٤٠}$ | $\boxed{ح_{٣} = ٢٤}$

ثانياً إذا كانت المتتالية هندسية

$$ر = \frac{س^{٢}}{٢س} = \frac{س}{٢}$$

الحد الثالث ينتج من ضرب الحد الثاني × الأساس

$$∴ س^{٢} \times \frac{س}{٢} = \frac{-١}{١٦}$$

$$\frac{س^{٣}}{٢} = \frac{-١}{١٦}$$

س^{٣} = $\frac{-١}{٨}$ بأخذ الجذر التكعيبي

س = $\frac{-١}{٢}$

الحد الأول = ٢ × $\frac{-١}{٢}$ = -١

الأساس = $\frac{-١}{٢}$ ÷ ٢ = $\frac{-١}{٤}$

$$جـ_{\infty} = \frac{-١}{١-(-\frac{١}{٤})}$$

$$جـ_{\infty} = \frac{-٤}{٥}$$