شكراً لتحميلك هذا الملف من موقع المناهج العمانية

مراجعة درس المتسلسلات الهندسية غير المنتهية

تاريخ نشر الملف على موقع المناهج: 2023-10-25 10:32:05 | اسم المدرس: قيس الشبيبي

التواصل الاجتماعي بحسب الصف الحادي عشر

روابط مواد الصف الحادي عشر على تلغرام

التربية الاسلامية	اللغة العربية	اللغة الانجليزية	الرياضيات

المزيد من الملفات بحسب الصف الحادي عشر والمادة رياضيات متقدمة في الفصل الأول

1	ملخص شرح درس حل المعادلات الآنية
2	ملخص شرح درس التباين والانحراف المعياري
3	حل أسئلة وأمثلة درس المتسلسلات الهندسية غير المنتهية
4	ملخص شرح درس المتتالية الهندسية
5	ملخص شرح درس الصيغة التربيعية

٣-٣ المتسلسلات الهندسية غير المنتهية ← متسلسلة متقاربة

نتيجة ٦

$جـ_\infty = \frac{أ}{1 - ر}$ ، حيث $-1 < ر < 1$

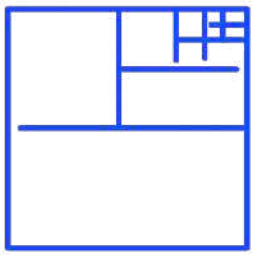
$ر = \frac{1}{2}$ $P = 16$

١٦ ، ٨ ، ٤ ، ٢ ، ١ ، $\frac{1}{2}$ ، $\frac{1}{4}$ ، $\frac{1}{8}$ ، $\frac{1}{16}$ ، .....

$ر = \frac{1}{3}$ $P = 9$

٩ ، ٣ ، ١ ، $\frac{1}{3}$ ، $\frac{1}{9}$ ، $\frac{1}{27}$ ، .....

$\frac{5}{8}$ ، $\frac{4}{5}$ ، $\frac{3}{4}$ ، $\frac{2}{3}$ ، $\frac{1}{2}$ ، ٠,٥ ، ٠,٢ ، ٠,١ ، ٠,٠٥ ، ٠,٠٢٥ ، ...



مثال ١٣

إذا علمت أن الحدود الأربعة الأولى في متتالية هندسية هي ٥ ، ٤ ، ٣,٢ ، ٢,٥٦ ، .....

أ) اكتب أساس المتتالية.

$ر = \frac{٤}{٥} = ٠,٨$ أو $٠,٨ = \frac{٣,٢}{٤}$

ب) أوجِد المجموع إلى مالانهاية.

$جـ_\infty = \frac{P}{1 - ر} = \frac{٥}{1 - ٠,٨} = \frac{٥}{٠,٢} = ٢٥$

مثـال ١٤

متتالية هندسية أساسها $-\frac{٢}{٣}$، ومجموع أول ثلاثة حدود فيها ٦٣ أوجد:

أ الحدّ الأول في المتتالية.

ب مجموعها إلى مالانهاية.

أ) $ر = -\frac{٢}{٣}$

$جـ_٣ = ٦٣$

$\frac{أ(ر^{ن}-١)}{ر-١} = ٦٣$

$\frac{أ((-\frac{٢}{٣})^{٣}-١)}{-\frac{٢}{٣}-١} = ٦٣$

$\frac{أ(-\frac{٨}{٢٧}-١)}{-\frac{٥}{٣}} = ٦٣$

$أ(-\frac{٣٥}{٢٧}) = -١٠٥$

$أ = -١٠٥ \times -\frac{٢٧}{٣٥}$

$أ = ٨١$

ب) $جـ_∞ = \frac{أ}{١-ر}$

$= \frac{٨١}{١-(-\frac{٢}{٣})} = ٤٨,٦$

تمارين ٣-٣

١) أوجِد المجموع إلى مالانهاية لكل متسلسلة من المتسلسلات الهندسية الآتية:

أ $٢ + \frac{٢}{٣} + \frac{٢}{٩} + \frac{٢}{٢٧} + \ldots$

$أ = ٢$

$ر = \frac{\frac{٢}{٣}}{٢} = \frac{٢}{٣} \times \frac{١}{٢} = \frac{١}{٣}$

$جـ_∞ = \frac{أ}{١-ر} = \frac{٢}{١-\frac{١}{٣}} = ٣$

ب $١ + ٠,١ + ٠,٠١ + ٠,٠٠١ + \ldots$

$أ = ١$

$ر = \frac{٠,١}{١} = ٠,١$

$جـ_∞ = \frac{أ}{١-ر} = \frac{١}{١-٠,١} = \frac{١}{٠,٩} = \frac{١٠}{٩}$

ج) $\ldots + ٥ - ١٠ + ٢٠ - ٤٠$

$م_١ = ٤٠$ ، $ر = \frac{-٢٠}{٤٠} = -\frac{١}{٢}$

$مجـ_\infty = \frac{م_١}{١ - ر} = \frac{٤٠}{١ - (-\frac{١}{٢})} = \frac{٤٠}{\frac{٣}{٢}} = \frac{٨٠}{٣} = ٢٦,٦$

د) $\ldots - ٢٧ + ٣٦ - ٤٨ + ٦٤$

$م_١ = ٦٤$ ، $ر = \frac{-٤٨}{٦٤} = -\frac{٣}{٤} = -٠,٧٥$

$مجـ_\infty = \frac{م_١}{١ - ر} = \frac{٦٤}{١ - (-٠,٧٥)} = \frac{٦٤}{\frac{٧}{٤}} = ٣٦,٥٧$

٢) إذا كانت الحدود الأربعة الأولى في متتالية هندسية هي ١، $(٠,٥)^{٢}$، $(٠,٥)^{٤}$، $(٠,٥)^{٦}$، فأوجِد المجموع إلى مالانهاية.

$م_١ = ١$ ، $ر = \frac{(٠,٥)^{٢}}{١} = ٠,٢٥ = \frac{١}{٤}$

$مجـ_\infty = \frac{م_١}{١ - ر} = \frac{١}{١ - ٠,٢٥} = \frac{١}{٠,٧٥} = \frac{٤}{٣}$

٣) إذا كان الحدّ الأول في متتالية هندسية هو ٨ والحدّ الثاني هو ٦، فأوجِد المجموع إلى مالانهاية.

$\ldots\ldots ، ٦ ، ٨$

$م_١ = ٨$ ، $ر = \frac{٦}{٨} = \frac{٣}{٤}$

$مجـ_\infty = \frac{م_١}{١ - ر} = \frac{٨}{١ - \frac{٣}{٤}} = \frac{٨}{٠,٢٥} = ٣٢$

٤) إذا كان الحدّ الأول في متتالية هندسية هو ٢٧٠ والحدّ الرابع هو ٨٠، فأوجد الأساس، والمجموع إلى مالانهاية.

$ح_١ = أ = ٢٧٠$

$ح_٤ = أ ر^٣ = ٨٠$

$٨٠ = ٢٧٠ ر^٣$

$ر^٣ = \frac{٨٠}{٢٧٠}$

$ر^٣ = (\frac{٢}{٣})^٣$

$ر = \frac{٢}{٣}$

الطريقة (٢)

$ر = \frac{ح_ن}{ح_{ن-١}}$

$مج_\infty = \frac{أ}{١ - ر}$

$= \frac{٢٧٠}{١ - \frac{٢}{٣}}$

$= ٨١٠$

٥) أ) اكتب الكسر العشري الدوري ٠,٥٧ في صورة مجموع متتالية هندسية.

٠,٥٧٥٧٥٧٥٧...

ب) استخدم إجابتك في الجزئية (أ) لتثبت أن ٠,٥٧ يمكن كتابته في صورة $\frac{١٩}{٣٣}$

أ) $٠,٥٧٥٧٥٧... = \frac{٥٧}{١٠٠} + \frac{٥٧}{١٠٠٠٠} + \frac{٥٧}{١٠٠٠٠٠٠} + ...$

متتالية هندسية غير منتهية

$أ = \frac{٥٧}{١٠٠}$

$ر = \frac{\frac{٥٧}{١٠٠٠٠}}{\frac{٥٧}{١٠٠}} = \frac{١}{١٠٠}$

$ر = ٠,٠١$

ب) $مج_\infty = \frac{أ}{١ - ر} = \frac{\frac{٥٧}{١٠٠}}{١ - ٠,٠١} = \frac{٥٧}{٩٩} = \frac{١٩}{٣٣}$

سنعود للساعة 6:00

٦) إذا كان الحدّ الأول في متتالية هندسية هو ١٥٠ ومجموع الحدود إلى مالانهاية يساوي ٢٠٠، فأوجد الأساس، ومجموع أول أربعة حدود منها.

$أ_1 = 150$

$مج_\infty = 200$

$\frac{أ_1}{1 - ر} = 200$

$\frac{150}{1 - ر} = 200$

$150 = 200 - 200ر$

$200ر = 200 - 150$

$200ر = 50$

$ر = \frac{1}{4} = 0.25$

$مج_ن = \frac{أ_1(1 - ر^ن)}{1 - ر}$

$= \frac{150(1 - (\frac{1}{4})^4)}{1 - \frac{1}{4}}$

$= 199.21875$

للتأكد

$150، 37.5، 9.375، 2.34375$

طريقة أخرى:

$\frac{150}{200} = 1 - ر$

$1 - ر = \frac{3}{4}$

$ر = 1 - \frac{3}{4}$

$ر = \frac{1}{4}$

٧) إذا كان الحدّ الثاني في متتالية هندسية هو ٤,٥ ومجموع حدودها إلى مالانهاية هو ١٨، فأوجِد الأساس والحدّ الأول.

$ح_٢ = أ ر = ٤٫٥$ ← ①

$مج_\infty = ١٨$

$\frac{أ}{١-ر} = ١٨$ ← ②

من ① : $أ = \frac{٤٫٥}{ر}$

نعوض في ②

$\frac{\frac{٤٫٥}{ر}}{١-ر} = ١٨$

$\frac{٤٫٥}{ر} = ١٨ - ١٨ر$

نضرب المعادلة × ر

$٤٫٥ = ١٨ر - ١٨ر^٢$

$١٨ر^٢ - ١٨ر + ٤٫٥ = ٠$

$ر = \frac{١}{٢}$ (حذرين منشا بطين)

$\therefore أ = \frac{٤٫٥}{ر} = \frac{٤٫٥}{\frac{١}{٢}} = ٩$

٨) ضع الكسر العشري الدوري ٠,٣١٥١٥١٥١٥... في صورة متسلسلة هندسية غير منتهية، ثم أوجد مجموعها.

$٠٫٣١٥١٥١٥١٥... = \frac{٣}{١٠} + \frac{١٥}{١٠٠٠} + \frac{١٥}{١٠٠٠٠٠} + \frac{١٥}{١٠٠٠٠٠٠} + ---$

متتالية هندسية غير منتهية

$أ = \frac{١٥}{١٠٠٠}$ $ر = \frac{١}{١٠٠}$

$مج_\infty = \frac{أ}{١-ر} = \frac{\frac{١٥}{١٠٠٠}}{١ - \frac{١}{١٠٠}} = \frac{١}{٦٦}$

$٠٫٣١٥١٥١٥١٥... = \frac{٣}{١٠} + \frac{١}{٦٦} = \frac{٥٢}{١٦٥}$ الكسر العشري

٩) إذا كان الحدّ الثاني في متتالية هندسية هو ٩ والحدّ الرابع هو ٤ والأساس موجب، فأوجِد:

أ) الأساس والحدّ الأول.

ب) مجموع الحدود إلى مالانهاية.

$ح_٢ = أ ر = ٩$ ← (١)

$ح_٤ = أ ر^٣ = ٤$ ← (٢)

(٢) ÷ (١)

$\frac{أ ر^٣}{أ ر} = \frac{٤}{٩}$

$ر^٢ = \frac{٤}{٩}$

$ر = \frac{٢}{٣}$ أو $ر = -\frac{٢}{٣}$ مرفوضة

نعوض عن قيمة ر في احدى المعادلتين

$٩ = أ \times \frac{٢}{٣} \times \frac{٣}{٢}$

$أ = ٩ \times \frac{٢}{٣} = ١٣,٥$

ب) $مج_\infty = \frac{أ}{١ - ر}$

$= \frac{١٣,٥}{١ - \frac{٢}{٣}} = ٤٠,٥$

١٠) إذا كان الحدّ الثالث في متتالية هندسية هو ١٦ والحدّ السادس هو $-\frac{١}{٤}$، فأوجد:

أ) الأساس والحدّ الأول.

ب) مجموع الحدود إلى مالانهاية.

$ح_٣ = أ ر^٢ = ١٦$ ← (١)

$ح_٦ = أ ر^٥ = -\frac{١}{٤}$ ← (٢)

(٢) ÷ (١)

$\frac{أ ر^٥}{أ ر^٢} = \frac{-\frac{١}{٤}}{١٦}$

$ر^٣ = -\frac{١}{٦٤}$

$ر = -\frac{١}{٤}$

نعوض عن قيمة ر في احدى المعادلتين

$١٦ = أ (-\frac{١}{٤})^٢$

$١٦ = أ \frac{١}{١٦}$

$أ = ١٦ \times ١٦$

$أ = ٢٥٦$

ب) $مج_\infty = \frac{أ}{١ - ر}$

$= \frac{٢٥٦}{١ - (-\frac{١}{٤})} = ٢٠٤,٨$

١١) إذا كانت الحدود الثلاثة الأولى في متتالية هندسية هي ١٣٥، ك، ٦٠، وكانت جميع حدود المتتالية موجبة، فأوجد:

أ قيمة ك

ب مجموع الحدود إلى مالانهاية.

(أ) $\frac{٦٠}{ك} = \frac{ك}{١٣٥}$

$ك^{٢} = ٨١٠٠$

$ك = \pm ٩٠$

$ك = ٩٠$

أخذنا القيمة الموجبة لأنه ذكر في السؤال جميع الحدود موجبة

(ب) نكتب المتتالية

١٣٥ ، ك ، ٦٠ ، ...

... ، ٦٠ ، ٩٠ ، ١٣٥

$أ_{١} = ١٣٥$

$ر = \frac{٩٠}{١٣٥} = \frac{٢}{٣}$

$مجـ_{\infty} = \frac{أ_{١}}{١ - ر}$

$= \frac{١٣٥}{١ - \frac{٢}{٣}}$

$= ٤٠٥$

١٢) إذا كانت الحدود الثلاثة الأولى في متتالية هندسية هي ك + ١٢ ، ك ، ك − ٩ على الترتيب، فأوجد:

أ قيمة ك

ب مجموع الحدود إلى مالانهاية.

(أ) $\frac{ك - ٩}{ك} \times \frac{ك}{ك + ١٢}$

$ك^{٢} = (ك - ٩)(ك + ١٢)$

$ك^{٢} = ك^{٢} - ٩ك + ١٢ك - ١٠٨$

$ك^{٢} = ك^{٢} + ٣ك - ١٠٨$

$٣ك - ١٠٨ = ٠$

$٣ك = ١٠٨ \Leftarrow ك = ٣٦$

(ب) $مجـ_{\infty} = \frac{أ_{١}}{١ - ر}$

ك + ١٢ ، ك ، ك − ٩

↓

٤٨ ، ٣٦ ، ٢٧

$أ_{١} = ٤٨$

$ر = \frac{٣٦}{٤٨} = \frac{٣}{٤}$

$= \frac{٤٨}{١ - \frac{٣}{٤}}$

$= ١٩٢$

١٣) إذا كان الحدّ الرابع في متتالية هندسية هو ٤٨ ومجموع الحدود إلى مالانهاية يساوي خمسة أمثال الحدّ الأول، فأوجِد الحدّ الأول.

$ح_٤ = أ ر^٣ = ٤٨ \leftarrow (١)$

$مج_\infty = ٥ أ$

$\downarrow$

$\frac{أ}{١-ر} = ٥ أ \leftarrow (٢)$

من العلاقة (٢)

$\frac{١}{١-ر} \neq ٥$

$٥ - ٥ ر = ١$

$٥ - ١ = ٥ ر$

$٤ = ٥ ر$

$ر = \frac{٤}{٥}$

بتعويض في العلاقة (١)

$أ \times (\frac{٤}{٥})^٣ = ٤٨$

$أ \times \frac{٦٤}{١٢٥} = ٤٨$

$أ = ٤٨ \times \frac{١٢٥}{٦٤}$

$أ = \frac{٣٧٥}{٤} = ٩٣,٧٥$

١٤) إذا علمت أن الحد الأول لمتتالية هندسية هو أ وأساسها ر، $ح_٣ = ٣,٩٢$ و $مج_\infty = ٥$، فأوجِد قيمة أ، ر

$ح_٣ = ٣,٩٢$

$\downarrow$

$\frac{أ(١-ر^٣)}{١-ر} = ٣,٩٢ \leftarrow (١)$

$مج_\infty = ٥$

$\downarrow$

$\frac{أ}{١-ر} = ٥ \leftarrow (٢)$

(١) ÷ (٢)

$\frac{\frac{أ(١-ر^٣)}{١-ر}}{\frac{أ}{١-ر}} = \frac{٣,٩٢}{٥}$

$\frac{أ(١-ر^٣)}{١-ر} \times \frac{١-ر}{أ} = \frac{٣,٩٢}{٥}$

$١ - ر^٣ = \frac{٩٨}{١٢٥}$

$ر^٣ = ١ - \frac{٩٨}{١٢٥}$

$ر^٣ = \frac{٢٧}{١٢٥}$

$ر = \frac{٣}{٥}$

بتعويض في العلاقة (٢):

$\frac{أ}{١ - \frac{٣}{٥}} = ٥$

$\frac{أ}{\frac{٢}{٥}} = ٥$

$أ = ٢$

١٥) متتالية هندسية حدّها الأول ١ وحدّها الثاني ٢جتا(س) حيث $0 < س < \frac{\pi}{2}$، أوجد مجموعة قيم س لتكون المتتالية متقاربة.

$0° < س < 90°$

أي أن الزاوية س تقع في الربع الأول

توضيح: هذا السؤال يحتوي على معلومات لم يأخذها الطالب سابقاً.. لذا من الأفضل أن يحذف

المتتالية هي:

١ ، ٢جتاس ، ....

لكي تكون المتتالية متقاربة يجب أن يكون الأساس $-1 < ر < 1$

الأساس ر = الحد / الحد السابق = $\frac{٢جتاس}{1}$ = ٢جتاس

$\therefore -1 < ٢جتاس < 1$

هذه القيمة لا تقع في الربع الأول

$0 < ٢جتاس < 1$ ÷ ٢

$0 < جتاس < \frac{1}{2}$

$جتا^{-1} \frac{1}{2} > س > جتا^{-1} 0$

$90° > س > 60°$

ملاحظة:-

① $جتا^{-1}$ هي الدالة العكسية للدالة جتا

② $جتاس = \frac{1}{2} \Leftrightarrow س = جتا^{-1} \frac{1}{2}$

$س = 60°$

نستخدم في الآلة الحاسبة

shift + cos + 1/2

ويظهر الناتج 60°

وبالمثل $جتاس = 0$